



UNIVERSIDADE DOS AÇORES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

Grupos de Simetria: identificação de padrões no património açoriano

VERA MARIA RAPOSO MONIZ

Dissertação apresentada para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, sob a orientação científica dos Prof. Doutores Ricardo Cunha Teixeira, do Departamento de Matemática, e Susana Goulart Costa, do Departamento de História, Filosofia e Ciências Sociais da Universidade dos Açores.

PONTA DELGADA
OUTUBRO DE 2013

Resumo

Antes de surgir a palavra escrita, a imagem constituiu durante muito tempo o principal veículo de comunicação. Desde a Antiguidade que a repetição de um mesmo motivo tem sido usada nos mais variados contextos, dando lugar a composições de grande beleza estética. Se olharmos com atenção, encontramos com frequência composições deste tipo em monumentos e espaços públicos. Muitas são de natureza matemática e têm por base as isometrias do plano (reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante) e o conceito de simetria.

Uma investigação que oriente os alunos na deteção de padrões geométricos existentes no Património Cultural construído constitui uma excelente oportunidade de se estimular a utilização de ferramentas matemáticas como forma de interpretar o mundo real. A exploração de conexões entre temas matemáticos e a vida do dia a dia desempenha um papel nuclear na aprendizagem dos alunos e deve estar presente ao longo de todo o seu percurso escolar. Os programas e orientações curriculares, nacionais e internacionais, apontam claramente nesse sentido.

O estudo que agora se apresenta surge precisamente como um contributo para estimular este tipo de conexões matemáticas, tendo como pano de fundo a análise dos grupos de simetria de figuras planas inspiradas nos padrões que integram o Património existente no arquipélago dos Açores. Muitos desses padrões podem ser apreciados ao olhar para calçadas (com estrutura horizontal) ou para varandas e fachadas em azulejo de muitas habitações (com estrutura vertical), e constituíram o objeto central da nossa atenção.

Esta dissertação encontra-se dividida em duas partes. Na primeira parte, exploram-se conceitos e propriedades fundamentais que estão na base do trabalho desenvolvido. Dá-se destaque ao estudo das principais propriedades dos grupos de rosáceas e de frisos, por serem os grupos de simetria mais comuns no levantamento realizado.

Na segunda parte, contextualiza-se o estudo efetuado e convida-se o leitor a percorrer muitas ruas da ilha de São Miguel, nos Açores, e a identificar e classificar uma grande variedade de rosáceas e frisos. Será, ainda, apresentada uma sequência de roteiros de simetria e de outras atividades de exploração que pode ser facilmente utilizada por alunos, professores ou por outros elementos da comunidade, cujo interesse esperamos despertar.

Palavras-chave: Isometrias do Plano, Grupos de Simetria, Rosáceas, Frisos, Ensino da Matemática, Calçada Portuguesa, Azulejaria, Varandas em Ferro Fundido.

Abstract

Before the appearance of the written word, image has long been the main vehicle of communication. Since ancient times the repetition of the same motif has been used in various contexts, resulting in compositions of great aesthetic beauty. If we look carefully, we will often find similar compositions in monuments and public spaces. Many are mathematical and based on plane isometries (reflection, translation, rotation and glide reflection) and on the concept of symmetry.

An investigation that guides students to find geometric patterns in the cultural heritage is an excellent opportunity to improve the use of mathematical tools as a way to interpret the real world. Exploring connections between mathematical topics and everyday life plays a key role in students' learning process and should be present throughout their school years. The curricula and the corresponding curriculum guidelines, both national and international, clearly point in that direction.

The present study is a contribution to encourage this type of mathematical connections, based on the analysis of the symmetry groups of plane figures inspired in the patterns that are part of the heritage existing in the Azores. Many of these patterns can be seen by looking at sidewalks (with horizontal structure) or balconies and tiled facades of many houses (with vertical structure), and were the main focus of our attention.

This dissertation is divided into two parts. The first part explores concepts and fundamental properties that underlie the work. The emphasis is in the study of the main properties of the groups of rosettes and friezes, as they are the most common symmetry groups in the survey.

In the second part, the context of this study is given and the reader is invited to walk through many streets of the island of São Miguel, in the Azores, and to identify and classify a great variety of rosettes and friezes. It will also be shown a sequence of symmetric itineraries and other exploratory activities that can easily be used by students, teachers or other members of the community whose interest we hope to arouse throughout this work.

Keywords: Isometries of the Plane, Symmetry Groups, Rosettes, Friezes, Teaching of Mathematics, Traditional Portuguese Pavement, Portuguese Tiles, Cast Iron Balconies.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Doutor Ricardo Cunha Teixeira, expresso o meu profundo agradecimento pela orientação e apoio incondicionais que muito contribuíram para elevar os meus conhecimentos científicos e muito estimularam a minha vontade de querer fazer sempre mais e melhor. Muito obrigada pelo profissionalismo, pela amizade e pela total disponibilidade que sempre revelou para comigo. O seu apoio foi determinante na elaboração desta dissertação.

À minha orientadora, Professora Doutora Susana Goulart Costa, agradeço todo o auxílio, sugestões e apoio manifestados, que tornaram este estudo possível. Um agradecimento especial por me ter inspirado a ver com outros olhos e a valorizar o Património Cultural dos Açores, nas suas diversas vertentes.

A todos os professores e colegas da 1.^a Edição do Curso de Mestrado em Matemática para Professores agradeço o privilégio de ter frequentado este mestrado que muito contribuiu para o enriquecimento da minha formação académica e científica. Muito obrigada pela transmissão de conhecimentos e saberes tão importantes, pela partilha de ideias e amizade.

À minha família, o meu agradecimento pelos valores que me transmitiram e por todo o apoio e incentivo que sempre expressaram na minha formação.

Aos meus amigos, pelo apoio e carinho diários e pela transmissão de força, muito obrigada.

Ao Eusébio, um agradecimento especial pelo apoio, paciência e compreensão e sobretudo pela transmissão de confiança e de força, em todos os momentos.

À minha família

Índice

Resumo	iii
Abstract	v
Lista de Figuras	xx
Notação	xxi
Considerações iniciais	1
I Classificação de rosáceas e frisos	5
1 Isometrias do plano	7
1.1 Teoria de Grupos: breves considerações	7
1.2 Transformações geométricas do plano	9
1.3 Isometrias: definição e propriedades	11
1.4 Reflexões	16
1.5 Translações	21
1.6 Rotações	23
1.7 Uma isometria como produto de reflexões	30
1.8 Produto de duas reflexões	35

1.9	Classificação das isometrias que fixam pontos ou retas	45
1.10	Classificação das isometrias involutivas	46
1.11	Classificação das isometrias pares e ímpares	46
1.12	Produto de isometrias	50
1.13	Reflexões deslizantes	55
1.14	Classificação das isometrias do plano	62
2	Simetrias de uma figura plana	65
2.1	O conceito intuitivo de simetria	65
2.2	Definição matemática de simetria	70
2.3	Grupo de simetria: definição e propriedades	71
2.4	Grupo de simetria: alguns exemplos demonstrativos	72
2.5	Dos grupos de rosáceas aos grupos de padrões bidimensionais	79
3	Rosáceas	87
3.1	Consequências da definição de rosácea	87
3.2	Fluxograma para a determinação do tipo de rosácea	88
3.3	Exemplos de rosáceas	90
4	Frisos	99
4.1	Os sete grupos de frisos	99
4.2	Fluxograma para a determinação do tipo de friso	115
4.3	Exemplos de frisos	117
4.4	Para além dos frisos	126

II Identificação de rosáceas e frisos no Património Cultural dos Açores	127
5 Procedimentos metodológicos	129
5.1 A pesquisa bibliográfica	129
5.2 Os temas escolhidos	132
5.3 Recolha e organização dos dados	133
6 À descoberta de simetrias: um olhar matemático sobre calçadas, azulejos e varandas	135
6.1 Património Cultural: conceitos e omissões	136
6.2 A calçada portuguesa	137
6.3 O azulejo na arte decorativa	140
6.4 As varandas em ferro fundido	142
7 Aplicações no ensino	145
7.1 Programas e orientações curriculares	145
7.2 Explorações no 1.º Ciclo do Ensino Básico	147
7.3 Explorações no 2.º Ciclo do Ensino Básico	149
7.4 Explorações no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário	152
Considerações finais	157
Bibliografia	159
Índice Remissivo	163
Apêndices	165

Lista de Figuras

1.1	Definição de reflexão.	16
1.2	Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 1.º caso.	18
1.3	Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 2.º caso.	18
1.4	Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 3.º caso.	19
1.5	Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 4.º caso.	19
1.6	Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 5.º caso.	20
1.7	Definição de translação.	21
1.8	Figura de apoio ao Teorema 1.12.	22
1.9	Definição de rotação.	23
1.10	Definição de meia-volta.	24
1.11	Demonstração do Teorema 1.14, alínea a), 1.º caso.	25
1.12	Demonstração do Teorema 1.14, alínea a), 2.º caso.	25
1.13	Demonstração do Teorema 1.14, alínea a), caso geral.	26
1.14	Demonstração do Teorema 1.15, alínea c).	27
1.15	Demonstração do Teorema 1.15, alínea d).	28
1.16	Demonstração do Teorema 1.15, alínea e).	28
1.17	Demonstração do Teorema 1.16.	30
1.18	Demonstração do Teorema 1.21, 1.º caso.	32
1.19	Demonstração do Teorema 1.21, 2.º caso.	33

1.20	Demonstração do Teorema 1.22.	34
1.21	Demonstração do Teorema 1.22.	34
1.22	Demonstração do Teorema 1.24.	36
1.23	Demonstração do Teorema 1.26.	37
1.24	Demonstração do Teorema 1.27.	38
1.25	Demonstração do Teorema 1.28.	40
1.26	Demonstração do Teorema 1.28.	40
1.27	Demonstração do Teorema 1.29.	42
1.28	Demonstração do Teorema 1.30, 1.º caso.	43
1.29	Demonstração do Teorema 1.30, 2.º caso.	44
1.30	Demonstração do Teorema 1.30, 3.º caso.	44
1.31	Demonstração do Lema 1.34, 1.º caso.	47
1.32	Demonstração do Lema 1.34, 2.º caso.	48
1.33	Demonstração do Teorema 1.42.	52
1.34	Demonstração do Teorema 1.45, alínea a).	54
1.35	Demonstração do Teorema 1.45, alínea a).	54
1.36	Definição de reflexão deslizante.	55
1.37	Uma reflexão deslizante como o produto de três reflexões.	56
1.38	Demonstração do Teorema 1.47.	57
1.39	Demonstração do Teorema 1.48.	59
1.40	Demonstração do Teorema 1.48.	59
1.41	Demonstração do Teorema 1.50, 1.º caso.	61
1.42	Demonstração do Teorema 1.50, 2.º caso.	61
2.1	Triângulos escaleno, isósceles e equilátero.	67
2.2	Simetrias do triângulo escaleno.	67

2.3	Simetrias do triângulo isósceles.	68
2.4	Simetrias de reflexão do triângulo equilátero.	68
2.5	Simetrias de rotação não triviais do triângulo equilátero.	69
2.6	Exemplo A.	74
2.7	Exemplo B.	74
2.8	Exemplo C.	74
2.9	Exemplo D.	76
2.10	Exemplo E.	76
2.11	Exemplo F.	76
2.12	Exemplo G.	78
2.13	Simetrias do quadrado.	80
2.14	Polígono de 12 lados com grupo de simetria C_6	82
2.15	Fluxograma geral para a classificação de uma figura do plano.	86
3.1	Fluxograma para a classificação das rosáceas.	89
3.2	Grupo C_1 – Candelária (Ponta Delgada).	90
3.3	Grupo C_1 – Água Retorta (Povoação).	91
3.4	Grupo C_1 – Rotunda da Autonomia (Ponta Delgada).	91
3.5	Grupo C_1 – Mosteiros (Ponta Delgada).	92
3.6	Grupo C_2 – Largo da Igreja (Vila Franca do Campo).	92
3.7	Grupo C_2 – Pico da Pedra (Ribeira Grande).	93
3.8	Grupo C_4 – Porto Formoso (Ribeira Grande).	93
3.9	Grupo C_5 – Algarvia (Nordeste).	94
3.10	Grupo C_8 – Largo da Matriz (Ponta Delgada).	94
3.11	Grupo D_1 – Ginetes (Ponta Delgada).	95
3.12	Grupo D_2 – Largo Dr. Francisco Luís Tavares (Ponta Delgada).	95

3.13	Grupo D_3 – Rua da Criança (Povoação).	96
3.14	Grupo D_4 – Pilar da Bretanha (Ponta Delgada).	96
3.15	Grupo D_5 – Largo da Matriz (Ponta Delgada).	97
3.16	Grupo D_6 – Pilar da Bretanha (Ponta Delgada).	97
3.17	Grupo D_8 – Campo de S. Francisco (Ponta Delgada).	98
3.18	Grupo D_{11} – Matriz (Ribeira Grande).	98
4.1	Eixo central m de um friso.	100
4.2	Motivo usado na construção dos frisos.	103
4.3	Notação utilizada na descoberta dos 7 grupos de frisos.	104
4.4	Friso que admite $\langle T \rangle$ como grupo de simetria.	104
4.5	Rua Margarida de Chaves (Ponta Delgada).	104
4.6	Friso que admite $\langle T, H_A \rangle$ como grupo de simetria.	105
4.7	Rua Dr. Guilherme Poças (Ponta Delgada).	106
4.8	Friso que admite $\langle T, R_m \rangle$ como grupo de simetria.	107
4.9	Mosteiros (Ponta Delgada).	107
4.10	Friso que admite $\langle T, H_A, R_m \rangle$ como grupo de simetria.	109
4.11	Rua do Contador (Ponta Delgada).	109
4.12	Friso que admite $\langle T, R_s \rangle$ como grupo de simetria.	110
4.13	Rua Mãe de Deus (Ponta Delgada).	110
4.14	Friso que admite $\langle T, H_A, R_l \rangle$ como grupo de simetria.	112
4.15	Miradouro do Escalvado (Ponta Delgada).	112
4.16	Friso que admite $\langle \delta \rangle$ como grupo de simetria.	113
4.17	Rua Luís Soares de Sousa (Ponta Delgada).	113
4.18	Fluxograma para a classificação dos frisos.	117
4.19	Grupo F_1 – Rua Margarida de Chaves (Ponta Delgada).	118

4.20	Grupo F_1 – Ribeirinha (Ribeira Grande).	118
4.21	Grupo F_1 – Rua 1º Barão das Laranjeiras (Povoação).	118
4.22	Grupo F_1^1 – Arrifes (Ponta Delgada).	118
4.23	Grupo F_1^1 – Ginetes (Ponta Delgada).	119
4.24	Grupo F_1^1 – Mosteiros (Ponta Delgada).	119
4.25	Grupo F_1^2 – Largo da Matriz (Ponta Delgada)	119
4.26	Grupo F_1^2 – Pilar da Bretanha (Ponta Delgada).	120
4.27	Grupo F_1^2 – Porto Formoso (Ribeira Grande).	120
4.28	Grupo F_1^3 – Rua Luís Soares de Sousa (Ponta Delgada).	120
4.29	Grupo F_2 – Av. Gaspar Furtuoso (Ponta Delgada).	121
4.30	Grupo F_2 – Largo de Camões (Ponta Delgada).	121
4.31	Grupo F_2 – Rua dos Clérigos (Ponta Delgada).	121
4.32	Grupo F_2^1 – Rua Açoriano Oriental (Ponta Delgada).	121
4.33	Grupo F_2^1 – Rua de Lisboa (Ponta Delgada).	122
4.34	Grupo F_2^1 – Rua do Aljube (Ponta Delgada).	122
4.35	Grupo F_2^1 – Rua Dr. Bruno Tavares Carreiro (Ponta Delgada).	122
4.36	Grupo F_2^2 – Miradouro do Escalvado (Ponta Delgada).	122
4.37	Varanda do Coliseu Micaelense.	123
4.38	Varanda sita na Rua Mãe de Deus.	123
4.39	Varanda sita na Rua Dr. Aristides da Mota.	123
4.40	Varanda sita na Rua Dr. Gil Mont’Alverne Sequeira.	123
4.41	Varanda sita na Rua Dr. Aristides da Mota.	124
4.42	Varanda sita na Rua Margarida de Chaves.	124
4.43	Varanda sita no Largo Vasco Bensaúde.	125
4.44	Varanda sita na Rua do Perú.	125

6.1	Calceteiros executando um pavimento.	138
7.1	1.º Ciclo – Proposta 2.	148
7.2	1.º Ciclo – Proposta 3.	148
7.3	2.º Ciclo – Proposta 3.	150
7.4	2.º Ciclo – Proposta 4.	151
7.5	2.º Ciclo – Proposta 5.	152
7.6	3.º Ciclo e Secundário – Proposta 3.	154
7.7	3.º Ciclo e Secundário – Proposta 3.1.	154
7.8	3.º Ciclo e Secundário – Proposta 4.	155
7.9	3.º Ciclo e Secundário – Proposta 5.	156

Notação

Símbolo	Significado
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
$a \equiv b \pmod{n}$	a é congruente com b módulo n (o resto da divisão de a por n é igual ao resto da divisão de b por n)
\mathcal{E}	plano euclidiano (que se identifica com o plano cartesiano \mathbb{R}^2)
\mathfrak{F}	figura do plano
AB	reta que passa pelos pontos A e B
\overrightarrow{AB}	semirreta de origem A que passa por B
$[AB]$	segmento de reta de extremos A e B
$A - B - C$	B está entre A e C (B é um ponto do segmento de reta $[AC]$, diferente de A e C)
\overline{AB}	distância euclidiana entre os pontos A e B
\vec{AB}	vetor de origem em A e extremidade em B

Continua na próxima página

Símbolo	Significado
$\angle ABC$	ângulo formado pelas semirretas $\dot{B}A$ e $\dot{B}C$
$A\hat{B}C$	amplitude do ângulo $\angle ABC$
$\Delta[ABC]$	triângulo de vértices A , B e C
$[P_1P_2 \dots P_n]$	polígono de vértices P_1, P_2, \dots, P_n
$r \parallel s$	As retas r e s são paralelas
$r \perp s$	As retas r e s são perpendiculares
\cong	Congruência de ângulos, segmentos de reta ou triângulos
ι	Identidade
R_l	Reflexão de eixo l
$T_{\vec{u}}$	Translação associada ao vetor \vec{u}
$R_{O,\theta}$	Rotação de centro O e ângulo orientado θ
H_O	Meia-volta de centro O
$D_{l,\vec{u}}$	Reflexão deslizante de eixo l e vetor \vec{u}
\mathcal{T}	Grupo das transformações do plano
\mathfrak{I}	Grupo das isometrias do plano
$\text{Sim}(\mathfrak{F})$	Grupo de simetria de uma figura \mathfrak{F}

Considerações iniciais

A escolha do tema desta dissertação deveu-se, em primeiro lugar, ao crescente interesse que sentimos por um dos grandes temas da Matemática – a Geometria, em particular, pelo estudo dos grupos de simetria de figuras planas.

No Programa de Matemática do Ensino Básico [18], a Geometria surge como um dos quatro grandes temas. Atualmente estudam-se, desde o 1.º ciclo do Ensino Básico, diversas transformações geométricas, de forma intuitiva e com crescente grau de formalização. Este tópico é retomado no 2.º ciclo e aprofundado no 3.º ciclo, com o estudo das diferentes isometrias e com uma sistematização e comparação das suas propriedades. Também no Ensino Secundário, no programa de Matemática B, esta temática surge com algum destaque.

O estudo das isometrias permite desenvolver nos alunos o conceito de congruência (figuras congruentes relacionam-se entre si através de reflexões, rotações, translações ou reflexões deslizantes) e permite a exploração, construção e classificação de rosáceas, frisos e de todo o tipo de padrões bidimensionais. No âmbito deste tema, os alunos devem ser capazes de analisar padrões geométricos e desenvolver o conceito de simetria. Para tal, deve-se tomar como ponto de partida situações do quotidiano dos alunos, recorrendo, por exemplo, a azulejos e outros artefactos de cerâmica, a tapeçarias, à calçada, à pintura e ao próprio corpo humano.

O conceito de simetria constitui uma excelente oportunidade para explorar as conexões da Matemática com a vida do dia a dia e com diversas áreas, tais como a Arte e a Natureza. O estabelecimento de conexões, entre diferentes conceitos e relações matemáticas e também entre estes e situações não matemáticas, é essencial para uma aprendizagem da Matemática com compreensão e para o desenvolvimento da capacidade de a utilizar e apreciar. Em particular, sendo a Matemática a ciência dos

padrões, os alunos devem ser capazes de reconhecer a beleza das formas, regularidades e estruturas matemáticas.

Por último, mas não menos importante, a nossa demanda na identificação de padrões no Património Cultural dos Açores tem por base o Referencial Curricular para a Educação Básica na Região Autónoma dos Açores (CREB). Com o CREB [24], pretende-se promover, quando oportuno, a realização das aprendizagens prescritas pelo Currículo Nacional do Ensino Básico, de forma adaptada à realidade regional, tornando-as mais significativas. O CREB visa garantir a valorização da Açorianidade através da abordagem a conteúdos relativos a fenómenos que se manifestam nos Açores de forma peculiar.

Neste contexto, projeta-se a valorização dos suportes materiais e estéticos que definem as especificidades do Património Cultural dos Açores, onde as gentes, em diálogo com os elementos da geografia e da vulcanologia, construíram uma rede cultural que é reconhecida quer interna, quer externamente (comprovada pela existência de duas áreas reconhecidas como Património Mundial da Humanidade: Centro Histórico de Angra do Heroísmo, em 1983; Paisagem Vinícola do Pico, em 2004).

Assim, o diálogo entre espaço e cultura gizou a definição de traços patrimoniais que cristalizaram e que sobrevivem até à atualidade e que são visíveis em múltiplas manifestações do Património Cultural Material.

Neste trabalho de dissertação, propusemo-nos a criar roteiros e catálogos de simetria, partindo de padrões existentes no Património Cultural construído e estudado-os do ponto de vista matemático, algo que ainda não tinha sido feito na Região Autónoma dos Açores.

Uma das obras inspiradoras do nosso trabalho é da autoria de Washburn e Crowe [32]. Nesta obra, os autores estudam as simetrias presentes numa diversidade de artefactos representativos de diversas culturas espalhadas por todo o mundo, algo que ansiamos alcançar, mas a nível regional.

Pretendemos que a recolha de padrões no Património Cultural dos Açores constitua um contributo significativo para a elaboração de diversas atividades com aplicabilidade no ensino, em particular, no ensino da Matemática.

No que concerne à sua estrutura, esta dissertação encontra-se dividida em duas partes:

- PARTE I: *Classificação de rosáceas e frisos*;
- PARTE II: *Identificação de rosáceas e frisos no Património Cultural dos Açores*.

A Parte I é composta por quatro capítulos:

- CAPÍTULO 1: *Isometrias do plano*;
- CAPÍTULO 2: *Simetrias de uma figura plana*;
- CAPÍTULO 3: *Rosáceas*;
- CAPÍTULO 4: *Frisos*.

Por sua vez, a Parte II é constituída por três capítulos:

- CAPÍTULO 5: *Procedimentos metodológicos*;
- CAPÍTULO 6: *À descoberta de simetrias: um olhar matemático sobre calçadas, azulejos e varandas*;
- CAPÍTULO 7: *Aplicações no ensino*.

No Capítulo 1, apresentamos definições e propriedades básicas que constituem pré-requisitos para o desenvolvimento do tema foco deste trabalho. São definidos os conceitos de transformação geométrica do plano, isometria, reflexão, translação, rotação, reflexão deslizante, bem como demonstrados alguns resultados relacionados com as principais propriedades das isometrias.

No Capítulo 2, abordamos o conceito de simetria e analisamos propriedades e alguns exemplos dos grupos de simetria de rosáceas, frisos e padrões bidimensionais.

Nos Capítulos 3 e 4, retomamos, respetivamente, os conceitos de rosácea e de friso e analisamos as suas principais propriedades. Em particular, demonstramos a existência de apenas sete grupos de frisos. Nestes capítulos procedemos a uma breve análise de rosáceas e frisos através de imagens recolhidas por toda a ilha de São Miguel.

Para facilitar essa análise são ainda apresentados fluxogramas para a classificação dos mesmos. Embora não tenha sido nosso principal objeto de estudo, é feita uma breve alusão aos grupos de simetria dos padrões bidimensionais.

No Capítulo 5, damos a conhecer os procedimentos metodológicos tidos em conta para a identificação de rosáceas e frisos no Património Cultural construído dos Açores. Explicamos de forma sucinta o processo de recolha e tratamento das imagens que constituem o nosso catálogo, bem como da criação dos itinerários de simetria aqui apresentados.

No Capítulo 6, partimos à descoberta de simetrias no Património Cultural, em particular na calçada portuguesa, nos azulejos decorativos e nas varandas, fazendo uma breve contextualização histórica para cada caso. Pretendemos, ainda, justificar como áreas tão distintas como o Património e a Matemática se conjugam na perfeição.

Finalmente, o Capítulo 7, de vertente mais prática, destina-se à apresentação de propostas de integração destes conceitos nos ensinos básico e secundário. Para tal, propomos algumas atividades, tratando os temas expostos de uma forma simples e intuitiva e recorrendo aos roteiros criados, que consideramos constituírem uma boa ferramenta para ser usada, quer em contexto de sala de aula como fora dela (por exemplo, em visitas de estudo).

A principal finalidade deste trabalho é cativar os alunos e a sociedade em geral para o estudo da Matemática e, em particular, para a importância da Geometria, evidenciando o valor do Património através da sua classificação matemática.

Parte I

Classificação de rosáceas e frisos

Capítulo 1

Isometrias do plano

Neste primeiro capítulo apresentamos algumas definições e propriedades fundamentais das isometrias, pré-requisito necessário ao desenvolvimento do tema central desta dissertação.

1.1 Teoria de Grupos: breves considerações

Seja G um conjunto e $*$: $G \times G \rightarrow G$ uma operação binária definida em G . Diz-se que o par $(G, *)$ é um *grupo* quando:

1) $*$ é associativa:

$$\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z);$$

2) Existe em G um elemento neutro para $*$:

$$\exists u \in G : \forall x \in G, x * u = u * x = x;$$

3) Para cada $x \in G$, existe em G um elemento oposto:

$$\forall x \in G, \exists x' \in G : x * x' = x' * x = u.$$

Se G é um conjunto finito, diz-se que $(G, *)$ é um *grupo finito*. Caso contrário, o grupo diz-se *infinito*. A *ordem* de um grupo finito $(G, *)$ é o cardinal do conjunto G .

Dois grupos $(G, *)$ e (L, Δ) dizem-se *isomorfos* se existe uma função bijetiva $f: G \rightarrow L$, tal que $f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$, para todos os elementos x, y de G . A função f diz-se um *isomorfismo*.

Um grupo $(G, *)$ é *comutativo* (ou *abeliano*) quando satisfaz a seguinte propriedade adicional:

4) $*$ é comutativa:

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x.$$

Em geral, adota-se a notação multiplicativa, representando $x * y$ simplesmente por xy e o oposto de x por x^{-1} .

Seja $G' \neq \emptyset$ um subconjunto de G . Diz-se que G' é um *subgrupo* de G quando:

- (i) $\forall x, y \in G, x, y \in G' \Rightarrow xy \in G'$;
- (ii) $\forall x \in G, x \in G' \Rightarrow x^{-1} \in G'$.

Escreve-se, neste caso, $G' \leq G$. Segue-se uma propriedade importante.

Teorema 1.1. *Sejam H_i , com $i \in I$, subgrupos de um grupo G . Então, $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ é ainda um subgrupo de G .*

Seja X um subconjunto qualquer de um grupo G . Consideremos o conjunto de todos os subgrupos de G , G_j , com $j \in J$, que contêm o conjunto X . Existem sempre subgrupos nessas condições (pelo menos o grupo G , encarado como seu subgrupo). Seja $\langle X \rangle = \bigcap_{j \in J} G_j$. Este conjunto $\langle X \rangle$, que acabamos de construir, satisfaz propriedades interessantes, que se resumem no próximo teorema.

Teorema 1.2. *Para qualquer subconjunto X de um grupo G , o conjunto $\langle X \rangle$ verifica as seguintes propriedades:*

- a) $\langle X \rangle$ é um subgrupo de G ;
- b) $X \subseteq \langle X \rangle$;
- c) $\langle X \rangle$ é o menor subgrupo de G que satisfaz a condição da alínea b), no seguinte sentido: se se tem $X \subseteq H \leq G$, então $\langle X \rangle \subseteq H$.

Diz-se que $\langle X \rangle$ é o *subgrupo gerado* por X . Um grupo G diz-se *cíclico* quando existe um elemento $a \in G$ tal que $G = \langle a \rangle$.

Para um estudo mais aprofundado, incluindo a análise das demonstrações dos teoremas aqui apresentados, aconselhamos a consulta de [19].

1.2 Transformações geométricas do plano

Por uma questão de simplificação, identificamos o plano euclidiano \mathcal{E} com o plano cartesiano \mathbb{R}^2 , através da função que a cada ponto P do plano faz corresponder o par constituído pelas suas coordenadas (x, y) . Estabelece-se, assim, uma ponte entre a Geometria Euclidiana Sintética (em que se trabalha diretamente com as figuras sem o auxílio de coordenadas) e a Geometria Analítica em \mathbb{R}^2 (em que cada ponto é definido pelas suas coordenadas e as figuras são caracterizadas por relações entre essas coordenadas).

Uma *transformação geométrica* do plano, ou simplesmente *transformação* do plano, é toda a função γ que associa a cada ponto P de \mathbb{R}^2 um e um só ponto P' de \mathbb{R}^2 – escreve-se $P' = \gamma(P)$ – de acordo com as seguintes condições:

- a) a função é injetiva, ou seja, para quaisquer pontos P e Q de \mathbb{R}^2 , se $\gamma(P) = \gamma(Q)$ então $P = Q$;
- b) a função é sobrejetiva, ou seja, para qualquer ponto N de \mathbb{R}^2 , existe um ponto M de \mathbb{R}^2 tal que $N = \gamma(M)$.

Das duas condições a) e b), conclui-se que uma transformação γ é uma bijeção do plano \mathbb{R}^2 .

O ponto $P' = \gamma(P)$ designa-se *imagem* ou *transformado* de P por meio de γ .

Uma *figura* \mathfrak{F} do plano \mathbb{R}^2 não é mais do que um conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 . A *imagem* ou *transformada* de \mathfrak{F} é por definição a figura \mathfrak{F}' formada pelas imagens dos pontos de \mathfrak{F} pela função γ . Escreve-se $\mathfrak{F}' = \gamma(\mathfrak{F})$.

Dada uma transformação geométrica γ , se um ponto P é transformado em si próprio, isto é se $\gamma(P) = P$, diz-se que o ponto P é um *ponto fixo* da transformação γ ou que γ *fixa* P .

Designa-se por *identidade*, e representa-se por ι , a transformação geométrica que faz corresponder a cada ponto do plano o próprio ponto. Assim, qualquer que seja o ponto P , $\iota(P) = P$. Todos os pontos do plano são fixos pela transformação identidade.

Em resumo, diz-se que a transformação geométrica $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

- a) *fixa um ponto* P se $\gamma(P) = P$;
- b) *fixa (globalmente) uma figura* $\mathfrak{F} \subseteq \mathbb{R}^2$ se $\gamma(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$;
- c) *fixa pontualmente uma figura* $\mathfrak{F} \subseteq \mathbb{R}^2$ se $\forall_{P \in \mathfrak{F}}, \gamma(P) = P$.

A *composição* ou o *produto* das transformações geométricas α e β , $\alpha \circ \beta$, é definida pela aplicação da transformação β seguida de α . Para qualquer ponto P , tem-se $\alpha \circ \beta(P) = \alpha(\beta(P))$. Por uma questão de simplificação, por vezes representaremos $\alpha \circ \beta$ por $\alpha\beta$.

Teorema 1.3. *A composição $\alpha \circ \beta$ das transformações geométricas α e β é ainda uma transformação geométrica.*

Demonstração. Sejam α e β duas transformações geométricas. Sendo α uma transformação geométrica, para qualquer ponto P , existe um ponto Q , tal que $\alpha(Q) = P$. Como β também é uma transformação geométrica, existe R tal que $\beta(R) = Q$. Logo, $P = \alpha(Q) = \alpha(\beta(R)) = \alpha \circ \beta(R)$. Mostramos, assim, que para qualquer ponto P , existe um ponto R de \mathbb{R}^2 , tal que $\alpha \circ \beta(R) = P$.

Suponhamos agora que $\alpha \circ \beta(A) = \alpha \circ \beta(B)$. Como $\alpha(\beta(A)) = \alpha(\beta(B))$, e α é uma transformação geométrica, temos que $\beta(A) = \beta(B)$, donde sai que $A = B$, pois β também é uma transformação geométrica. Concluimos que se $\alpha \circ \beta(A) = \alpha \circ \beta(B)$, então $A = B$ e, portanto, $\alpha \circ \beta$ é uma transformação geométrica. \square

Seja α uma transformação geométrica qualquer. É imediato constatar que a função que a cada ponto P de \mathbb{R}^2 associa um ponto Q de \mathbb{R}^2 tal que $\alpha(Q) = P$ também é uma transformação geométrica, que se designa por *transformação inversa* de α e se representa por α^{-1} . Por outras palavras,

$$\alpha^{-1}(P) = Q \quad \text{se e somente se} \quad \alpha(Q) = P.$$

Represente-se o conjunto de todas as transformações geométricas do plano por \mathcal{T} . Uma vez que a composição de funções é associativa e que

- a) a identidade ι pertence a \mathcal{T} ;
- b) se α e β pertencem a \mathcal{T} , a composição $\alpha \circ \beta$ pertence a \mathcal{T} ;
- c) se α pertence a \mathcal{T} , também α^{-1} pertence a \mathcal{T} ,

a operação composição confere a \mathcal{T} uma estrutura de grupo, dito *grupo das transformações* do plano.

Terminamos esta secção com algumas propriedades adicionais.

Teorema 1.4. *Sejam α , β e γ transformações geométricas e ι a identidade. Verificam-se as seguintes propriedades:*

- a) *Se $\beta\alpha = \gamma\alpha$ então $\beta = \gamma$;*
- b) *Se $\alpha\beta = \alpha\gamma$ então $\beta = \gamma$;*
- c) *Se $\beta\alpha = \alpha$ então $\beta = \iota$;*
- d) *Se $\beta\alpha = \beta$ então $\alpha = \iota$;*
- e) *Se $\beta\alpha = \iota$ então $\beta = \alpha^{-1}$ (e $\alpha = \beta^{-1}$);*
- f) *Tem-se $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$.*

Demonstração. A demonstração é consequência de as transformações geométricas α , β e γ serem elementos do grupo das transformações do plano \mathcal{T} , onde são válidas as propriedades do enunciado. □

1.3 Isometrias: definição e propriedades

Uma *isometria* do plano, do grego “igualdade de medida”, é uma transformação que preserva a distância entre quaisquer dois pontos do plano. Assim a transformação φ é uma isometria se e somente se

$$\overline{PQ} = \overline{\varphi(P)\varphi(Q)}, \text{ para quaisquer pontos } P \text{ e } Q \text{ do plano.}$$

Para o próximo teorema necessitamos da seguinte definição.

Afirmar que um ponto B está entre os pontos A e C significa que B é um ponto do segmento de reta $[AC]$, diferente de A e C , e escreve-se $A - B - C$. De acordo com a conhecida desigualdade triangular, num triângulo o comprimento de um lado é estritamente inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, sendo que a igualdade só é possível se o triângulo degenerar num segmento de reta, de forma a que os seus vértices passem a ser pontos colineares [2]. Assim, verifica-se sem dificuldade que $A - B - C$ se e só se $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Teorema 1.5. *Se φ é uma isometria e se B está entre A e C , então $\varphi(B)$ está entre $\varphi(A)$ e $\varphi(C)$.*

Demonstração. Sejam A , B e C três pontos do plano. Considere-se $A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ e $C' = \varphi(C)$. Por hipótese, B está entre A e C . Logo

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Como φ é uma isometria (preserva distâncias) temos que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ e $\overline{AC} = \overline{A'C'}$.

Assim, podemos concluir que $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$, ou seja, que B' está entre A' e C' ($\varphi(B)$ está entre $\varphi(A)$ e $\varphi(C)$). \square

Teorema 1.6. *Uma isometria φ preserva pontos médios, a colinearidade de pontos e a amplitude de ângulos e transforma retas em retas, semirretas em semirretas, segmentos de reta em segmentos de reta congruentes, triângulos em triângulos congruentes e retas paralelas (respetivamente, perpendiculares) em retas paralelas (respetivamente, perpendiculares).*

Demonstração. Considere-se φ uma isometria do plano. Sejam A , B e C três pontos. Faça-se $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ e $\varphi(C) = C'$. Recorrendo ao Teorema 1.5, considere-se o caso particular em que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Como φ é uma isometria, temos $\overline{A'B'} = \overline{B'C'}$. Deste modo, se B é o ponto médio do segmento de reta $[AC]$, então B' é o ponto médio de $[A'C']$ e concluímos assim que φ preserva pontos médios. Suponhamos agora que A , B e C são três pontos não colineares. Pela desigualdade triangular, sabemos que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$, o que implica que $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} > \overline{A'C'}$. Logo A' , B' e C' são três pontos não colineares. Concluímos, desta forma, que φ preserva também a colinearidade de pontos. Uma vez que o segmento de reta $[AB]$ é o conjunto formado

pelos pontos A, B e por todos os pontos que estão entre A e B , então, como φ preserva a relação “entre”, $\varphi([AB])$ é o conjunto formado pelos pontos A', B' e por todos os pontos que estão entre A' e B' . Assim, $\varphi([AB]) = [A'B']$, o que nos permite concluir que φ transforma segmentos de reta em segmentos de reta congruentes. Por definição, $\overset{\cdot}{A}B$ é a semirreta que resulta da reunião de $[AB]$ com todos os pontos C de modo que A, B e C sejam colineares e B esteja entre A e C . Então, como φ preserva segmentos de reta e $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, tem-se $\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'}$. Ora, $\varphi(\overset{\cdot}{A}B)$ resulta da reunião de $[A'B']$ com todos os pontos C' de modo que A', B' e C' sejam colineares e B' esteja entre A' e C' . Temos então que $\varphi(\overset{\cdot}{A}B) = \overset{\cdot}{A'}B'$, ou seja φ transforma semirretas em semirretas. De modo análogo, sendo AB a reunião de $\overset{\cdot}{A}B$ com $\overset{\cdot}{B}A$ e como φ preserva semirretas então $\varphi(AB)$ é a reunião de $\overset{\cdot}{A'}B'$ com $\overset{\cdot}{B'}A'$, ou seja, é igual a $A'B'$. Concluimos assim que a isometria φ transforma retas em retas. Sendo $\Delta[ABC]$ definido pela reunião dos segmentos de reta $[AB]$, $[BC]$ e $[CA]$, e como φ preserva segmentos de reta, então $\varphi(\Delta[ABC])$ fica caracterizado pela reunião dos segmentos de reta $[A'B']$, $[B'C']$ e $[C'A']$, ou seja, $\varphi(\Delta[ABC]) = \Delta[A'B'C']$. Logo, φ transforma triângulos em triângulos congruentes. Como os triângulos $\Delta[ABC]$ e $\Delta[A'B'C']$ são congruentes, também o são os ângulos correspondentes, $\angle ABC$ e $\angle A'B'C'$, em que $\angle A'B'C'$ representa a imagem de $\angle ABC$ por φ . Como consequência, estes ângulos têm a mesma amplitude, isto é, $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = \hat{A}'\hat{B}'\hat{C}'$. Assim, concluimos que φ preserva a amplitude dos ângulos. Se $\overset{\cdot}{A}B \perp \overset{\cdot}{B}C$, então $\overset{\cdot}{A'}B' \perp \overset{\cdot}{B'}C'$, uma vez que se $\hat{A}\hat{B}\hat{C} = 90^\circ$ então $\hat{A}'\hat{B}'\hat{C}' = 90^\circ$. Deste modo concluimos que φ preserva a perpendicularidade. Por fim, se considerarmos duas retas paralelas e uma terceira reta perpendicular a ambas, sabemos que φ preserva a perpendicularidade da terceira reta com as duas primeiras, o que tem como consequência preservar o paralelismo das duas primeiras. \square

Teorema 1.7. *O conjunto das isometrias do plano verifica as seguintes propriedades:*

- a) *O produto de duas isometrias é ainda uma isometria;*
- b) *Para α, β e γ isometrias, tem-se $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) = (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ (associatividade);*
- c) *A identidade ι é uma isometria;*
- d) *A inversa de uma isometria é ainda uma isometria.*

Demonstração. a) Sejam α, β duas isometrias e A, B dois pontos quaisquer do plano. A distância entre $\alpha(A)$ e $\alpha(B)$ é igual à distância entre A e B , pois α é uma isometria. Mas como β também é uma isometria, a distância entre as imagens de $\alpha(A)$ e $\alpha(B)$, por meio de β , mantém-se novamente constante.

b) A composição de funções verifica a propriedade associativa, em particular esta propriedade é válida para a composição ou produto de isometrias.

c) A transformação *identidade* ι é obviamente uma isometria, dado que fixa todos os pontos do plano.

d) Seja α uma isometria e sejam A, B dois pontos quaisquer do plano. Considere-se α^{-1} a transformação inversa de α . Provemos que α^{-1} também é uma isometria, ou seja, que $\overline{\alpha^{-1}(A)\alpha^{-1}(B)} = \overline{AB}$. Como α é uma isometria, em particular uma transformação geométrica, existem A', B' tais que: $\alpha(A') = A$ e $\alpha(B') = B$. Logo,

$$\overline{\alpha^{-1}(A)\alpha^{-1}(B)} = \overline{\alpha^{-1}(\alpha(A'))\alpha^{-1}(\alpha(B'))} = \overline{A'B'}.$$

Como α é uma isometria e, portanto, preserva distâncias, segue-se o pretendido: $\overline{A'B'} = \overline{\alpha(A')\alpha(B')} = \overline{AB}$.

□

O teorema anterior permite-nos afirmar que o subconjunto \mathfrak{I} do conjunto das transformações geométricas constituído por todas as isometrias do plano, munido da composição de funções, é um grupo: o *grupo das isometrias do plano*.

Para demonstrar o próximo resultado necessitamos do Axioma de Pasch [2].

Lema 1.8 (Axioma de Pasch). *Se uma reta l intersectar o triângulo $\triangle[ABC]$ num ponto D entre A e B , então l intersecta o triângulo num outro ponto, E , distinto de D .*

Teorema 1.9. *Se uma isometria φ fixa dois pontos (distintos) de uma reta r , então φ fixa pontualmente r . Se uma isometria φ fixa três pontos não colineares, então $\varphi = \iota$.*

Demonstração. Considere-se uma isometria φ que fixa os pontos A e B e seja P um ponto qualquer pertencente à reta AB , diferente de A e de B . Conhecendo \overline{AP} ,

existem duas possibilidades para a localização do ponto P , mas se conhecermos ainda \overline{BP} , então esse ponto é determinado de modo único. Como a isometria φ fixa os pontos A e B ,

$$\varphi(A) = A \quad \text{e} \quad \varphi(B) = B.$$

Sendo uma isometria, φ preserva distâncias, logo, como A e B são pontos fixos, φ fixa todos os pontos P tais que A , B e P sejam colineares. Tem-se, então, que φ fixa pontualmente a reta AB . Logo, se uma isometria fixa dois pontos distintos de uma reta, então fixa pontualmente essa reta.

Suponhamos, agora, que a isometria φ fixa os pontos A , B e C não colineares. Então pelo Teorema 1.6 e pelo resultado acabado de provar, a isometria fixa qualquer ponto do triângulo $\triangle[ABC]$, uma vez que fixa pontualmente AB , BC e AC . Seja P um ponto qualquer do plano euclidiano. Considere-se, por exemplo, a reta que passa pelo ponto P e por M , ponto médio de $[AB]$. De acordo com o axioma de Pasch, esta reta passa ainda por outro ponto do triângulo $\triangle[ABC]$, digamos Q . Como M e Q são pontos fixos por φ , e P pertence à reta MQ , podemos concluir, pelo resultado acabado de provar, que P é fixo por φ . Portanto, esta transformação fixa todos os pontos do plano, ou seja, $\varphi = \iota$. \square

Corolário 1.10. *Se α e β são duas isometrias tais que $\alpha(A) = \beta(A)$, $\alpha(B) = \beta(B)$, $\alpha(C) = \beta(C)$, com A , B e C pontos não colineares, então $\alpha = \beta$.*

Demonstração. Sejam α e β duas isometrias, tais que $\alpha(A) = \beta(A)$, $\alpha(B) = \beta(B)$ e $\alpha(C) = \beta(C)$, com A , B e C pontos não colineares. Ora,

$$\begin{aligned} \beta^{-1}\alpha(A) &= \beta^{-1}\beta(A) = \iota(A) = A \\ \beta^{-1}\alpha(B) &= \beta^{-1}\beta(B) = \iota(B) = B \\ \beta^{-1}\alpha(C) &= \beta^{-1}\beta(C) = \iota(C) = C \end{aligned}$$

Temos então que a isometria $\beta^{-1}\alpha$ fixa três pontos não colineares e pelo Teorema 1.9 concluímos que $\beta^{-1}\alpha = \iota$. Multiplicando ambos os membros por β à esquerda, obtemos $\alpha = \beta$. \square

São isometrias do plano a *reflexão*, a *translação*, a *rotação* e a *reflexão deslizante*. De seguida, definem-se e apresentam-se propriedades essenciais destas isometrias.

1.4 Reflexões

Dada uma reta l , chamamos *reflexão* de eixo l à transformação geométrica que ao ponto P faz corresponder o ponto P' , de tal forma que l é a mediatriz do segmento de reta $[PP']$.

Assim, a reflexão de eixo l é a função $R_l : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que a cada ponto P do plano faz corresponder o ponto $R_l(P)$ tal que:

$$R_l(P) = \begin{cases} P & \text{se } P \text{ pertence a } l \\ P' & \text{se } P \text{ não pertence a } l \end{cases},$$

onde l é a mediatriz de $[PP']$.

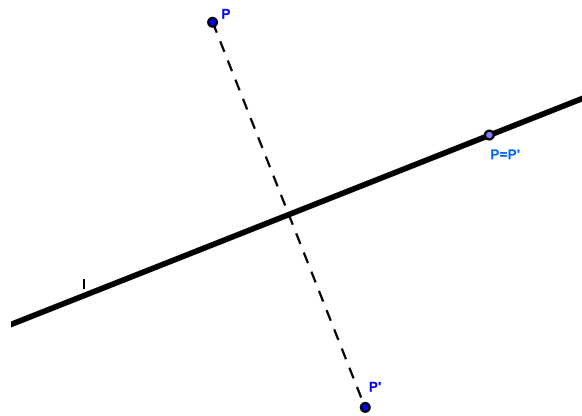


Figura 1.1: Definição de reflexão.

Uma transformação *involutiva*, ou *involução*, é uma transformação geométrica $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, diferente da identidade ι , que tem ordem 2, isto é, $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi = \iota$. Ou seja, para quaisquer dois pontos distintos P e Q tais que $\varphi(P) = Q$, tem-se $P = \varphi^2(P) = \varphi(\varphi(P)) = \varphi(Q)$, dizendo-se, portanto, que φ permuta P e Q .

Teorema 1.11. *A reflexão R_l satisfaz as seguintes propriedades:*

- a) *é uma transformação involutiva;*
- b) *fixa pontualmente r se $r = l$;*
- c) *fixa r se $r = l$ ou $r \perp l$;*

d) *permuta os semiplanos limitados por l ;*

e) *é uma isometria.*

Demonstração. a) Demonstremos que R_l é uma transformação involutiva, ou seja, que $R_l^2 = \iota$ e $R_l \neq \iota$. A reta l é, por definição, a mediatriz do segmento $[PQ]$ com $R_l(P) = Q$. Aplicando a reflexão R_l ao ponto Q , vem $P = R_l(Q) = R_l(R_l(P))$. Por outro lado, se para dois pontos P e Q tivermos $R_l(Q) = R_l(P)$, então $Q = R_l(R_l(Q)) = R_l(R_l(P)) = P$, ou seja, $Q = P$ e R_l é involutiva.

b) Por definição temos que R_l fixa um ponto P se e só se P pertence à reta l . Então R_l fixa pontualmente l .

c) Já vimos na alínea anterior que R_l fixa pontualmente r se $r = l$. Suponhamos, agora, que a reta r , diferente de l , é fixa por R_l . Consideremos $R_l(P) = Q$ para um ponto P pertencente à reta r e não a l . Então os pontos P e Q pertencem a r , uma vez que se supôs que R_l fixa r . Por outro lado, l é a mediatriz do segmento $[PQ]$, logo é perpendicular a r .

d) A demonstração é imediata tendo em conta a definição de reflexão.

e) Mostremos que a reflexão R_l é uma isometria, ou seja, para P e Q pontos distintos do plano e $P' = R_l(P)$, $Q' = R_l(Q)$, deve verificar-se $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.

1.º caso Seja $PQ = l$ ou $PQ \perp l$

Se $PQ = l$, provou-se em b) que R_l fixa pontualmente PQ , pelo que $P = P'$ e $Q = Q'$. Logo, $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.

Seja, agora, $PQ \perp l$, com A ponto de intersecção de PQ e l . Da definição de reflexão, segue-se que $\overline{PA} = \overline{P'A}$ e $\overline{QA} = \overline{Q'A}$. Se P e Q pertencem ao mesmo semi-plano, então tem-se $\overline{P'Q'} = |\overline{P'A} - \overline{Q'A}| = |\overline{PA} - \overline{QA}| = \overline{PQ}$ (Figura 1.2), em que $|\overline{P'A} - \overline{Q'A}|$ e $|\overline{PA} - \overline{QA}|$ representam, respetivamente, o valor absoluto de $\overline{P'A} - \overline{Q'A}$ e de $\overline{PA} - \overline{QA}$. Falta verificar o que sucede quando P e Q não pertencem ao mesmo semi-plano. Nesta situação, vem $\overline{P'Q'} = \overline{P'A} + \overline{AQ'} = \overline{PA} + \overline{AQ} = \overline{PQ}$ (Figura 1.2). Logo, para $PQ = l$ ou $PQ \perp l$ temos $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$.

2.º caso Se $PQ \parallel l$, com $PQ \neq l$, pela definição de reflexão verificamos que o quadrilátero $[QPP'Q']$ é um retângulo. Assim, $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ (Figura 1.3).

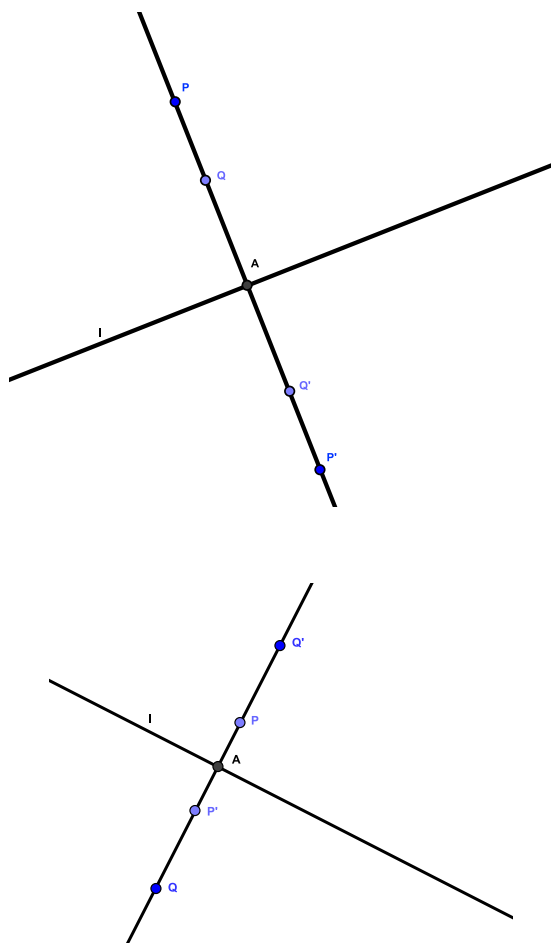


Figura 1.2: Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 1.º caso.

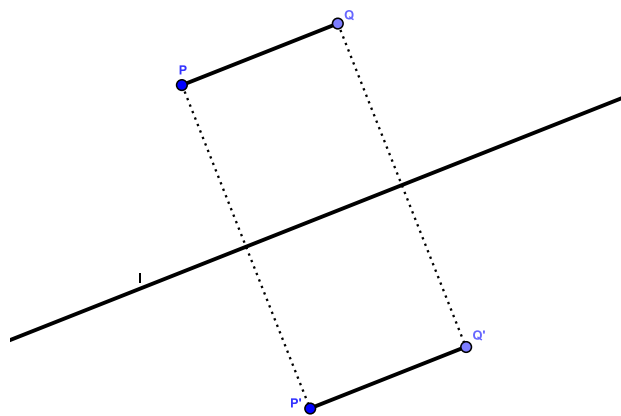


Figura 1.3: Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 2.º caso.

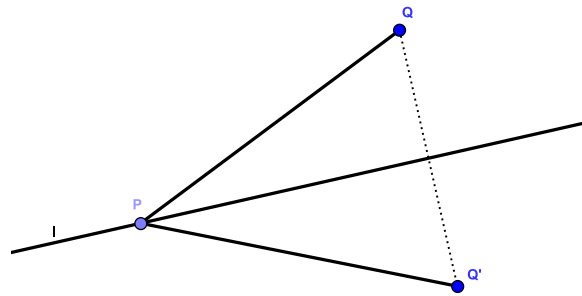


Figura 1.4: Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 3.º caso.

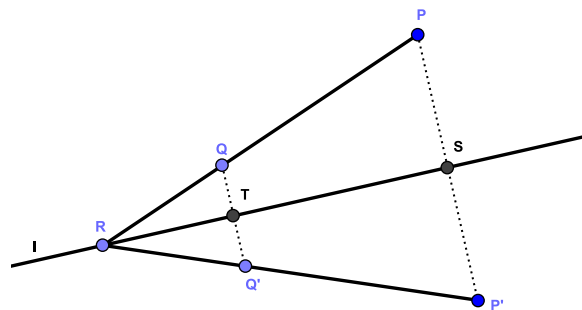


Figura 1.5: Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 4.º caso.

3.º caso Suponhamos que um dos pontos P ou Q , por exemplo P , pertence à reta l . Nestas condições, $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ resulta de $P' = P$ e do facto de l ser a mediatriz do segmento $[QQ']$, ou seja, o lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de Q e Q' (Figura 1.4). Note-se que os dois triângulos da figura são congruentes.

4.º caso Suponhamos, agora, que P e Q não pertencem a l e que estão no mesmo semi-plano definido por l , em que PQ é uma reta que não é perpendicular nem paralela a l . Consideremos o ponto R que resulta da intersecção de PQ com l . Então, pelo caso anterior, $\overline{RP} = \overline{RP'}$ e $\overline{RQ} = \overline{RQ'}$ e, como R, Q e P são colineares, assim como R, Q' e P' , resulta $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ (Figura 1.5).

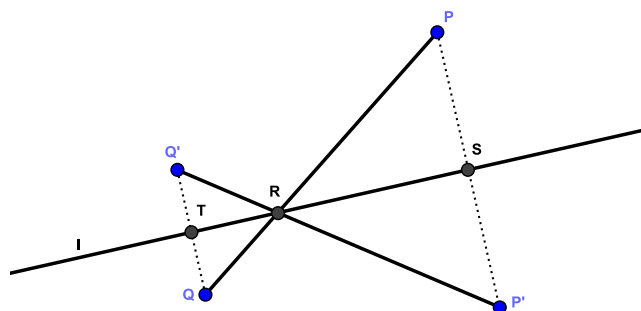


Figura 1.6: Demonstração do Teorema 1.11, alínea e), 5.º caso.

5.º caso Suponhamos, finalmente, que os pontos P e Q estão localizados um em cada um dos semiplanos definidos por l , em que PQ não é perpendicular nem paralela a l , e R , tal como anteriormente, é o ponto da intersecção de PQ com l . Seja S o ponto médio de $[PP']$ e T o ponto médio de $[QQ']$. Logo, $ST \perp l$. Como, em triângulos congruentes, a segmentos congruentes opõem-se ângulos congruentes, tem-se $\angle SRP \cong \angle P'RS$ e $\angle TRQ \cong \angle Q'RT$. Além disso, $\angle SRP \cong \angle TRQ$, porque R, P e Q são colineares e ângulos verticalmente opostos são congruentes. Daqui concluímos que $\angle P'RS \cong \angle Q'RT$, e portanto R, P' e Q' são colineares. Consequentemente,

$$\overline{P'R} = \overline{PR} \quad \text{e} \quad \overline{QR} = \overline{Q'R},$$

o que implica que $\overline{P'Q'} = \overline{PQ}$ (Figura 1.6).

Provamos, desta forma, que a reflexão R_l preserva distâncias e, portanto, é uma isometria.

□

Observe-se que o conjunto das reflexões do plano não é um grupo uma vez que a propriedade de fecho não se verifica (isto porque o produto de duas reflexões não é uma reflexão, como verificaremos no Teorema 1.30), nem tão pouco a identidade é uma reflexão.

1.5 Translações

Chamamos *translação* associada ao vetor \vec{u} à transformação, $T_{\vec{u}}$, que a cada ponto $P = (x, y)$ do plano associa o ponto $Q = (x', y')$ tal que $\overrightarrow{PQ} = \vec{u}$. Por outras palavras,

$$T_{\vec{u}}(P) = Q \quad \text{se e somente se} \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{u}.$$

Analiticamente, tem-se:

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}, \text{ em que } \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (a, b).$$

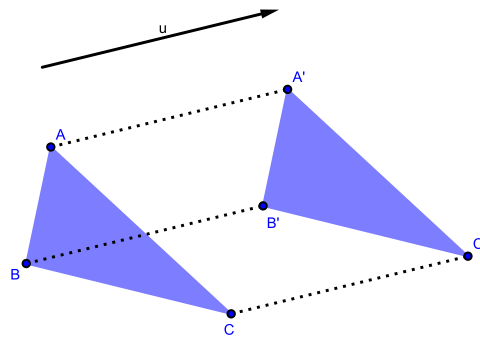


Figura 1.7: Definição de translação.

Admitimos que são do conhecimento do leitor resultados elementares no âmbito da congruência de triângulos e do paralelismo [2, 4].

Teorema 1.12. *Se A, B e C são pontos não colineares do plano, então $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$ se e só se $[CABD]$ é um paralelogramo.*

Demonstração. Provemos, em primeiro lugar, que se $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$ então $[CABD]$ é um paralelogramo. Tem-se

$$T_{\overrightarrow{AB}}(C) = T_{\overrightarrow{CD}}(C) = D,$$

pelo que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Em particular, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $AB \parallel CD$. Se considerarmos o segmento de reta $[BC]$, obtemos dois triângulos, $\triangle ABC$ e $\triangle BDC$, que são congruentes (pelo conhecido critério LAL). Por conseguinte, $\overline{AC} = \overline{BD}$. Como em triângulos



Figura 1.8: Figura de apoio ao Teorema 1.12.

congruentes, a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes, conclui-se facilmente que $AC \parallel BD$.

Provemos agora que se $[CABD]$ é um paralelogramo então $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$. Consideremos o paralelogramo $[CABD]$. Temos que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $AB \parallel CD$, ou seja, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, donde $T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{CD}}$. \square

Teorema 1.13. *São válidas as seguintes propriedades:*

- a) *Uma translação é uma transformação do plano que preserva distâncias sendo, portanto, uma isometria;*
- b) *Uma translação $T_{\overrightarrow{AB}}$, com $A \neq B$, transforma uma reta r noutra reta paralela a r . Além disso, $T_{\overrightarrow{AB}}$ não fixa ponto algum, mas fixa exatamente todas as retas paralelas a AB ;*
- c) *A inversa da translação $T_{\vec{u}}$, associada ao vetor \vec{u} , é a translação $T_{-\vec{u}}$, associada ao vetor $-\vec{u}$;*
- d) *O produto de duas translações $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$, associadas aos vetores \vec{u} e \vec{v} , respectivamente, é a translação $T_{\vec{u}+\vec{v}}$, associada ao vetor $\vec{u} + \vec{v}$. O produto de translações é, por isso, comutativo.*

Demonstração. a) Seja $T_{\vec{u}}$ a translação associada ao vetor \vec{u} . Considerem-se dois pontos distintos do plano, A e B . Seja r a reta definida por estes dois pontos. Se a reta r tem a direção do vetor \vec{u} , então $A' = T_{\vec{u}}(A)$ e $B' = T_{\vec{u}}(B)$ também são pontos da reta r , pelo que é imediato constatar que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Se a reta r não tem a direção do vetor \vec{u} , então os pontos A , B e A' não são colineares.

Aplicando o teorema anterior, conclui-se que $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, pelo que $T_{\vec{u}}$ é uma isometria.

b) Seja $T_{\vec{u}}$ a translação associada ao vetor \vec{u} . Seja r uma reta do plano. Considerem-se dois pontos distintos da reta r , A e B . Se a reta r tem a direção do vetor \vec{u} , então $A' = T_{\vec{u}}(A)$ e $B' = T_{\vec{u}}(B)$ também são pontos da reta r , pelo que a reta definida por A' e B' coincide com r . Se a reta r não tem a direção do vetor \vec{u} , então os pontos A , B e A' não são colineares. Aplicando o teorema anterior, conclui-se que a reta r , definida por A e B , é paralela à reta definida pelos pontos A' e B' .

c) e d) Demonstração imediata.

□

Note-se também que se $A = B$, então $T_{\vec{AB}} = \iota$. Conclui-se, portanto, que o conjunto das translações do plano, munido da composição de funções, é um grupo abeliano designado por *grupo das translações do plano*.

1.6 Rotações

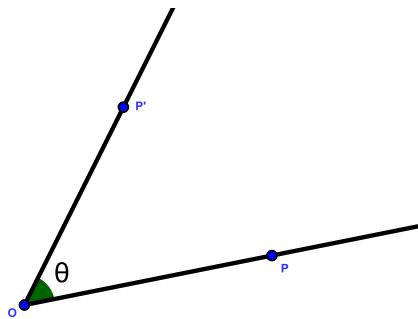


Figura 1.9: Definição de rotação.

Chama-se *rotação* de centro O e ângulo orientado θ à transformação geométrica, $R_{O,\theta}$, que fixa O , isto é $R_{O,\theta}(O) = O$, e transforma cada ponto P , distinto de O , no ponto P' , de tal modo que $P' = R_{O,\theta}(P)$ está situado na circunferência de centro O

e raio \overline{OP} , tal que a medida de amplitude do ângulo orientado $\angle POP'$, que tem por lado-origem a semirreta \dot{OP} e lado-extremidade a semirreta \dot{OP}' , coincide com θ .

Usaremos indistintamente as designações *rotação de ângulo orientado* θ e *rotação de amplitude* θ .

Chama-se *meia-volta* de centro O à rotação de centro O e amplitude 180° . A meia-volta de centro O representa-se por H_O , isto é, $H_O = R_{O,180^\circ}$.

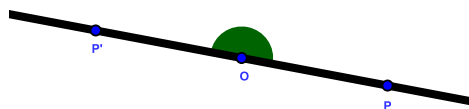


Figura 1.10: Definição de meia-volta.

Vejam algumas propriedades das rotações.

Teorema 1.14. a) Uma rotação é uma transformação do plano que preserva distâncias sendo, portanto, uma isometria;

b) Uma rotação diferente da identidade fixa circunferências com centro no seu centro de rotação, embora não pontualmente;

c) A inversa da rotação de centro O e amplitude θ é a rotação com o mesmo centro e amplitude $-\theta$, $(R_{O,\theta})^{-1} = R_{O,-\theta}$;

d) O produto de duas rotações de centro O e amplitudes α e β é a rotação de centro O e amplitude $\alpha + \beta$, independentemente da ordem de composição:

$$R_{O,\beta} \circ R_{O,\alpha} = R_{O,\alpha} \circ R_{O,\beta} = R_{O,\alpha+\beta}.$$

Demonstração. a) Consideremos a rotação de centro O e amplitude θ , $R_{O,\theta}$. Sejam P e Q pontos do plano e sejam P' e Q' os seus transformados por $R_{O,\theta}$, respetivamente. Por definição $\overline{PO} = \overline{P'O}$ e $\overline{QO} = \overline{Q'O}$. Se O , P e Q são colineares, podemos considerar dois casos distintos.

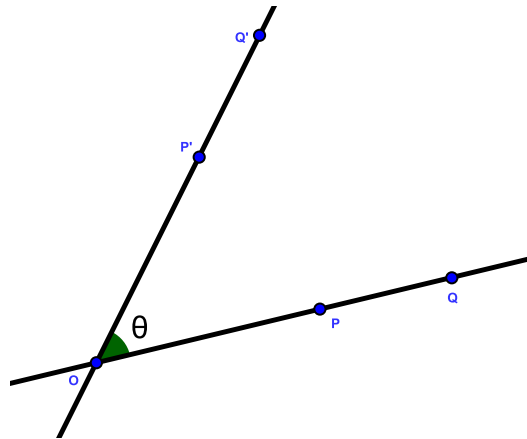


Figura 1.11: Demonstração do Teorema 1.14, alínea a), 1.º caso.

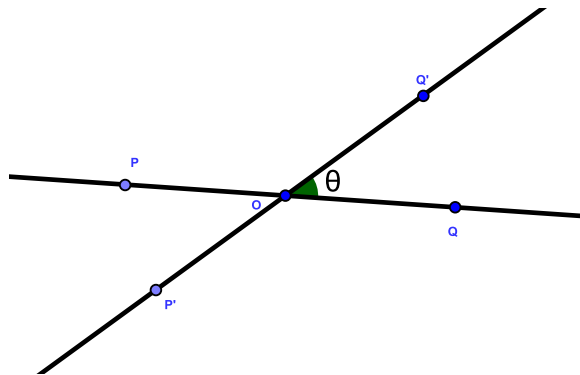


Figura 1.12: Demonstração do Teorema 1.14, alínea a), 2.º caso.

1.º caso Sejam O , P e Q pontos colineares do plano, tais que $O - P - Q$ ou $O - Q - P$. Tem-se $\overline{PQ} = |\overline{QO} - \overline{PO}| = |\overline{Q'O} - \overline{P'O}| = \overline{Q'P'}$ (Figura 1.11).

2.º caso Sejam O , P e Q pontos colineares do plano, tais que $P - O - Q$. Tem-se $\overline{PQ} = \overline{PO} + \overline{OQ} = \overline{P'O} + \overline{OQ'} = \overline{P'Q'}$ (Figura 1.12).

Por outro lado, se O , P e Q não são colineares, então $\triangle[OPQ] \cong \triangle[OP'Q']$ pelo critério *LAL* e, portanto, $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$. Concluimos assim que a transformação $R_{O,\theta}$ preserva distâncias, logo é uma isometria (Figura 1.13).

b), c) e d) Demonstração imediata.

□

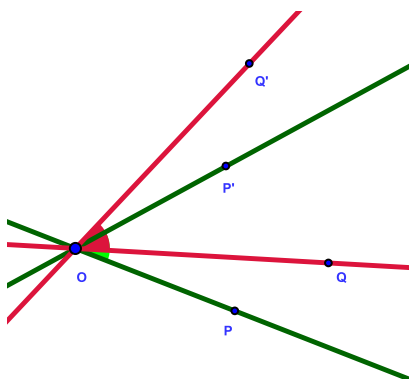


Figura 1.13: Demonstração do Teorema 1.14, alínea a), caso geral.

Observe-se que o conjunto das rotações com um mesmo centro, munido da composição de funções, é um grupo abeliano designado por *grupo das rotações do plano*.

No próximo teorema, destacam-se algumas propriedades da meia-volta. Antes, convém observar que se H_O é uma meia-volta, com $O = (a, b)$, tem-se

$$H_O(P) = (2a - x, 2b - y),$$

para um ponto arbitrário do plano $P = (x, y)$. A verificação desta afirmação é simples, tendo em conta que O , P e $P' = H_O(P)$ são pontos colineares (ver Figura 1.10). Assim, deixamos por momentos a abordagem sintética da Geometria Euclidiana e exploramos um pouco a sua vertente analítica, recorrendo a um sistema de coordenadas. Seguimos a abordagem adotada por [13].

Teorema 1.15. *São válidas as seguintes propriedades:*

- a) *Uma meia-volta H_A é uma transformação involutiva. Além disso, A é o ponto médio do segmento $[P, H_A(P)]$, para cada ponto P do plano;*
- b) *Uma meia-volta H_A fixa um ponto P se e somente se $P = A$. Uma meia-volta H_A fixa uma reta l se e somente se $A \in l$;*
- c) *O produto de duas meias-voltas é uma translação;*
- d) *O produto de três meias-voltas é uma meia-volta. Além disso, se A , B e C são pontos não colineares, então $H_C H_B H_A = H_D$, em que $[ABCD]$ é um paralelogramo;*

e) Meias-voltas, em geral, não comutam, mas $H_A H_B H_C = H_C H_B H_A$, para quaisquer meias-voltas H_A , H_B e H_C .

Demonstração. a) e b) A demonstração é imediata, tendo em conta a definição de meia-volta.

c) Mostremos que o produto de duas meias-voltas é uma translação. Consideremos, sem perda de generalidade, os pontos $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário do plano. Vem:

$$\begin{aligned} H_A(x, y) &= (2a - x, 2b - y), \\ H_B H_A(x, y) &= (2c - 2a + x, 2d - 2b + y) \\ &= (x + 2(c - a), y + 2(d - b)) \\ &= T_{\vec{u}}(x, y), \end{aligned}$$

onde

$$\vec{u} = (2(c - a), 2(d - b)),$$

ou seja, $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$. Concluimos, assim, que o produto de duas meias-voltas é uma translação (Figura 1.14).

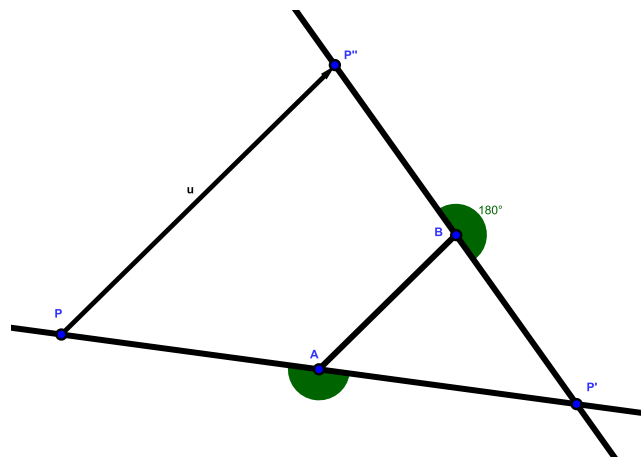


Figura 1.14: Demonstração do Teorema 1.15, alínea c).

d) Consideremos os pontos $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e $C = (e, f)$, com a, b, c, d, e e f números reais. Mostremos que $H_C H_B H_A$ é ainda uma meia-volta. Seja

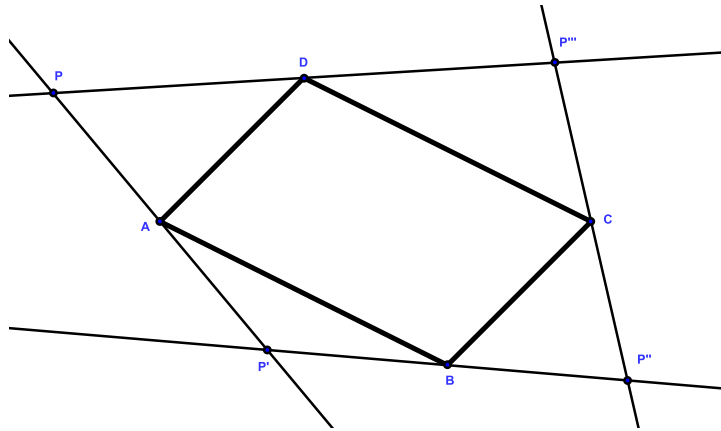


Figura 1.15: Demonstração do Teorema 1.15, alínea d).

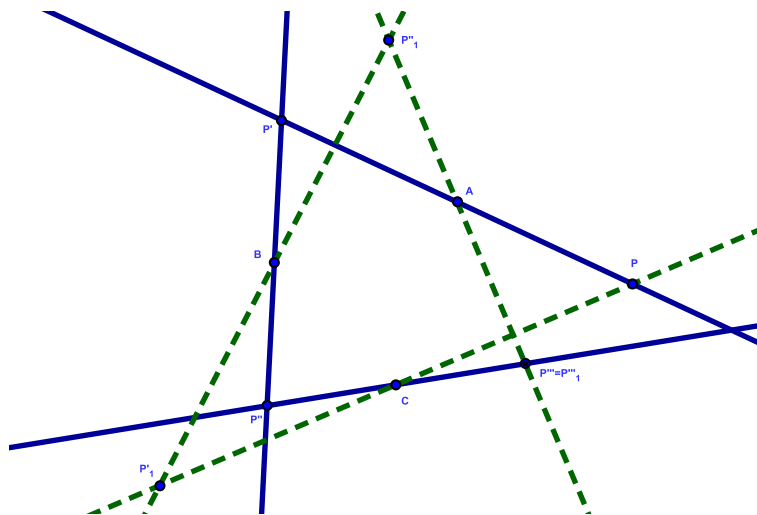


Figura 1.16: Demonstração do Teorema 1.15, alínea e).

$P = (x, y)$ um ponto arbitrário do plano. Segue-se:

$$\begin{aligned} H_A(x, y) &= (2a - x, 2b - y), \\ H_B H_A(x, y) &= (2c - 2a + x, 2d - 2b + y), \\ H_C H_B H_A(x, y) &= (2e - 2c + 2a - x, 2f - 2d + 2b - y) \\ &= (2(a - c + e) - x, 2(b - d + f) - y) \\ &= H_D(x, y), \end{aligned}$$

com $D = (a - c + e, b - d + f)$. Concluimos, assim, que o produto de três meias-voltas é ainda uma meia-volta. Repare-se que se A , B e C forem pontos não colineares, então D é o quarto vértice do paralelogramo $[ABCD]$, como se pode visualizar na Figura 1.15. De facto, como é fácil constatar, os lados do quadrilátero são congruentes e paralelos.

e) Tendo em conta as alíneas a) e d) e o Teorema 1.4 f), tem-se:

$$H_C H_B H_A = H_D = H_D^{-1} = (H_C H_B H_A)^{-1} = H_A^{-1} H_B^{-1} H_C^{-1} = H_A H_B H_C,$$

conforme se pretendia demonstrar (Figura 1.16). □

Teorema 1.16. *Se M é o ponto médio de $[AB]$, então $H_B H_M = T_{\overrightarrow{AB}} = H_M H_A$.*

Demonstração. Provou-se no Teorema 1.15 c) que o produto de duas meias-voltas é uma translação. Além disso, são válidas as igualdades

$$H_B H_M(A) = H_B(B) = B \quad \text{e} \quad H_M H_A(A) = H_M(A) = B.$$

Como $T_{\overrightarrow{AB}}$ é a única translação que transforma A em B , concluimos que $H_B H_M = T_{\overrightarrow{AB}}$ e $H_M H_A = T_{\overrightarrow{AB}}$. Apresenta-se na Figura 1.17 um exemplo que ilustra a última igualdade. □

Em síntese, o produto de um número par de meias-voltas reduz-se a um produto de translações, sendo portanto uma translação. Por outro lado, o produto de um número ímpar de meias-voltas reduz-se ao produto de uma meia-volta com uma translação, que é uma meia-volta. O conjunto formado pelas translações e meias-voltas do plano,

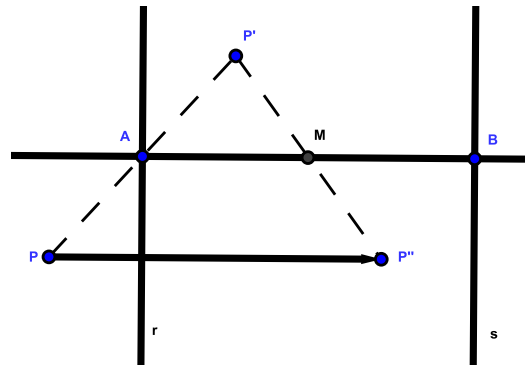


Figura 1.17: Demonstração do Teorema 1.16.

munido da composição de funções, é um grupo, que se designa simplesmente por *grupo das meias-voltas do plano*.

Seguem-se resultados essenciais para a posterior classificação exaustiva das isometrias do plano.

1.7 Uma isometria como produto de reflexões

Já sabemos que se uma isometria fixa três pontos não colineares, ela é a identidade. Vejamos outras situações.

Teorema 1.17. *Se uma isometria fixa dois pontos, P e Q , ela é uma reflexão relativamente à reta PQ ou a identidade.*

Demonstração. Considere-se uma isometria α que fixa P e Q , dois pontos distintos do plano, e seja m a reta determinada por esses pontos, isto é, $m = PQ$. Provemos que $\alpha = R_m$ ou $\alpha = \iota$. Suponhamos que $\alpha \neq \iota$. Então existe um ponto S que não é fixo por α . Logo, pelo Teorema 1.9, S não pertence à reta m , caso contrário seria fixo pela isometria α . Desta forma, os três pontos P , Q e S não são colineares. Seja $S' = \alpha(S)$. Como α é uma isometria, tem-se $\overline{PS} = \overline{PS'}$ e $\overline{QS} = \overline{QS'}$, pelo que o ponto P é equidistante de S e S' e o ponto Q é equidistante de S e S' , o que permite concluir que m é a mediatriz de $[SS']$. Portanto, $\alpha(S) = S' = R_m(S)$, $\alpha(P) = P = R_m(P)$ e $\alpha(Q) = Q = R_m(Q)$. Como uma isometria fica definida por três pontos não colineares

(Corolário 1.10), concluímos que $\alpha = R_m$. Caso contrário, todos os pontos são fixos por α e, portanto, $\alpha = \iota$. \square

Teorema 1.18. *Uma isometria que fixa exatamente um ponto é o produto de duas reflexões.*

Demonstração. Considere-se uma isometria α que fixa o ponto C . Seja $P \neq C$ com $\alpha(P) = P'$ e m a mediatriz de $[PP']$. Como α é uma isometria, tem-se, por definição, $\overline{CP} = \overline{CP'}$. Desta forma, C pertence a m e $R_m(C) = C$, $R_m(P') = P$. Daqui resulta que $R_m\alpha(C) = R_m(C) = C$ e $R_m\alpha(P) = R_m(P') = P$. Mas, pelo Teorema 1.17, uma isometria que fixe dois pontos é uma reflexão ou é a identidade. Logo, $R_m\alpha = \iota$ ou $R_m\alpha = R_l$ com $l = CP$, pois esta isometria fixa os pontos C e P . Mas $R_m\alpha \neq \iota$, caso contrário $\alpha = R_m$ fixa mais do que um ponto, o que contraria a hipótese. Assim, $R_m\alpha = R_l$, pelo que $R_mR_m\alpha = R_mR_l$, ou seja, $\alpha = R_mR_l$. \square

Teorema 1.19. *Uma isometria que fixa pelo menos um ponto é o produto de, no máximo, duas reflexões.*

Demonstração. Seja α uma isometria qualquer. Pelo Teorema 1.18, se α fixa exatamente um ponto, então é igual ao produto de duas reflexões. Por outro lado, se α fixa dois pontos, pelo Teorema 1.17, α é uma reflexão ou é a identidade. Note-se que no Teorema 1.11 a), mostramos que a reflexão é uma transformação involutiva e, portanto, a identidade pode ser escrita como o produto de duas reflexões relativamente a uma reta qualquer. Por último, se α fixar três ou mais pontos e se estes são colineares, então, α é uma reflexão na reta que os contém. Se, por outro lado, estes pontos não forem colineares, então, pelo Teorema 1.9, $\alpha = \iota$, sendo igual ao produto de duas reflexões. \square

Teorema 1.20. *Qualquer isometria é igual ao produto de, no máximo, três reflexões.*

Demonstração. Sabemos que a identidade pode ser escrita como o produto de duas reflexões. Considere-se, agora, uma isometria α diferente da identidade e um ponto P do plano, tal que $\alpha(P) = Q$. Seja m a mediatriz de $[PQ]$. Nestas condições, tem-se $R_m\alpha(P) = R_m(Q) = P$, ou seja, $R_m\alpha$ fixa P . Como $R_m\alpha$ é uma isometria que fixa pelo menos um ponto, pelo Teorema 1.19, sabemos que $R_m\alpha$ é igual ao produto de, no máximo, duas reflexões que representamos por β . Tem-se $R_m\alpha = \beta$. Multiplicando

ambos os membros à direita por R_m , obtemos $R_m R_m \alpha = R_m \beta$, pelo que $\alpha = R_m \beta$. Desta forma, α é igual ao produto de, no máximo, três reflexões. \square

Sejam $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ dois triângulos congruentes. Nos teoremas que se seguem, mostramos que é sempre possível obter um triângulo do outro através do produto de, no máximo, duas isometrias [12], ou especificamente do produto de, no máximo, três reflexões [13].

Teorema 1.21. *Se $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ são dois triângulos congruentes, então é sempre possível obter um triângulo do outro através do produto de, no máximo, duas isometrias.*

Demonstração. Sejam $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ triângulos congruentes. Vamos considerar dois casos, que mostram que basta o produto de duas isometrias para transformar um triângulo no outro (uma translação e uma rotação, no primeiro caso, e uma reflexão e uma rotação, no segundo caso).

1.º caso Suponhamos que se pretende transformar o triângulo $\triangle[ABC]$ no triângulo $\triangle[DEF]$, e que estes triângulos estão no plano de tal forma que um observador percorrendo os lados dos triângulos $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$, encontra os respetivos interiores à sua esquerda (Figura 1.18).

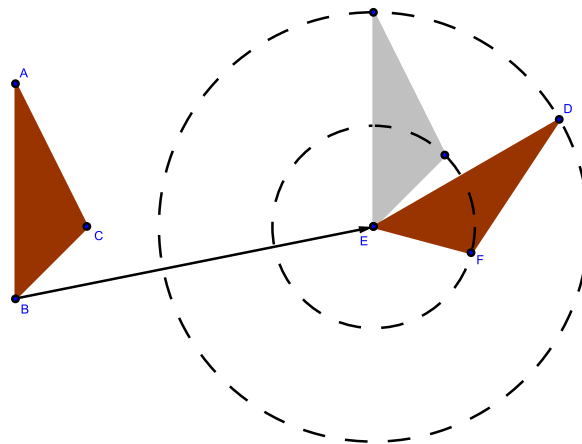


Figura 1.18: Demonstração do Teorema 1.21, 1.º caso.

Aplicar-se ao triângulo $\triangle[ABC]$ uma translação associada, por exemplo, ao vetor \overrightarrow{BE} e, de seguida, uma rotação de centro no ponto E ao triângulo transformado para o fazer coincidir com o triângulo $\triangle[DEF]$.

2.º caso Suponhamos que se pretende transformar o triângulo $\triangle[ABC]$ no triângulo $\triangle[DEF]$ e que estes triângulos estão no plano de tal forma que um observador que percorre os lados do triângulo $\triangle[ABC]$ encontra o respetivo interior à sua esquerda, enquanto que ao percorrer os lados do triângulo $\triangle[DEF]$ encontra o interior do triângulo à sua direita.

Aplicar-se ao triângulo $\triangle[ABC]$ uma reflexão em relação à mediatriz do segmento $[AD]$. O transformado de A coincide com D . De seguida, basta aplicar uma rotação (de centro no ponto D) ao triângulo transformado para o fazer coincidir com o triângulo $\triangle[DEF]$ (Figura 1.19).

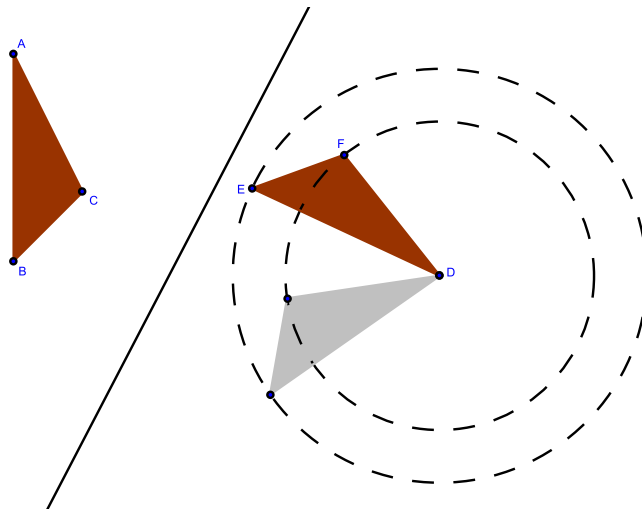


Figura 1.19: Demonstração do Teorema 1.21, 2.º caso.

□

Teorema 1.22. *Se $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ são dois triângulos congruentes, então é sempre possível obter um triângulo do outro através do produto de, no máximo, três reflexões.*

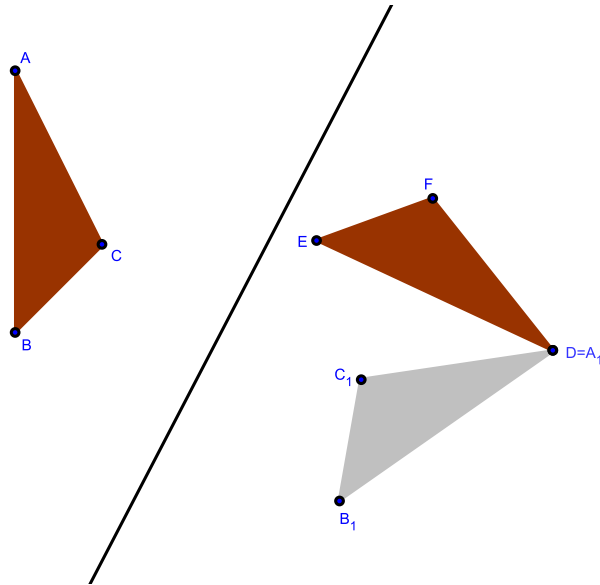


Figura 1.20: Demonstração do Teorema 1.22.

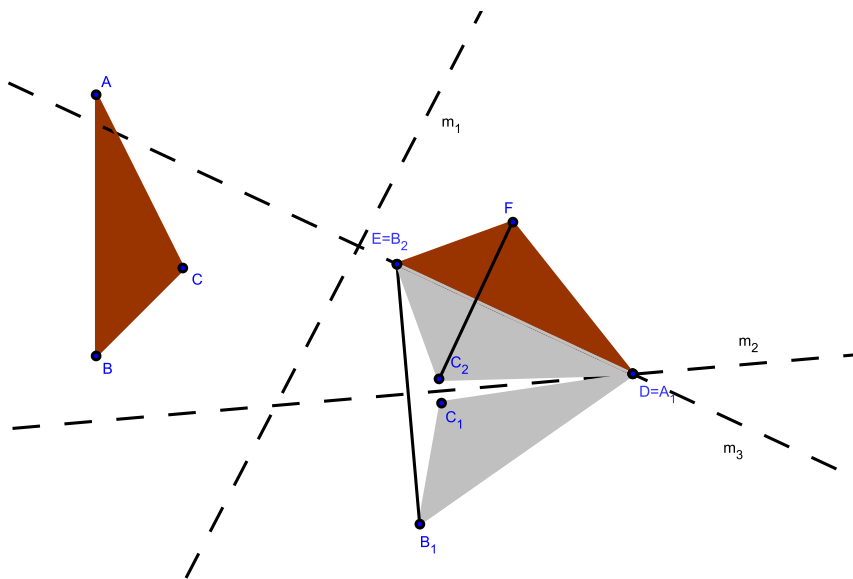


Figura 1.21: Demonstração do Teorema 1.22.

Demonstração. Sejam $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ triângulos congruentes. Vamos mostrar que basta o produto de, no máximo, três reflexões para transformar um triângulo no outro, independentemente da orientação desses triângulos. Sem perda de generalidade, comecemos por transformar A em D por uma reflexão $\alpha_1 = R_{m_1}$ em relação a m_1 , mediatriz do segmento de reta $[AD]$ (Figura 1.20). Transformámos o $\triangle[ABC]$ no triângulo $\triangle[A_1B_1C_1]$, em que $A_1 = \alpha_1(A) = D$, $B_1 = \alpha_1(B)$ e $C_1 = \alpha_1(C)$. De seguida, apliquemos ao triângulo $\triangle[A_1B_1C_1]$ uma reflexão $\alpha_2 = R_{m_2}$, em que m_2 é a mediatriz do segmento $[B_1E]$, transformando B_1 em E , C_1 em C_2 . Note-se que o transformado de A_1 coincide com o próprio A_1 , ou seja, com D (Figura 1.21). Para transformar o triângulo $\triangle[A_2B_2C_2]$ no triângulo $\triangle[DEF]$ basta aplicar ao triângulo $\triangle[A_2B_2C_2]$ uma reflexão $\alpha_3 = R_{m_3}$, com m_3 a mediatriz do segmento $[FC_2]$.

Portanto, com o produto de três reflexões, $\alpha_3\alpha_2\alpha_1 = R_{m_3}R_{m_2}R_{m_1}$, o triângulo $\triangle[ABC]$ é transformado no triângulo $\triangle[DEF]$, conforme pretendido. \square

O próximo teorema é, agora, de demonstração imediata.

Teorema 1.23. *Se $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ são dois triângulos congruentes, então existe uma única isometria α tal que $\alpha(A) = D$, $\alpha(B) = E$ e $\alpha(C) = F$.*

Demonstração. A existência de uma isometria nas condições do enunciado ficou provada quer no Teorema 1.21 como também no Teorema 1.22. Note-se que o conjunto das isometrias do plano, munido da composição de funções, é um grupo, pelo que o produto de isometrias é ainda uma isometria. Resta provar que a transformação que verifica as condições do teorema é única. Tal é imediato tendo em conta o Corolário 1.10, onde se provou que duas isometrias que fixam três pontos não colineares são iguais. \square

1.8 Produto de duas reflexões

Nesta secção estudam-se as diferentes possibilidades que resultam de compor duas reflexões.

Teorema 1.24. *Se r e s são duas retas paralelas distintas, então R_sR_r é uma translação cujo vetor associado tem direção perpendicular às retas r e s e comprimento igual ao dobro da distância entre r e s .*

Demonstração. Sejam r e s duas retas paralelas distintas. Considere-se uma reta l perpendicular a r e a s . Sejam A e B dois pontos tais que

$$A \in l \cap r \quad \text{e} \quad B \in l \cap s.$$

Note-se que a distância entre as retas r e s é determinada pela distância entre os pontos A e B . Considere-se um ponto C diferente de A , que pertencente à reta r . Sejam $A' = R_s(A)$ e $C' = T_{\overrightarrow{AA'}}(C)$. Então, pelo Teorema 1.12, temos $T_{\overrightarrow{AA'}} = T_{\overrightarrow{CC'}}$, pois $[CAA'C']$ é um retângulo. Por outro lado, s é a mediatriz de $[CC']$ e de $[AA']$, pelo que $C' = R_s(C)$. Tomemos, agora, $B' = R_r(B)$, sendo A o ponto médio de $[BB']$ e B o ponto médio de $[AA']$. Daqui resulta que $T_{\overrightarrow{AA'}} = T_{\overrightarrow{B'B}}$, em que $T_{\overrightarrow{AA'}}$ é uma translação cujo vetor associado tem a direção da reta AB e comprimento igual ao dobro da distância entre a reta r e a reta s . Desta forma,

$$\begin{aligned} R_s R_r(B') &= R_s(B) = B = T_{\overrightarrow{AA'}}(B'), \\ R_s R_r(C) &= R_s(C) = C' = T_{\overrightarrow{AA'}}(C), \\ R_s R_r(A) &= R_s(A) = A' = T_{\overrightarrow{AA'}}(A), \end{aligned}$$

como se pode visualizar na Figura 1.22.

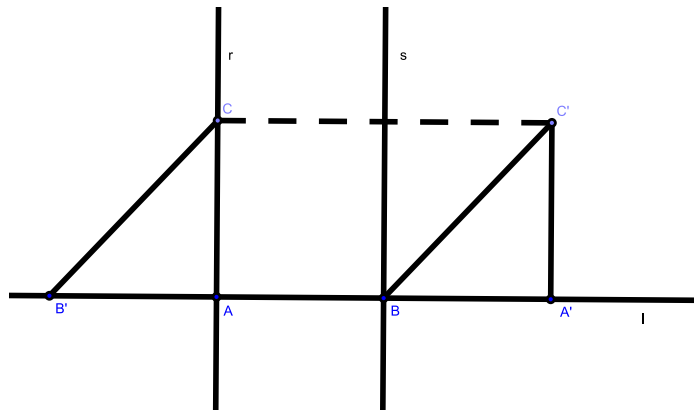


Figura 1.22: Demonstração do Teorema 1.24.

Pelo Corolário 1.10, uma isometria é definida por três pontos não colineares e A , C e B' são pontos distintos não colineares. Podemos, portanto, concluir que $R_s R_r = T_{\overrightarrow{AA'}} = (T_{\overrightarrow{AB}})^2$. \square

Corolário 1.25. *Dadas duas retas paralelas distintas, r e s , e uma reta l perpendicular às anteriores em A e B , respetivamente, tem-se $R_s R_r = (T_{\overrightarrow{AB}})^2 = H_B H_A$.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.16, se M é o ponto médio de $[AB]$, então $T_{\overrightarrow{AB}} = H_M H_A$, donde se conclui que $T_{\overrightarrow{AA'}} = H_B H_A$, com $A' = R_s(A)$, pois B é o ponto médio de $[AA']$. Pelo Teorema 1.24, segue-se que $R_s R_r = H_B H_A$. \square

Vimos no teorema anterior que o produto de duas reflexões de eixos paralelos é uma translação. Provemos, agora, que toda a translação se escreve como o produto de duas reflexões de eixos paralelos.

Teorema 1.26. *Toda a translação pode ser escrita como o produto de duas reflexões de eixos paralelos.*

Demonstração. Se $T_{\overrightarrow{AB}} = \iota$, o resultado é trivial tendo em conta que qualquer reflexão é uma transformação involutiva. Considere-se, agora, uma translação $T_{\overrightarrow{AB}} \neq \iota$. De acordo com o Teorema 1.16, podemos afirmar que $T_{\overrightarrow{AB}} = H_M H_A$, em que M é o ponto médio de $[AB]$. Seja a uma reta perpendicular à reta AB no ponto A e seja m uma reta perpendicular a AB no ponto M . Então, pelo Corolário 1.25, a e m são retas paralelas tais que $H_M H_A = R_m R_a$. Assim, $T_{\overrightarrow{AB}} = R_m R_a$ com $a \parallel m$, conforme pretendido (Figura 1.23). \square

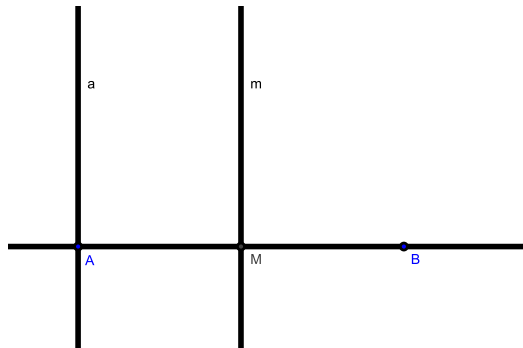


Figura 1.23: Demonstração do Teorema 1.26.

Teorema 1.27. *Dadas as retas r , s e t , perpendiculares a l , existem duas retas perpendiculares a l , p e q , tais que $R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t$, e estas são únicas. Além disso, $R_t R_s R_r$ é uma reflexão de eixo perpendicular a l .*

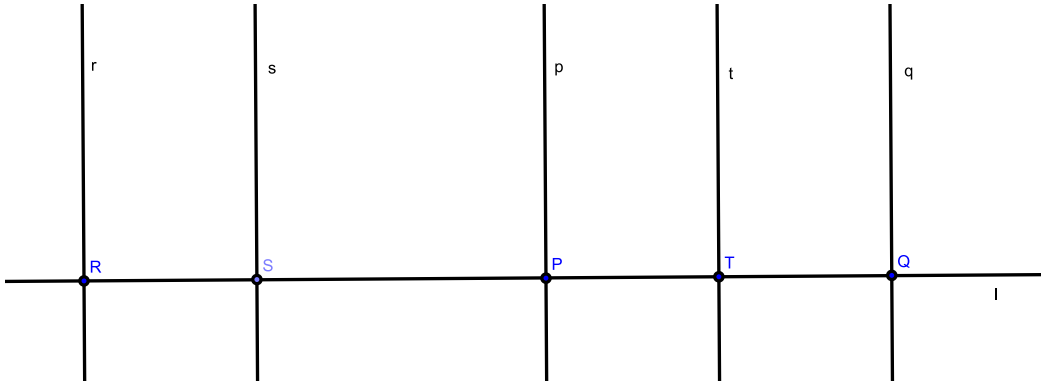


Figura 1.24: Demonstração do Teorema 1.27.

Demonstração. Provemos, em primeiro lugar, que existem duas retas p e q nas condições do teorema. Para tal, consideremos uma reta l e três retas r , s e t , distintas, perpendiculares a l nos pontos R , S e T , respetivamente. As retas r , s e t são paralelas entre si. Aplicando o Teorema 1.17, sejam P e Q os únicos pontos de l tais que $H_S H_R = H_T H_P = H_Q H_T$, ou seja, de modo que $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TQ}$ (Figura 1.24). Então as retas p e q perpendiculares a l que passam por P e Q , respetivamente, satisfazem as igualdades $R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t$. De facto, pelo Corolário 1.25 e pelas igualdades estabelecidas anteriormente, tem-se:

$$R_s R_r = H_S H_R = H_T H_P = R_t R_p \quad \text{e} \quad R_s R_r = H_S H_R = H_Q H_T = R_q R_t.$$

Em seguida, vamos mostrar que as retas p e q são as únicas que verificam as condições do teorema. Para tal, consideremos as retas p' e q' que satisfazem as igualdades $R_s R_r = R_t R_{p'} = R_{q'} R_t$. Temos então $R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t$ e $R_s R_r = R_t R_{p'} = R_{q'} R_t$. Logo, $R_t R_p = R_t R_{p'}$ e $R_q R_t = R_{q'} R_t$, o que implica que $R_p = R_{p'}$ e $R_q = R_{q'}$. Desta forma, $p = p'$ e $q = q'$.

Falta provar que $R_t R_s R_r$ é uma reflexão de eixo perpendicular a l . Sabemos que $R_s R_r = R_t R_p$. Multiplicando à direita ambos os membros desta igualdade por R_t , obtemos $R_t R_s R_r = R_t R_t R_p$. Mas R_t é uma transformação involutiva, donde se conclui que $(R_t)^2 = \iota$. Assim, $R_t R_s R_r = R_p$, ou seja, $R_t R_s R_r$ é uma reflexão de eixo perpendicular a l , conforme pretendido. \square

Vejamos, agora, o que acontece quando temos um produto de duas reflexões de eixos concorrentes.

Teorema 1.28. *O produto de duas reflexões de eixos concorrentes é uma rotação com centro no ponto de intersecção dos seus eixos. Em particular, o produto de duas reflexões de eixos perpendiculares é uma meia-volta. Reciprocamente, toda a rotação é o produto de duas reflexões de eixos concorrentes.*

Demonstração. Provemos, em primeiro lugar, que o produto de duas reflexões de eixos concorrentes é uma rotação. Sejam r e s duas retas que se intersectam num ponto C . Suponhamos que o ângulo orientado de r para s tem amplitude $\frac{\theta}{2}$ (r - lado origem; s - lado extremidade). Seja L um ponto pertencente à reta r , com $L \neq C$, e consideremos a circunferência C_L de centro C e raio \overline{CL} . Seja M o ponto de intersecção da reta s com a circunferência C_L . Façamos $L' = R_s(L)$. Então, pela definição de reflexão, s é a mediatriz de $[LL']$. Usando a congruência de triângulos, verifica-se sem dificuldade que L' pertence a C_L e que $\widehat{L'CL} = \theta$ (Figura 1.25). Logo, $L' = R_{C,\theta}(L)$. Analogamente, fazendo $M' = R_r(M)$, r é a mediatriz de $[MM']$. Então M' pertence a C_L e $\widehat{M'CM} = \theta$. Desta forma, $M = R_{C,\theta}(M')$. Podemos, portanto, deduzir as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} R_s R_r(C) &= R_s(C) = C = R_{C,\theta}(C), \\ R_s R_r(L) &= R_s(L) = L' = R_{C,\theta}(L), \\ R_s R_r(M') &= R_s(M) = M = R_{C,\theta}(M'). \end{aligned}$$

Do Corolário 1.10, sabemos que uma isometria é definida por três pontos não colineares, concluindo-se que $R_s R_r = R_{C,\theta}$.

Considere-se o caso particular em que r e s são perpendiculares. Para este caso, a amplitude do ângulo formado pelas duas retas é de 90° . De acordo com o que se provou acima, vem $R_s R_r = R_{C,180^\circ}$, isto é, o produto $R_s R_r$ é uma meia-volta com centro no ponto C , ou seja, $R_s R_r = H_C$.

Falta provar que toda a rotação é o produto de duas reflexões de eixos concorrentes. Seja $R_{C,\theta}$ uma rotação arbitrária. Consideremos, como anteriormente, duas retas r e s que se intersectam no ponto C , de forma a que o ângulo orientado de r para s tenha amplitude $\frac{\theta}{2}$. Sejam L e M dois pontos pertencentes, respetivamente, a r e s , diferentes de C . Façamos $L' = R_{C,\theta}(L)$ e $M' = R_{C,\theta}^{-1}(M) = R_{C,-\theta}(M)$. Facilmente se verifica que $\widehat{M'CL'} = \frac{\theta}{2}$ e $\widehat{M'CL} = \frac{\theta}{2}$ (Figura 1.26). Como, em triângulos congruentes, a ângulos com a mesma amplitude opõem-se lados com o mesmo comprimento, temos

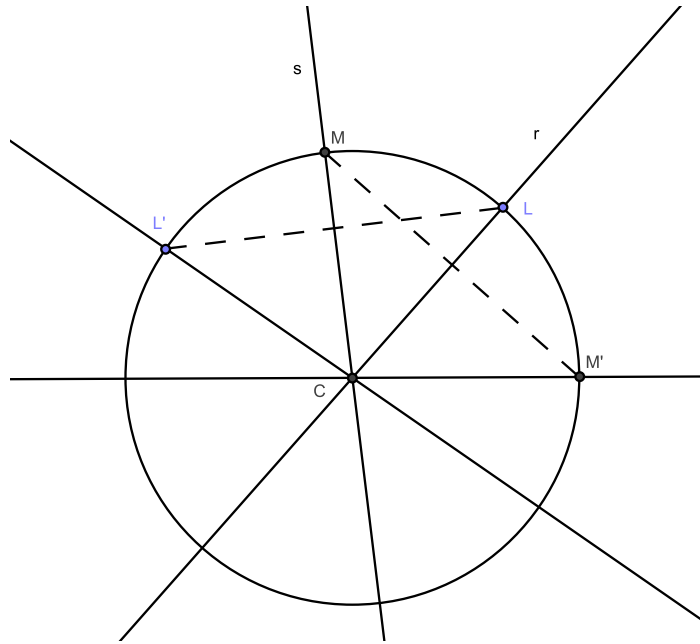


Figura 1.25: Demonstração do Teorema 1.28.

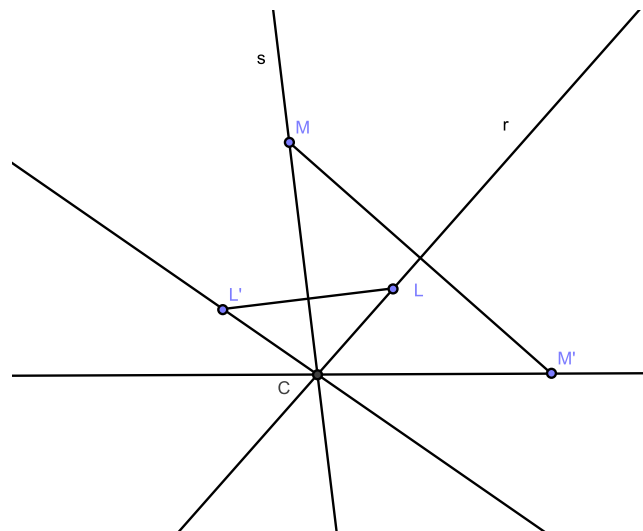


Figura 1.26: Demonstração do Teorema 1.28.

que s é a mediatriz de $[LL']$, ou seja, $R_s(L) = L'$ e, analogamente, $R_r(M') = M$. Logo,

$$\begin{aligned} R_{C,\theta}(C) &= C = R_s(C) = R_s R_r(C), \\ R_{C,\theta}(L) &= L' = R_s(L) = R_s R_r(L), \\ R_{C,\theta}(M') &= M = R_s(M) = R_s R_r(M'). \end{aligned}$$

De acordo com o Corolário 1.10, uma isometria é definida por três pontos não colineares, pelo que $R_{C,\theta} = R_s R_r$. \square

Provou-se, portanto, que o produto de duas reflexões de eixos concorrentes, $R_s R_r$, é uma rotação, $R_s R_r = R_{C,\theta}$, em que C é o ponto de intersecção de r e s e θ é o dobro da amplitude do ângulo orientado de r para s . Verdadeiramente existem dois ângulos orientados de r para s , que dependem do sentido de leitura (direto ou inverso). Contudo, esse sentido de leitura não influencia o resultado. Vejamos o que sucede com a ajuda da Figura 1.25 relativa à demonstração do teorema anterior: se lermos no sentido direto o ângulo orientado de r para s , obtemos o valor $\frac{\theta}{2}$, mas se o medirmos no sentido inverso, obtemos o valor

$$-\left(180^\circ - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} - 180^\circ.$$

Porém, a rotação obtida é a mesma nos dois casos, uma vez que

$$R_{C,2\frac{\theta}{2}} = R_{C,\theta} = R_{C,\theta-360^\circ} = R_{C,2(\frac{\theta}{2}-180^\circ)}.$$

Em geral, por uma questão de simplificação, trabalha-se com o ângulo orientado de menor amplitude em módulo.

Teorema 1.29. *Dadas três retas r , s e t concorrentes no ponto C , existem duas retas concorrentes em C , p e q , tais que $R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t$, e estas são únicas. Além disso, $R_t R_s R_r$ é uma reflexão cujo eixo passa por C .*

Demonstração. Sejam r , s e t retas concorrentes no ponto C e considere-se os pontos R , S e T , distintos de C e pertencentes a r , s e t , respetivamente. Como $R\hat{C}S = \frac{\theta}{2}$, pelo Teorema 1.28 vem $R_{C,\theta} = R_s R_r$ (Figura 1.27). Considere-se os pontos P e Q tais que $R\hat{C}S = P\hat{C}T = T\hat{C}Q = \frac{\theta}{2}$. Então a reta p , que passa por P e C , e a reta q , que passa por Q e C , satisfazem as igualdades $R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t$. Provemos estas

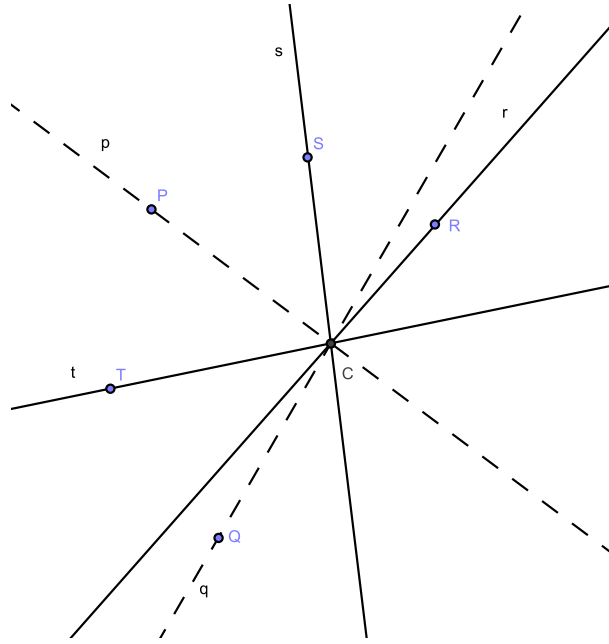


Figura 1.27: Demonstração do Teorema 1.29.

igualdades. Note-se que t e p são retas concorrentes em C , com $\widehat{PCT} = \frac{\theta}{2}$. Logo, pelo Teorema 1.28, $R_{C,\theta} = R_t R_p$. Do mesmo modo, como q e t são retas concorrentes em C , com $\widehat{TCQ} = \frac{\theta}{2}$, tem-se pelo Teorema 1.28, $R_{C,\theta} = R_q R_t$. Concluimos, portanto, que $R_s R_r = R_{C,\theta} = R_t R_p$ e $R_s R_r = R_{C,\theta} = R_q R_t$.

Em seguida, mostramos que as retas p e q são as únicas que verificam as condições do teorema. Para tal, consideremos as retas p' e q' que satisfazem $R_s R_r = R_t R_{p'} = R_{q'} R_t$. Tem-se:

$$R_s R_r = R_t R_p = R_t R_{p'} \quad \text{e} \quad R_s R_r = R_q R_t = R_{q'} R_t.$$

Portanto, $R_t R_p = R_t R_{p'}$ e $R_q R_t = R_{q'} R_t$, o que implica $R_p = R_{p'}$ e $R_q = R_{q'}$, ou seja, $p = p'$ e $q = q'$.

Falta provar que $R_t R_s R_r$ é uma reflexão cujo eixo passa por C . Mas $R_s R_r = R_t R_p$. Multiplicando à esquerda ambos os membros da igualdade anterior por R_t , tem-se $R_t R_s R_r = R_t R_t R_p$. Como R_t é involutiva, isto é, $(R_t)^2 = \iota$, vem $R_t R_s R_r = R_p$, ou seja, $R_t R_s R_r$ é uma reflexão cujo eixo passa por C . \square

O teorema que se segue caracteriza o produto de duas reflexões arbitrárias.

Teorema 1.30. *O produto de duas reflexões ou é uma translação ou uma rotação. O produto é simultaneamente uma translação e uma rotação apenas quando coincide com a identidade.*

Demonstração. Dadas duas retas r e s , podemos considerar três situações.

1.º caso Suponhamos que as retas r e s coincidem. Neste caso, é trivial verificar que o produto de duas reflexões com o mesmo eixo é igual à identidade (Figura 1.28).

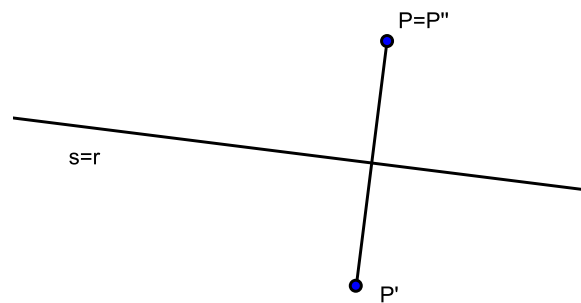


Figura 1.28: Demonstração do Teorema 1.30, 1.º caso.

2.º caso Suponhamos que as retas r e s são paralelas. Neste caso, já mostrámos no Teorema 1.24, que $R_s R_r$ é uma translação cujo vetor associado tem direção perpendicular às retas r e s e comprimento igual ao dobro da distância entre r e s (Figura 1.29).

3.º caso Suponhamos que as retas r e s são concorrentes no ponto C , sendo $\theta/2$ o ângulo orientado de r para s . Também já provámos no Teorema 1.28, que $R_s R_r$ é uma rotação com centro em C e amplitude θ (Figura 1.30). Será uma meia-volta para o caso particular em que r e s são perpendiculares.

□

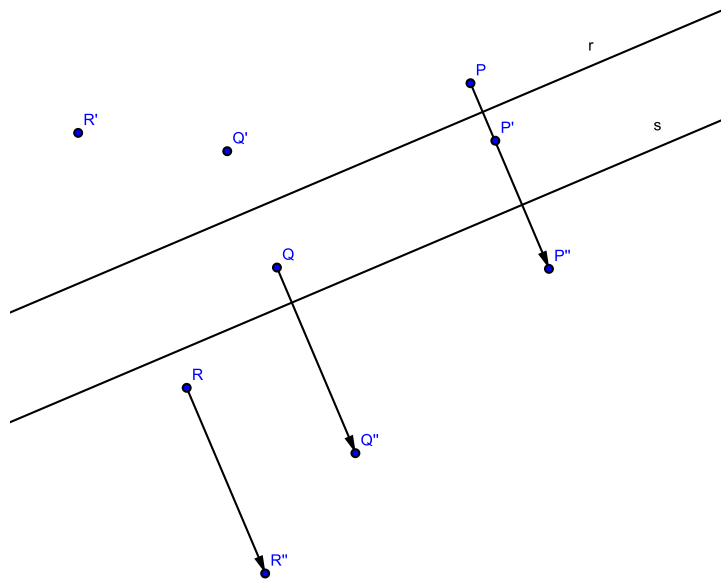


Figura 1.29: Demonstração do Teorema 1.30, 2.º caso.

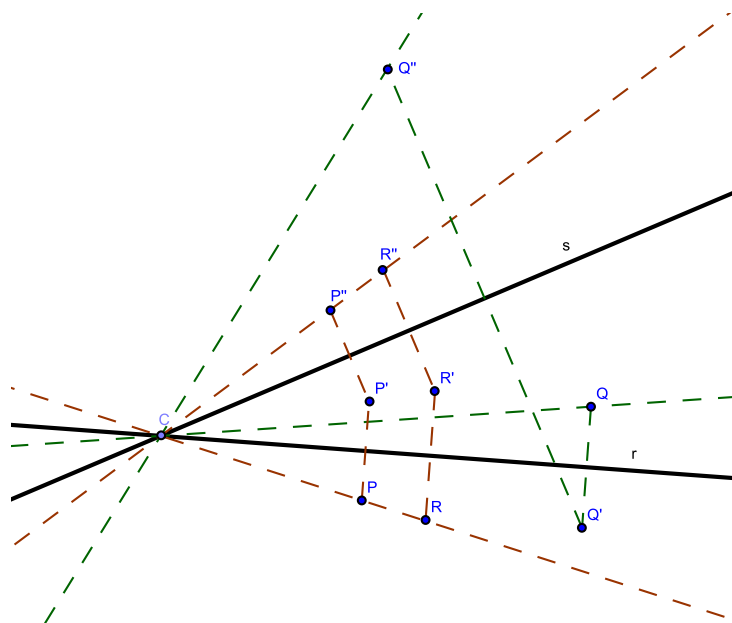


Figura 1.30: Demonstração do Teorema 1.30, 3.º caso.

1.9 Classificação das isometrias que fixam pontos ou retas

Façamos uma primeira classificação das isometrias, no que concerne aos pontos ou retas que fixam.

Teorema 1.31. *Uma isometria com um único ponto fixo é uma rotação. Uma isometria, diferente da identidade, que fixa algum ponto, é uma rotação ou uma reflexão.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.19, se uma isometria fixa algum ponto então é uma reflexão ou é igual ao produto de duas reflexões. Do Teorema 1.30, sabemos ainda que o produto de duas reflexões é igual à identidade, a uma translação ou a uma rotação. Por definição, a identidade tem um número infinito de pontos fixos. O mesmo acontece com qualquer reflexão. Por outro lado, uma translação, distinta da identidade, não fixa qualquer ponto e uma rotação, diferente da identidade, tem apenas um ponto fixo que é o seu centro da rotação. Desta forma, podemos concluir que uma isometria, diferente da identidade, que fixa algum ponto é uma reflexão ou uma rotação e uma isometria que tem um único ponto fixo é uma rotação. \square

Teorema 1.32. *Uma rotação, diferente da identidade, que fixa uma reta é uma meia-volta.*

Demonstração. Considere-se $R_{C,\theta} \neq \iota$ uma rotação de centro C e ângulo orientado θ , tal que $R_{C,\theta}$ fixa uma reta r . Seja t a reta perpendicular a r no ponto C . De acordo com o Teorema 1.28, existe uma única reta s concorrente a t em C ($s \neq t$), tal que $R_{C,\theta} = R_s R_t$. Então

$$r = R_{C,\theta}(r) = R_s R_t(r) = R_s(r).$$

Observe-se que $R_t(r) = r$, porque t é perpendicular a r . Concluimos, portanto, que

$$R_s(r) = r,$$

logo $s = r$ ou $s \perp r$. Mas se $s \perp r$ então $s = t$, porque t é perpendicular a r em C , o que é um absurdo, pois consideramos s concorrente com t em C ($s \neq t$). Por conseguinte, concluimos que $s = r$, com $r \perp t$ em C , logo, pelo Teorema 1.28, $R_{C,\theta} = H_C$. \square

1.10 Classificação das isometrias involutivas

Teorema 1.33. *As isometrias involutivas são reflexões ou meias-voltas.*

Demonstração. Seja φ uma isometria involutiva. Por definição, para qualquer ponto P do plano com $\varphi(P) = Q$, tem-se $P = \varphi^2(P) = \varphi(Q)$, ou seja, φ permuta P e Q . Por outro lado, seja M o ponto médio do segmento de reta $[PQ]$. Como φ é uma isometria, φ preserva distâncias, pelo que podemos escrever

$$\overline{PM} = \overline{\varphi(P)\varphi(M)} = \overline{Q\varphi(M)} \quad \text{e} \quad \overline{MQ} = \overline{\varphi(M)\varphi(Q)} = \overline{\varphi(M)P}.$$

Mas $\varphi(M)$ é o ponto médio de $[\varphi(P)\varphi(Q)]$, pois pelo Teorema 1.6 uma isometria preserva os pontos médios. Segue-se que

$$\overline{Q\varphi(M)} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \overline{\varphi(M)P}.$$

Por conseguinte, $M = \varphi(M)$, sendo M , $P = \varphi(Q)$ e $Q = \varphi(P)$ três pontos colineares. Pelo Teorema 1.31, como φ fixa algum ponto, então φ é uma rotação ou uma reflexão. Se for uma rotação, só pode ser uma meia-volta de acordo com o Teorema 1.32, uma vez que fixa a reta definida pelos pontos P e Q . \square

1.11 Classificação das isometrias pares e ímpares

Como vimos anteriormente, qualquer isometria pode ser escrita como o produto de reflexões (Teorema 1.20). Segue-se a classificação de uma isometria, tendo em conta o número de reflexões em que se decompõe.

Uma isometria diz-se *isometria par* (*direta*, *positiva* ou *própria*) se resulta da composição, ou produto, de um número par de reflexões.

Uma isometria diz-se *isometria ímpar* (*indireta*, *negativa* ou *imprópria*) se resulta da composição, ou produto, de um número ímpar de reflexões.

Para que estas definições façam sentido é necessário verificar que uma isometria não pode ser, simultaneamente, par e ímpar, propriedade que será demonstrada no Teorema 1.36. Antes disso, apresentam-se dois resultados necessários a essa demonstração.

Lema 1.34. *Dados um ponto P e duas retas r e s , existem duas retas t e q com $P \in t$, satisfazendo, $R_s R_r = R_q R_t$.*

Demonstração. Considere-se um ponto P e duas retas r e s quaisquer. Apresentamos dois casos distintos.

1.º caso Se $r \parallel s$, considere-se a reta t que passa por P , tal que $t \parallel r$. Então as retas r , s e t são paralelas, e é possível encontrar uma reta l perpendicular a r , s e t . Logo, pelo Teorema 1.27, existem duas (únicas) retas p e q perpendiculares a l , tais que

$$R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t.$$

Em particular, existe uma reta q perpendicular a l satisfazendo $R_s R_r = R_q R_t$ (Figura 1.31).

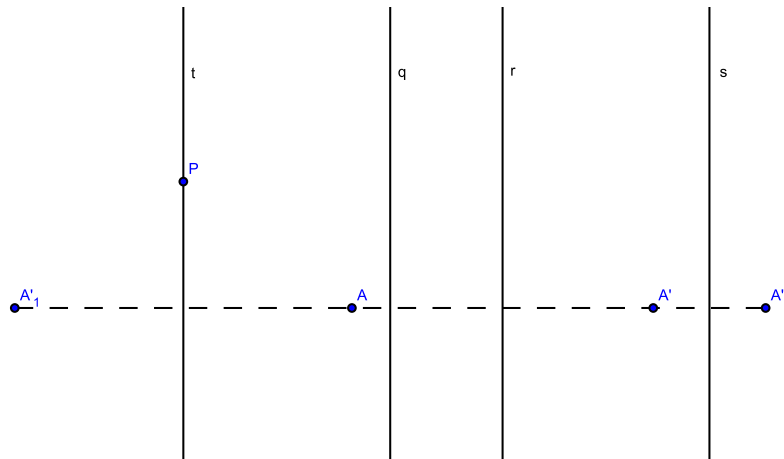


Figura 1.31: Demonstração do Lema 1.34, 1.º caso.

2.º caso Se r e s são concorrentes num ponto C , então considere-se a reta t que passa por P e C . Como as retas r , s e t são concorrentes em C , pelo Teorema 1.29, existem duas (únicas) retas p e q concorrentes em C , tais que

$$R_s R_r = R_t R_p = R_q R_t.$$

Em particular, existe uma reta q que passa por C tal que $R_s R_r = R_q R_t$ (Figura 1.32).

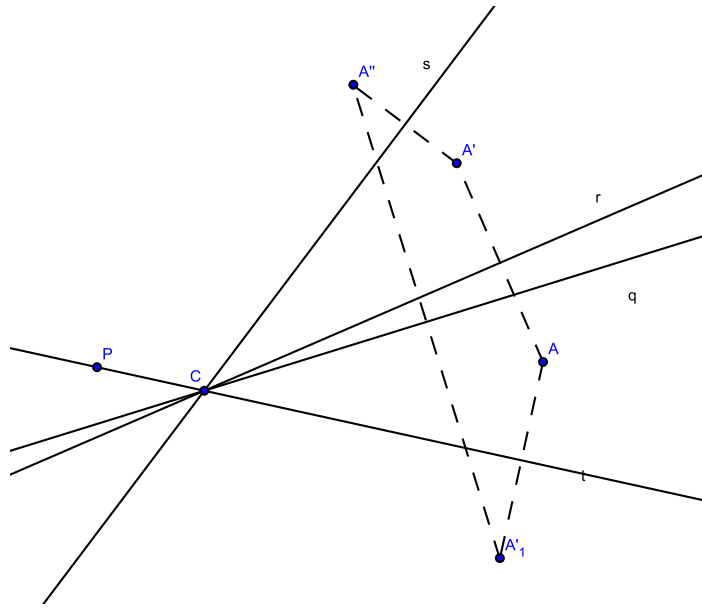


Figura 1.32: Demonstração do Lema 1.34, 2.º caso.

Desta forma, fica provado que existem duas retas t e q com $P \in t$, tais que $R_s R_r = R_q R_t$. \square

Teorema 1.35. *Um produto de quatro reflexões é igual a um produto de duas reflexões.*

Demonstração. Considere-se as retas r , s , p e q e o produto $R_r R_s R_p R_q$. Seja Q um ponto pertencente à reta q . Pelo Lema 1.34, dado o ponto Q e as retas s e p , existem s' e p' tais que $R_s R_p = R_{s'} R_{p'}$, com $Q \in p'$. Novamente, pelo Lema 1.34, dado o ponto Q e as retas r e s' , existem m e s'' tais que $R_r R_{s'} = R_m R_{s''}$, com $Q \in s''$. Como q , p' e s'' são retas concorrentes em Q , então, pelo Teorema 1.29, existe uma reta l tal que $Q \in l$ e $R_{s''} R_{p'} R_q = R_l$. Por conseguinte,

$$R_r R_s R_p R_q = R_r R_{s'} R_{p'} R_q = R_m R_{s''} R_{p'} R_q = R_m R_l.$$

Desta forma, fica provado que o produto de quatro reflexões reduz-se sempre ao produto de duas reflexões. \square

Teorema 1.36. *Uma isometria par é o produto de duas reflexões. Uma isometria ímpar é uma reflexão ou o produto de três reflexões. Nenhuma isometria é simultaneamente par e ímpar.*

Demonstração. Considere-se um produto de reflexões com um número arbitrário de fatores. Aplicando sucessivamente o Teorema 1.35 é possível obter um produto de três, ou menos, reflexões. Consequentemente, uma isometria par reduz-se a um produto de duas reflexões e uma isometria ímpar reduz-se ao produto de três reflexões ou a uma só reflexão. Resta provar que uma isometria não pode ser simultaneamente par e ímpar. Para tal, temos que mostrar que o produto de duas reflexões não é igual nem a uma reflexão nem ao produto de três reflexões. Suponhamos que existiam retas p , q , r , s e t , tais que $R_r R_q R_p = R_s R_t$. Pelo Teorema 1.35, existem retas m e l tais que $R_m R_l = R_s R_r R_q R_p$. Desta forma,

$$R_m R_l = R_s R_r R_q R_p = R_s R_s R_t = R_t,$$

o que é um absurdo pois $R_m R_l$ ou é uma translação ou uma rotação, como foi provado no Teorema 1.30, não podendo, portanto, ser igual à reflexão R_t . Concluimos, assim, que o produto de duas reflexões nunca é igual a uma reflexão nem ao produto de três reflexões. \square

Teorema 1.37. *As isometrias pares formam um grupo.*

Demonstração. A demonstração é uma verificação simples da definição de grupo, tendo em conta o Teorema 1.35 e o facto de a identidade ser uma isometria par (Teorema 1.30). \square

Teorema 1.38. *Uma isometria involutiva par é uma meia-volta. Uma isometria involutiva ímpar é uma reflexão.*

Demonstração. A demonstração baseia-se nos resultados anteriores. De acordo com o Teorema 1.33, as isometrias involutivas são meias-voltas ou reflexões. Além disso, classificamos as isometrias pares como sendo o produto de duas reflexões e, portanto, tendo em conta o Teorema 1.30, as isometrias pares são translações ou rotações ou a identidade. Note-se que também estão incluídas as meias-voltas pois são um caso particular das rotações. Por sua vez, as isometrias ímpares resultam do produto de três

reflexões ou são uma reflexão. Concluímos, portanto, que uma isometria involutiva par é uma meia-volta e que uma isometria involutiva ímpar é uma reflexão. \square

1.12 Produto de isometrias

Começamos por demonstrar dois resultados que serão utilizados no decorrer desta secção.

Lema 1.39. *Sejam α e β duas isometrias. Tem-se que $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva se e somente se β é uma isometria involutiva.*

Demonstração. Suponhamos que $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva. Então $(\alpha\beta\alpha^{-1})^2 = \iota$, ou seja, $(\alpha\beta\alpha^{-1})^2 = \alpha\beta(\alpha^{-1}\alpha)\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta\beta\alpha^{-1} = \alpha\beta^2\alpha^{-1} = \iota$. Daqui conclui-se que $\beta^2 = \iota$, ou seja, β é uma isometria involutiva. Por outro lado, se β é uma isometria involutiva, isto é, $\beta^2 = \iota$, tem-se $(\alpha\beta\alpha^{-1})^2 = \alpha\beta^2\alpha^{-1} = \alpha\iota\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1} = \iota$, logo $\alpha\beta\alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva. \square

Lema 1.40. *Sejam α e β duas isometrias. Então $\alpha\beta\alpha^{-1}$ e β têm a mesma paridade.*

Demonstração. Considere-se as isometrias α e β . Em primeiro lugar, note-se que $\alpha\alpha^{-1} = \iota$ é uma isometria par, porque é possível escrever a identidade como um produto de duas reflexões iguais (com um mesmo eixo r), uma vez que a reflexão é involutiva. Assim, $\iota = R_r R_r$. Como $\alpha\alpha^{-1}$ é uma isometria par, concluímos que α e α^{-1} têm a mesma paridade, pelo que $\alpha\beta\alpha^{-1}$ e β também têm a mesma paridade. \square

Teorema 1.41. *Seja P um ponto, m uma reta e α uma isometria. Então*

$$\alpha R_m \alpha^{-1} = R_{\alpha(m)} \quad e \quad \alpha H_P \alpha^{-1} = H_{\alpha(P)}.$$

Demonstração. De acordo com o Lema 1.39, temos que $\alpha R_m \alpha^{-1}$ e $\alpha H_P \alpha^{-1}$ são isometrias involutivas, pois R_m e H_P são isometrias involutivas. Pelo Lema 1.40, $\alpha R_m \alpha^{-1}$ é uma isometria ímpar porque R_m é uma isometria ímpar, e $\alpha H_P \alpha^{-1}$ é uma isometria par pois H_P é uma isometria par. Logo, podemos concluir que $\alpha R_m \alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva ímpar, portanto, pelo Teorema 1.38, $\alpha R_m \alpha^{-1}$ é uma reflexão. Por outro lado, $\alpha R_m \alpha^{-1} \alpha(m) = \alpha R_m(m) = \alpha(m)$, isto é, $\alpha R_m \alpha^{-1}$ fixa a reta $\alpha(m)$. Aliás,

fixa esta reta pontualmente. Então $\alpha R_m \alpha^{-1}$ é a reflexão que fixa pontualmente a reta $\alpha(m)$. Logo $\alpha R_m \alpha^{-1} = R_{\alpha(m)}$. Seguindo um procedimento análogo, podemos concluir que $\alpha H_P \alpha^{-1}$ é uma isometria involutiva par, portanto, $\alpha H_P \alpha^{-1}$ é uma meia-volta. Por outro lado, $\alpha H_P \alpha^{-1}$ fixa o ponto $\alpha(P)$, pois $\alpha H_P \alpha^{-1} \alpha(P) = \alpha H_P(P) = \alpha(P)$. Então $\alpha H_P \alpha^{-1}$ é uma meia-volta que fixa o ponto $\alpha(P)$. Desta forma, $\alpha H_P \alpha^{-1} = H_{\alpha(P)}$. \square

Teorema 1.42. *Se α é uma isometria, então*

$$\alpha T_{\overrightarrow{AB}} \alpha^{-1} = T_{\overrightarrow{\alpha(A)\alpha(B)}} \quad e \quad \alpha R_{C,\theta} \alpha^{-1} = R_{\alpha(C),\pm\theta}.$$

Demonstração. Considere-se a translação $T_{\overrightarrow{AB}}$. De acordo com o Teorema 1.6, se M é o ponto médio de $[AB]$, então $\alpha(M)$ é o ponto médio de $[\alpha(A)\alpha(B)]$. Aplicando o Teorema 1.16, vem $T_{\overrightarrow{AB}} = H_M H_A$ e $T_{\overrightarrow{\alpha(A)\alpha(B)}} = H_{\alpha(M)} H_{\alpha(A)}$. Assim, tendo em conta as igualdades estabelecidas e o Teorema 1.41, tem-se:

$$\alpha T_{\overrightarrow{AB}} \alpha^{-1} = \alpha H_M H_A \alpha^{-1} = \alpha H_M \alpha^{-1} \alpha H_A \alpha^{-1} = H_{\alpha(M)} H_{\alpha(A)} = T_{\overrightarrow{\alpha(A)\alpha(B)}}.$$

De seguida, vamos mostrar que $\alpha R_{C,\theta} \alpha^{-1} = R_{\alpha(C),\pm\theta}$. Para tal, provamos em primeiro lugar que, para qualquer reta l , se tem $R_l R_{C,\theta} R_l^{-1} = R_{R_l(C),-\theta}$. Seja m uma reta perpendicular a l que passa por C . Provámos, na demonstração do Teorema 1.28, que existe uma reta n que intersecta m em C , em que o ângulo orientado de m para n tem amplitude $\theta/2$, verificando-se $R_{C,\theta} = R_n R_m$. Como R_l é uma isometria, temos ainda que $R_l(m)$ e $R_l(n)$ se intersectam em $R_l(C)$ e a amplitude do ângulo orientado de $R_l(m)$ para $R_l(n)$ é o valor simétrico da amplitude do ângulo orientado de m para n (Figura 1.33). Tendo em conta o Teorema 1.41, vem

$$R_l R_{C,\theta} R_l^{-1} = R_l R_n R_m R_l^{-1} = R_l R_n R_l^{-1} R_l R_m R_l^{-1} = R_{R_l(n)} R_{R_l(m)} = R_{R_l(C),-\theta}.$$

Mas já provámos que qualquer isometria pode ser escrita como o produto de, no máximo, três reflexões (Teorema 1.20). Falta, assim, analisar duas situações. Consideremos $\alpha = R_t R_s$. Segue-se que

$$\alpha R_{C,\theta} \alpha^{-1} = R_t (R_s R_{C,\theta} R_s^{-1}) R_t^{-1} = R_t R_{R_s(C),-\theta} R_t^{-1} = R_{R_t R_s(C),\theta} = R_{\alpha(C),\theta}.$$

Por outro lado, se $\alpha = R_t R_s R_r$, tem-se

$$\alpha R_{C,\theta} \alpha^{-1} = R_t R_s (R_r R_{C,\theta} R_r^{-1}) R_s^{-1} R_t^{-1} = R_{\alpha(C),-\theta},$$

pelo que o resultado fica demonstrado. \square

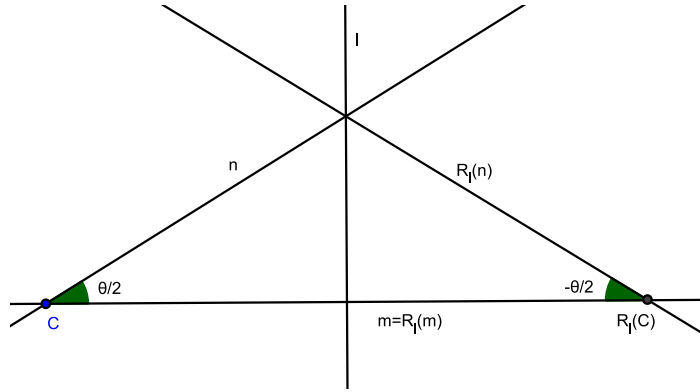


Figura 1.33: Demonstração do Teorema 1.42.

Nos próximos resultados, averiguamos quando é que duas rotações comutam e quando é que duas reflexões comutam. Começamos pelas rotações. De acordo com o Teorema 1.14 d), duas rotações com um mesmo centro comutam. Verificamos, de seguida, o que acontece quando as rotações apresentam centros diferentes.

Teorema 1.43. *Rotações, não triviais, com centros distintos não comutam.*

Demonstração. Consideremos dois pontos distintos, C e D . Se aplicarmos o Teorema 1.42, tomando $\alpha = R_{D,\phi}$, vem $R_{D,\phi}R_{C,\theta}R_{D,\phi}^{-1} = R_{R_{D,\phi}(C),-\theta}$. Multiplicando esta igualdade à direita por $R_{D,\phi}$, obtém-se

$$R_{D,\phi}R_{C,\theta}R_{D,\phi}^{-1}R_{D,\phi} = R_{R_{D,\phi}(C),-\theta}R_{D,\phi},$$

isto é,

$$R_{D,\phi}R_{C,\theta} = R_{R_{D,\phi}(C),-\theta}R_{D,\phi}.$$

Ora, $R_{C,\theta} \neq R_{R_{D,\phi}(C),-\theta}$, pois $R_{D,\phi}(C) \neq C$ uma vez que $C \neq D$. Podemos concluir, portanto, que rotações com centros diferentes não comutam. \square

Teorema 1.44. *Dadas duas retas m e n , tem-se $R_mR_n = R_nR_m$ se e somente se $m = n$ ou $m \perp n$.*

Demonstração. Considere-se duas retas m e n tais que $R_mR_n = R_nR_m$. Aplicando R_n a ambos os membros da igualdade anterior, vem $R_nR_mR_n = R_nR_nR_m$. Como R_n é uma isometria involutiva, tem-se $R_n = R_n^{-1}$ e $R_n^2 = \iota$, pelo que $R_nR_mR_n^{-1} = R_m$. Do Teorema 1.41, vem $R_{R_n(m)} = R_m$, o que implica que $R_n(m) = m$. Esta igualdade só é verdadeira se R_n fixar a reta m e, portanto, $m = n$ ou $m \perp n$. \square

O próximo resultado caracteriza o produto de duas isometrias pares.

Teorema 1.45. *São válidas as seguintes propriedades:*

- a) *Uma rotação associada a um ângulo de amplitude α seguida de uma rotação associada a um ângulo de amplitude β é uma rotação associada ao ângulo de amplitude $\alpha + \beta$, exceto se $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360}$, caso em que o produto é uma translação;*
- b) *Uma translação seguida de uma rotação não trivial, associada a um ângulo de amplitude α , é uma rotação associada a um ângulo de amplitude α ;*
- c) *Uma rotação não trivial, associada a um ângulo de amplitude α , seguida de uma translação é uma rotação associada a um ângulo de amplitude α ;*
- d) *Uma translação seguida de uma translação é uma translação.*

Demonstração. a) De acordo com o Teorema 1.14 d), para C um ponto do plano e α, β dois números reais, tem-se $R_{C,\alpha}R_{C,\beta} = R_{C,\alpha+\beta}$. Considere-se, agora, D um ponto diferente de C e seja $R_{D,\beta}R_{C,\alpha}$ o produto de duas rotações com esses centros. Considere-se $r = CD$. Pelo Teorema 1.28, existe uma reta c que passa por C e uma reta d que passa por D , tais que $R_{C,\alpha} = R_rR_c$ e $R_{D,\beta} = R_dR_r$. Logo

$$R_{D,\beta}R_{C,\alpha} = R_dR_rR_rR_c = R_dR_c,$$

pois $(R_r)^2 = \iota$. Para $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360}$, as retas c e d são paralelas. Logo, pelo Teorema 1.24, $R_{D,\beta}R_{C,\alpha} = R_dR_c$ é uma translação (Figura 1.34). Por outro lado, quando não se verifica $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360}$, as retas c e d intersectam-se num ponto A e, pelo Teorema 1.28, R_dR_c é uma rotação de centro A . Resta verificar que esta rotação está associada à medida de amplitude $\alpha + \beta$. Concentremos a nossa atenção nos ângulos orientados de c para r , de amplitude $\frac{\alpha}{2}$, e de r para d , de amplitude $\frac{\beta}{2}$, no mesmo semiplano definido por r . Sabe-se que a amplitude de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes. Desta forma, concluímos que o ângulo orientado de c para d tem amplitude $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$, donde resulta que o produto R_dR_c é uma rotação de centro A associada ao ângulo de amplitude $\alpha + \beta$, ou seja, $R_{D,\beta}R_{C,\alpha} = R_{A,\alpha+\beta}$, como pretendido (Figura 1.35).

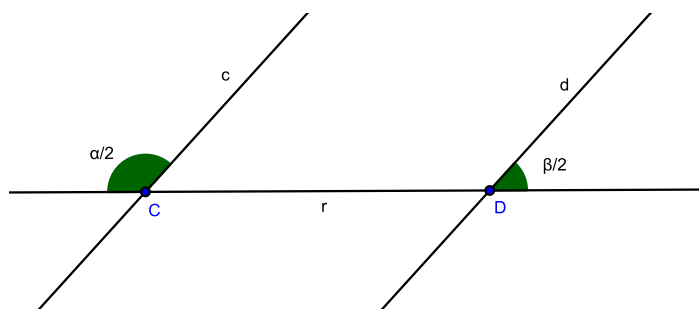


Figura 1.34: Demonstração do Teorema 1.45, alínea a).

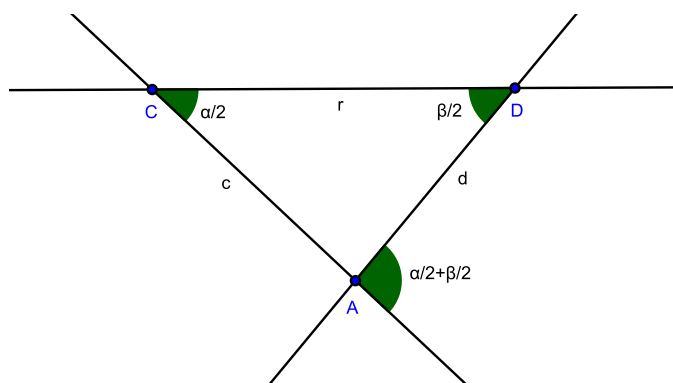


Figura 1.35: Demonstração do Teorema 1.45, alínea a).

- b) Considere-se, agora, uma translação seguida de uma rotação não trivial, associada a um ângulo de amplitude α . Neste produto e de acordo com o Teorema 1.17, podemos substituir a translação pelo produto de duas rotações associadas a ângulos de amplitude 180° (meias-voltas). Assim, aplicando o resultado provado na alínea anterior, concluímos que o produto destas três rotações é igual a uma rotação associada ao ângulo de amplitude $\alpha + 180^\circ + 180^\circ$, que é justamente uma rotação associada ao ângulo de amplitude α .
- c) Tal como se procedeu na alínea b), é possível concluir que uma rotação, associada ao ângulo de amplitude α , seguida de uma translação é igual a uma rotação associada ao ângulo de amplitude α .
- d) Podemos escrever o produto de duas translações como o produto de quatro rotações associadas a ângulos de amplitude 180° . Por a) e uma vez que

$$180 + 180 + 180 + 180 \equiv 0 \pmod{360},$$

temos que o produto destas quatro rotações é uma translação.

□

1.13 Reflexões deslizantes

Sejam n uma reta e \vec{u} um vetor não nulo com a direção de n . Chama-se *reflexão deslizante* de eixo n e vetor \vec{u} , $D_{n,\vec{u}}$, à transformação do plano que se obtém do produto da reflexão de eixo n com a translação associada ao vetor \vec{u} . A reta n designa-se por *eixo de deslocamento* da reflexão deslizante (Figura 1.36).

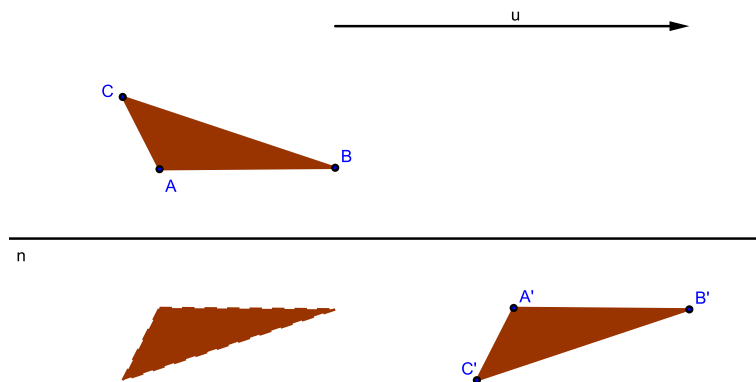


Figura 1.36: Definição de reflexão deslizante.

No próximo teorema, mostra-se que a ordem pela qual se efetua o produto das duas isometrias é irrelevante. Prova-se também que uma reflexão deslizante resulta sempre do produto de três reflexões (Figura 1.37).

Teorema 1.46. *Toda a reflexão deslizante γ pode ser escrita como o produto de três reflexões, $R_c R_b R_a$, com $a, b \perp c$ e $a \neq b$. Além disso,*

$$\gamma = R_c R_b R_a = R_c T_{\vec{AB}} = T_{\vec{AB}} R_c = R_b R_a R_c,$$

em que AB tem a direção da reta c , sendo a distância entre os pontos A e B igual ao dobro da distância entre as retas a e b . O eixo de deslocamento de γ coincide com o eixo de reflexão de R_c .

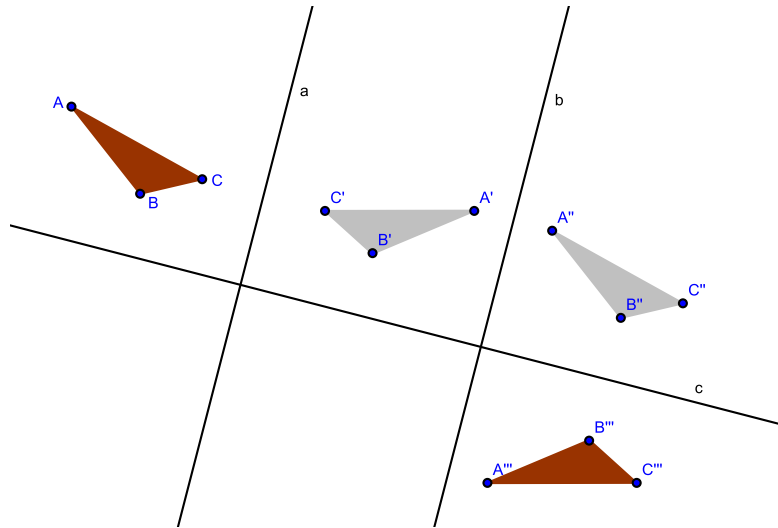


Figura 1.37: Uma reflexão deslizante como o produto de três reflexões.

Demonstração. Este resultado é consequência imediata do Teorema 1.26, que estabelece que uma translação pode ser escrita como o produto de duas reflexões de eixos paralelos. Resta apenas verificar que $R_c T_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}} R_c$, o que equivale a provar que

$$R_c(R_b R_a) = (R_b R_a) R_c,$$

ou seja, que R_c comuta com $R_b R_a$, o produto das duas reflexões de eixos paralelos que determina a translação associada ao vetor \overrightarrow{AB} . Observe-se que

$$R_a R_c = R_c R_a \quad \text{e} \quad R_b R_c = R_c R_b,$$

pois os eixos de reflexão de cada par de rotações são perpendiculares (Teorema 1.44). Logo,

$$R_c(R_b R_a) = (R_c R_b) R_a = (R_b R_c) R_a = R_b(R_c R_a) = R_b(R_a R_c) = (R_b R_a) R_c.$$

Concluimos, assim, que γ resulta do produto de R_c com $R_b R_a$ ou, em ordem inversa, resulta do produto de $R_b R_a$ com a reflexão R_c . \square

Vejamos algumas propriedades adicionais das reflexões deslizantes, em que se terá em conta o resultado acabado de provar.

Teorema 1.47. *Uma reflexão deslizante γ não fixa ponto algum mas fixa uma única reta, o seu eixo de deslocamento. O ponto médio M de $[PP']$, onde P' é a imagem de P pela reflexão deslizante γ , pertence ao eixo de deslocamento.*

Demonstração. Considere-se P um ponto qualquer do plano e $R_c R_b R_a$ uma reflexão deslizante de eixo c com $a, b \perp c$ e $a \neq b$. Seja l a reta que passa por P e é perpendicular a c . Então, pelo Teorema 1.27, existe uma reta m também perpendicular a c , tal que $R_b R_a = R_m R_l$. Se M for o ponto de intersecção das retas m e c , então M e P são pontos distintos, tais que $R_c R_b R_a(P) = R_c R_m R_l(P) = R_c R_m(P) = H_M(P)$. De facto, pelo Teorema 1.28, o produto de reflexões de eixos perpendiculares é uma meia-volta, com centro no ponto de intersecção dessas retas. Concluimos que $R_c R_b R_a(P) = H_M(P)$, com M um ponto distinto de P . Portanto, $H_M(P) \neq P$ e mostramos, portanto, que $R_c R_b R_a$ não fixa pontos (Figura 1.38). Por outro lado, M é o ponto

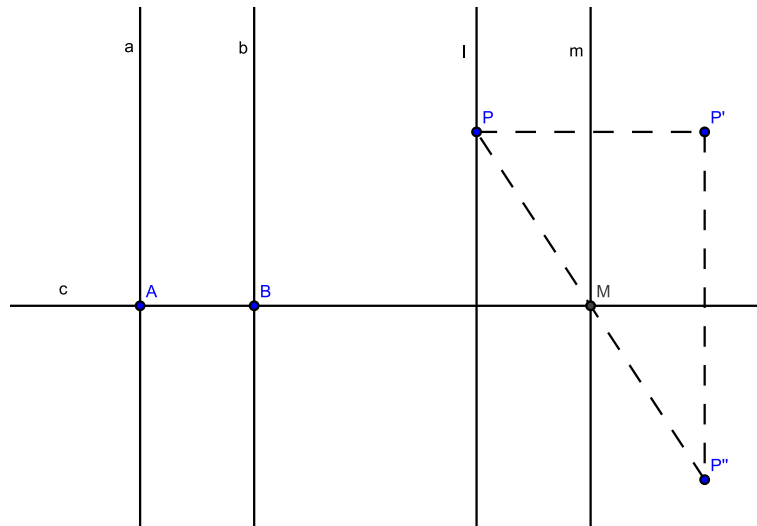


Figura 1.38: Demonstração do Teorema 1.47.

médio de $[P, H_M(P)]$ e pertence à reta c . Concluimos, assim, que o ponto médio do segmento definido por P e pela sua imagem pela reflexão deslizante, $R_c R_b R_a(P)$, pertence ao eixo c . Então a reflexão deslizante permuta os semiplanos definidos pelo seu eixo. Note-se também que $H_M(P)$ não pertence à reta l . Logo, qualquer reta fixa pela reflexão deslizante deve intersectar o eixo de reflexão em, pelo menos, dois pontos, ou seja, deve coincidir com o próprio eixo. Desta forma, a reflexão deslizante não fixa reta alguma com a exceção do seu eixo de deslocamento. \square

Teorema 1.48. *Uma reflexão deslizante γ pode escrever-se como um produto $R_l H_A$, em que $A \notin l$. Também é possível escrever uma reflexão deslizante γ como um produto $H_A R_l$, em que $A \notin l$. Por outro lado, dado um ponto A e uma reta l tais que $A \notin l$, então $R_l H_A$ e $H_A R_l$ são reflexões deslizantes com eixo de deslocamento perpendicular a l , que passa por A .*

Demonstração. Seja γ uma reflexão deslizante. Existem retas a , b e c tais que $\gamma = R_c R_b R_a$, com a e b retas distintas e perpendiculares a c , nos pontos A e B , respetivamente (Figura 1.39). Então, pelo Teorema 1.28,

$$H_A = R_a R_c = R_c R_a \quad \text{e} \quad H_B = R_b R_c = R_c R_b.$$

Note-se que as rotações comutam, pois as retas em causa são perpendiculares (Teorema 1.44). Desta forma,

$$\gamma = (R_c R_b) R_a = H_B R_a \quad \text{e} \quad \gamma = (R_c R_b) R_a = (R_b R_c) R_a = R_b (R_c R_a) = R_b H_A.$$

Escrevemos, portanto, a reflexão deslizante γ como o produto $H_B R_a$, com $B \notin a$, ou como o produto $R_b H_A$, com $A \notin b$. Fica, assim, provado que uma reflexão deslizante pode ser escrita como o produto de uma meia-volta com uma reflexão.

Provemos agora que, para um ponto P qualquer do plano e l uma reta que não passa por P , os produtos $R_l H_P$ e $H_P R_l$ são reflexões deslizantes. Sejam p a reta que passa pelo ponto P , e que é perpendicular a l , e m a reta perpendicular a p em P . As retas l e m são distintas, uma vez que P não pertence a l mas pertence a m (Figura 1.40). Aplicando o Teorema 1.28, podemos escrever $R_l H_P$ e $H_P R_l$ como o produto de três reflexões,

$$H_P R_l = R_p R_m R_l \quad \text{e} \quad R_l H_P = R_l R_p R_m = R_p R_l R_m,$$

tais que $m, l \perp p$ e $m \neq l$. Observe-se que, pelo Teorema 1.44, $R_p R_l = R_l R_p$, pois l e p são perpendiculares. Por conseguinte, os produtos $H_P R_l$ e $R_l H_P$ são reflexões deslizantes. \square

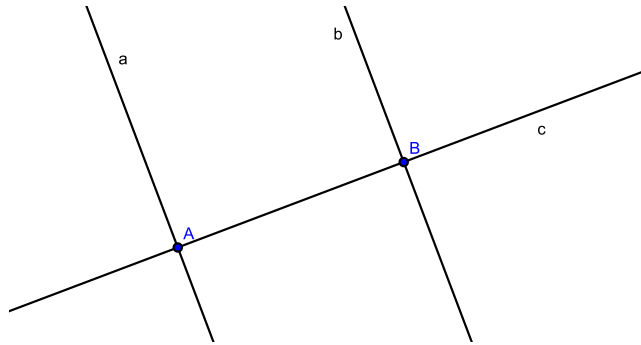


Figura 1.39: Demonstração do Teorema 1.48.

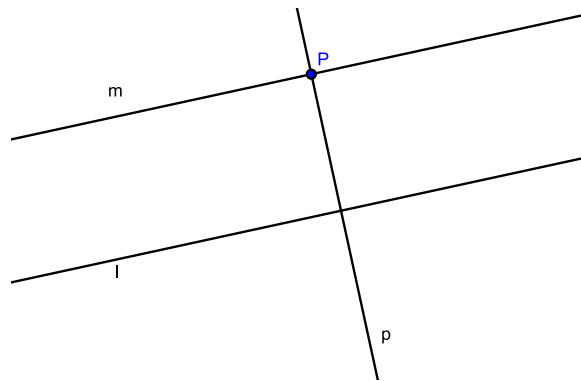


Figura 1.40: Demonstração do Teorema 1.48.

Teorema 1.49. *Se uma translação fixa uma reta c , então comuta com uma reflexão deslizante de eixo de deslocamento c . Se γ é uma reflexão deslizante de eixo de deslocamento c , então γ^2 é uma translação não trivial que fixa c .*

Demonstração. Sabemos que uma reflexão deslizante de eixo de deslocamento c pode escrever-se como $R_c T_{\overrightarrow{AB}}$ ou $T_{\overrightarrow{AB}} R_c$, em que \overrightarrow{AB} tem a direção de c . Consideremos, agora, uma translação $T_{\overrightarrow{CD}}$ que fixa a reta c (logo \overrightarrow{CD} tem a direção de c). Esta translação comuta com a reflexão R_c , como é fácil constatar (basta seguir passos análogos aos empregues na demonstração do Teorema 1.46). Por outro lado, duas translações também comutam entre si, de acordo com o Teorema 1.13 d). Assim, podemos concluir que uma translação que fixa uma reta c comuta com uma reflexão deslizante de eixo de deslocamento c , ou seja, $T_{\overrightarrow{AB}} R_c T_{\overrightarrow{CD}} = T_{\overrightarrow{AB}} T_{\overrightarrow{CD}} R_c = T_{\overrightarrow{CD}} T_{\overrightarrow{AB}} R_c$.

Prova-se, de seguida, que se γ é uma reflexão deslizante de eixo de deslocamento c ,

então γ^2 é uma translação, não trivial, que fixa c . Considere-se $\gamma = T_{\overrightarrow{AB}}R_c$, em que \overrightarrow{AB} tem a direção de c . Tem-se $\gamma^2 = (T_{\overrightarrow{AB}}R_c)^2 = T_{\overrightarrow{AB}}R_cT_{\overrightarrow{AB}}R_c$. Como uma translação que fixa a reta c comuta com a reflexão R_c , vem $\gamma^2 = T_{\overrightarrow{AB}}R_cR_cT_{\overrightarrow{AB}} = T_{\overrightarrow{AB}}T_{\overrightarrow{AB}}$. Logo, γ^2 é uma translação não trivial que fixa c , pois \overrightarrow{AB} tem a direção de c . \square

Teorema 1.50. *O produto $R_rR_qR_p$ é uma reflexão deslizante se e somente se as retas p , q e r não são concorrentes num ponto nem têm uma reta perpendicular em comum.*

Demonstração. Seja $R_rR_qR_p$ uma reflexão deslizante. Então, pelos Teorema 1.27 e 1.29, conclui-se que p , q e r não são retas concorrentes num ponto C , nem são retas perpendiculares a uma reta l , pois nestes casos o produto $R_rR_qR_p$ seria uma reflexão e não uma reflexão deslizante. Pretendemos, agora, provar que para as retas não concorrentes p , q e r e que não têm uma perpendicular comum, o produto $R_rR_qR_p$ é uma reflexão deslizante. Suponhamos, portanto, que p , q e r não são concorrentes num ponto, nem são todas paralelas. Existem duas situações a considerar:

- 1.º caso Considere-se que p e q se intersectam num ponto Q , com $Q \notin r$, pois as retas p , q e r não são concorrentes num ponto. Seja m a reta perpendicular a r , que passa por Q , e P o ponto que pertence a m e a r . Então, pelo Teorema 1.29, existe uma reta l que passa por Q , tal que $R_qR_p = R_mR_l$. Como $p \neq q$, tem-se $l \neq m$ e, portanto, $P \notin l$, pelo que $R_rR_qR_p = R_rR_mR_l = H_P R_l$. Logo, é possível escrever o produto $R_rR_qR_p$ como o produto de uma meia-volta de centro P com uma reflexão associada a uma reta l que não passa por P . Conclui-se, pelo Teorema 1.48, que $R_rR_qR_p$ é uma reflexão deslizante (Figura 1.41).
- 2.º caso Considere-se que p e q são retas paralelas. Neste caso, r intersecta p e q em pontos distintos (ou seja, p e q são retas estritamente paralelas), caso contrário as retas p , q e r seriam paralelas, com uma perpendicular em comum, ou seriam concorrentes num ponto, o que contraria a hipótese do enunciado. Suponhamos que r intersecta a reta q em Q . Seja m a reta perpendicular a p , que passa em Q , e P o ponto de intersecção de m com p . Então, pelo Teorema 1.29, existe uma reta l , com $Q \in l$, tal que $R_qR_r = R_mR_l$. Logo $R_pR_qR_r = R_pR_mR_l = H_P R_l$, donde resulta $R_rR_qR_p = (R_pR_qR_r)^{-1} = (H_P R_l)^{-1} = R_l H_P$, por serem todas isometrias involutivas. Novamente, pelo Teorema 1.48, estamos na presença de uma reflexão deslizante (Figura 1.42). \square

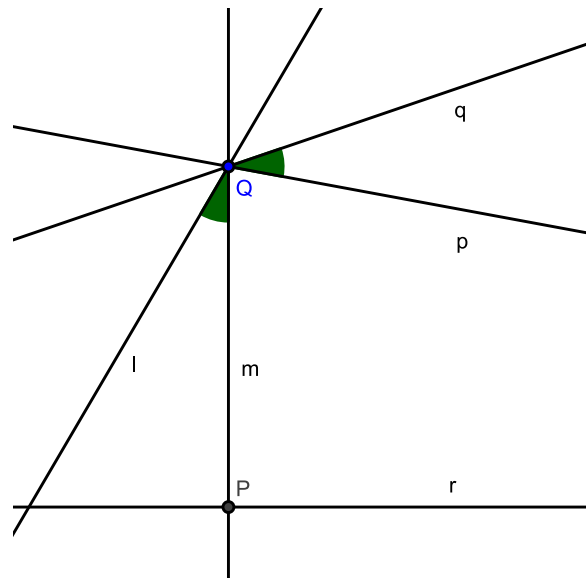


Figura 1.41: Demonstração do Teorema 1.50, 1.º caso.

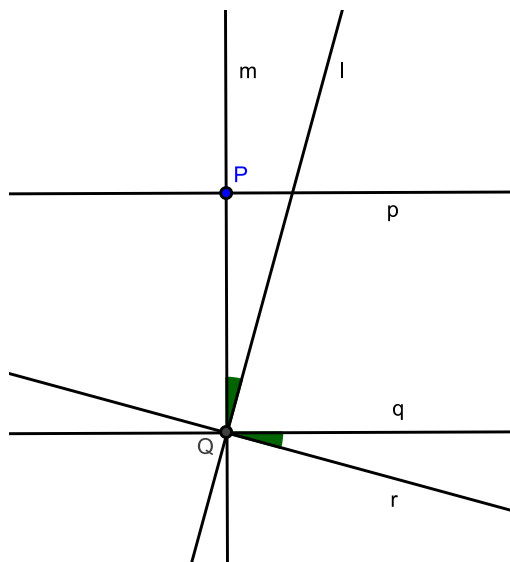


Figura 1.42: Demonstração do Teorema 1.50, 2.º caso.

Teorema 1.51. *Se γ é uma reflexão deslizante com eixo de deslocamento c e α é uma isometria, então $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ é uma reflexão deslizante com eixo de deslocamento $\alpha(c)$.*

Demonstração. Suponhamos que γ é uma reflexão deslizante com eixo de deslocamento c e que α é uma isometria. Pelo Teorema 1.49, $\gamma^2 \neq \iota$, pois γ^2 é uma translação

não trivial que fixa c . Logo, pelo Lema 1.39, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ não é uma isometria involutiva. Por outro lado, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ é uma isometria ímpar que fixa $\alpha(c)$, porque γ também é uma isometria ímpar (Lema 1.40) e $\alpha\gamma\alpha^{-1}\alpha(c) = \alpha\gamma(c) = \alpha(c)$. Assim, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ é uma reflexão ou é igual ao produto de três reflexões (Teorema 1.36). Como a reflexão é involutiva, concluímos que $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ é igual ao produto de três reflexões em retas que não são concorrentes num ponto nem têm uma perpendicular em comum (pois se tal acontecer, pelos Teoremas 1.27 e 1.29, o produto das três reflexões reduz-se a uma só reflexão), sendo portanto uma reflexão deslizante (Teorema 1.50). Como fixa a reta $\alpha(c)$, $\alpha\gamma\alpha^{-1}$ é a reflexão deslizante de eixo de deslocamento $\alpha(c)$. \square

1.14 Classificação das isometrias do plano

Nesta secção, procedemos à classificação das isometrias do plano.

Teorema 1.52. *Uma isometria ímpar é um reflexão ou uma reflexão deslizante.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.36, sabemos que uma isometria ímpar é uma reflexão ou o produto de três reflexões. Por outro lado, dos Teoremas 1.27 e 1.29, concluímos que o produto de três reflexões é igual a uma reflexão no caso em que os três eixos são concorrentes num ponto ou no caso em que são perpendiculares a uma quarta reta. Nos restantes casos, ficou provado no Teorema 1.50 que o produto de três reflexões é uma reflexão deslizante. Logo, uma isometria ímpar é uma reflexão ou uma reflexão deslizante, conforme se pretendia demonstrar. \square

Teorema 1.53. *Uma isometria par é uma rotação ou uma translação ou a identidade.*

Demonstração. De acordo com o Teorema 1.36, uma isometria par é igual ao produto de duas reflexões. Por outro lado, no Teorema 1.30, conclui-se que o produto de duas reflexões é igual a uma rotação, a uma translação ou à identidade. Por conseguinte, uma isometria par é uma rotação, uma translação ou a identidade, conforme se pretendia demonstrar. \square

Podemos, agora, apresentar o teorema de classificação das isometrias do plano.

Teorema 1.54. *Uma isometria não trivial do plano é uma translação, uma rotação, uma reflexão ou uma reflexão deslizante.*

Demonstração. A demonstração é imediata tendo em conta os Teoremas 1.52 e 1.53. \square

A partir destes resultados, podemos retirar algumas conclusões interessantes, por exemplo, ao revisitar o Teorema 1.23. Verificou-se que, se os triângulos $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ são congruentes, então existe uma única isometria α tal que $\alpha(A) = D$, $\alpha(B) = E$ e $\alpha(C) = F$. No Teorema 1.21, provou-se a existência de uma isometria nestas condições. Considerou-se, para tal, dois casos. No primeiro caso, supôs-se que os triângulos tinham a mesma orientação e a isometria encontrada resultou do produto de uma translação com uma rotação, portanto, do produto de duas isometrias pares. Para o segundo caso, em que se considerou os triângulos com orientações diferentes, a isometria foi obtida do produto de uma reflexão com uma rotação, ou seja, do produto de uma isometria ímpar com uma isometria par. Posto isto, o próximo teorema fica demonstrado.

Teorema 1.55. *Se os triângulos $\triangle[ABC]$ e $\triangle[DEF]$ são congruentes, então a única isometria α tal que $\alpha(A) = D$, $\alpha(B) = E$ e $\alpha(C) = F$ é:*

- (a) *uma isometria par (uma translação não trivial, uma rotação não trivial ou a identidade) se os triângulos apresentam a mesma orientação;*
- (b) *uma isometria ímpar (uma reflexão ou uma reflexão deslizante) se os triângulos apresentam orientações diferentes.*

Este resultado não é surpreendente se tivermos em conta uma propriedade das quatro isometrias básicas, que decorre das respetivas definições: as isometrias pares preservam a orientação dos ângulos, enquanto que as isometrias ímpares invertem a orientação dos ângulos.

Capítulo 2

Simetrias de uma figura plana

2.1 O conceito intuitivo de simetria

Em todas as culturas do mundo, incluindo as que remontam aos tempos pré-históricos, o ser humano desenvolveu uma compreensão intuitiva do conceito de simetria, interpretando-a como uma harmonia das proporções. Em linguagem corrente, “simetria” é um conceito vago, que está em geral associado a algo que torna os objetos e as figuras visualmente “agradáveis”.

Segundo Ian Stewart, um conhecido matemático britânico, “a mente e a cultura humanas desenvolveram um sistema formal de pensamento para recolher, classificar e explorar padrões. Chamamos-lhe «Matemática». [...] Usando a Matemática para organizar e sistematizar as nossas ideias sobre padrões, descobrimos um grande segredo: os padrões da Natureza não se encontram lá apenas para serem admirados, são pistas vitais para as regras que governam os processos naturais” [27]. Os padrões criados pelo Homem, nas suas diferentes manifestações artísticas, constituíram precisamente uma forma de imitar a simetria que admirava na Natureza.

A simetria tem uma presença importante na Natureza e na Arte e a Matemática está na raiz da análise dessa presença. A arqueóloga Dorothy Washburn e o matemático Donald Crowe desenvolveram em [32, 33] um estudo exaustivo das simetrias que caracterizam os padrões provenientes de muitas culturas à volta do mundo. Este trabalho inspirador apresenta uma análise da estrutura simétrica de muitos padrões

em estreita ligação com diversos aspetos culturais. Os investigadores analisam bordados Nazca, têxteis Quechua, miçangas Zulu, objetos de cerâmica do Vale Sagrado dos Incas, entre outros exemplos. Nesta linha, destaca-se também o trabalho de Peter Stevens [26], que apresenta uma compilação muito interessante de padrões de diferentes proveniências, organizados de acordo com a sua classificação matemática.

Note-se que o trabalho do matemático consiste, precisamente, em encontrar, estudar e classificar todo o tipo de padrões. Esta tarefa, por vezes árdua, ajuda-nos a compreender melhor a realidade que nos rodeia. Ao tentar classificar, quanto aos tipos de simetria, os padrões geométricos que encontramos no nosso caminho, percebemos melhor como funciona o trabalho de um matemático e a sua preocupação em organizar a informação “por prateleiras”, de acordo com determinados critérios estabelecidos previamente.

Em seguida, apresentamos uma abordagem informal ao conceito de simetria. No livro que publicou recentemente, Eduardo Veloso [30] introduz o tema de forma magistral, apelando à intuição do leitor. Começa por observar que há figuras com “mais simetria” do que outras. Por exemplo um quadrado é “mais simétrico” do que um retângulo. Mas qual será o motivo por detrás dessa diferença? Por enquanto, o conceito de “simetria” continua vago, há que defini-lo com maior rigor.

Encontramos simetria numa figura sempre que uma determinada transformação mantém a figura invariante na medida em que, depois de submetida a essa transformação, a figura permanece globalmente inalterável¹. Uma transformação que satisfaça estes requisitos diz-se uma *simetria* da figura.

Desde logo, há uma consequência que se destaca da definição de simetria: as transformações utilizadas têm de ser isometrias, pois para que a figura permaneça invariante é condição necessária que as distâncias entre os seus pontos não se alterem. Desta forma, as transformações utilizadas terão que ser reflexões, translações, rotações ou reflexões deslizantes. Contudo, esta não é uma condição suficiente, uma vez que as figuras deverão permanecer globalmente invariantes e, portanto, na “mesma posição”. Isto significa que, para que uma isometria seja uma simetria de uma figura, a figura por ela transformada deve sobrepor-se à figura inicial.

¹Esta propriedade diz respeito ao “todo” e não às suas “partes”, o que significa que alguns dos pontos da figura poderão não permanecer na mesma posição depois de aplicada a transformação.

Antes de apresentar uma definição formal de simetria, vejamos, através de um exemplo, o valor deste conceito quando comparamos figuras. Consideremos três triângulos: um escaleno, um isósceles e um equilátero (Figura 2.1).

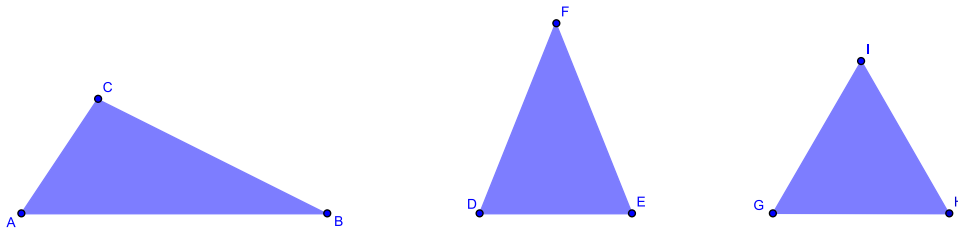


Figura 2.1: Triângulos escaleno, isósceles e equilátero.

A “harmonia” do triângulo equilátero é maior do que a do triângulo isósceles e a deste maior que a do triângulo escaleno. Vamos contar as simetrias de cada triângulo para fazer essa avaliação.

Analisemos, em primeiro lugar, o triângulo escaleno. Que transformações poderemos realizar de modo a que a figura fique invariante? Percebemos rapidamente que existe apenas uma simetria que deixa o triângulo escaleno invariante, que consiste em não fazer movimento algum. Ou seja, esta simetria do triângulo escaleno não é mais do que a isometria identidade (Figura 2.2).

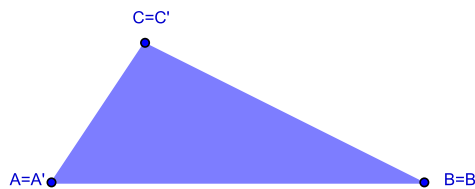


Figura 2.2: Simetrias do triângulo escaleno.

Vejamos agora quantas simetrias tem o triângulo isósceles. Além da identidade, percebemos que temos outro modo de fazer coincidir a figura transformada com a figura inicial. Como se reconhece imediatamente, esta simetria, em termos de isometrias, corresponde à reflexão de eixo f (Figura 2.3). Assim, identificamos duas simetrias para o triângulo isósceles.

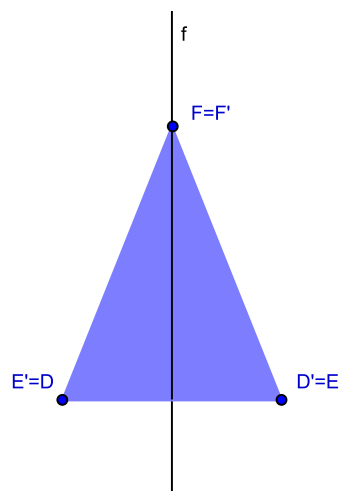


Figura 2.3: Simetrias do triângulo isósceles.

Por último, analisemos quantas simetrias tem o triângulo equilátero. Recorrendo a um procedimento análogo ao caso anterior, percebemos claramente a existência de três simetrias de reflexão: reflexão de eixo i , reflexão de eixo g e reflexão de eixo h (Figura 2.4).

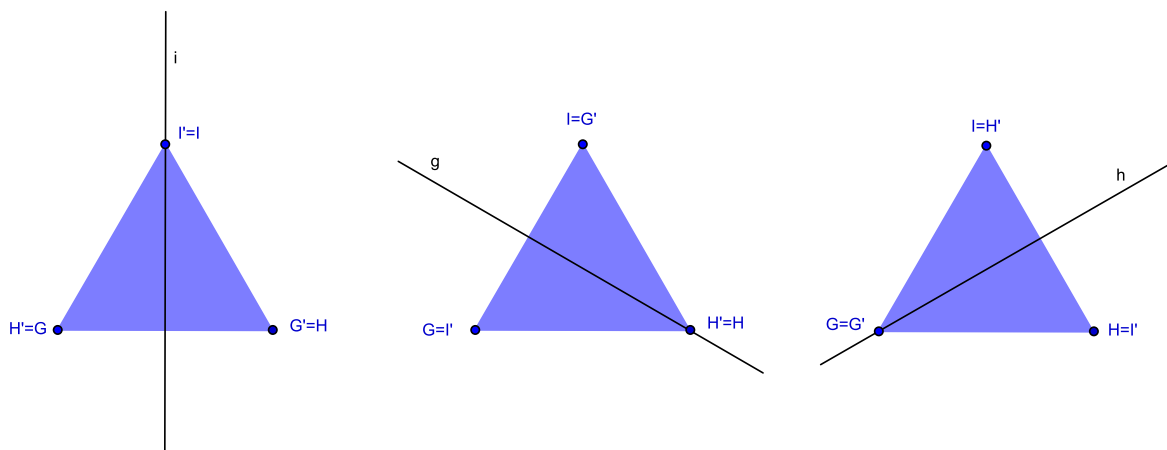


Figura 2.4: Simetrias de reflexão do triângulo equilátero.

Outro tipo de transformação que deixa invariante o triângulo equilátero consiste numa rotação de 120° em torno do centro do triângulo equilátero. Todos os pontos do triângulo equilátero, exceto o centro, mudam de posição mas no entanto, depois de aplicar a rotação, o triângulo inicial e o triângulo final coincidem.

Note-se que a sobreposição também pode ser obtida com rotações, com o mesmo centro, de 240° e de 360° . No entanto, a rotação de 360° mantém todos os pontos do triângulo fixos. Estamos, assim, perante uma simetria que já tinha sido considerada, a identidade (Figura 2.5).

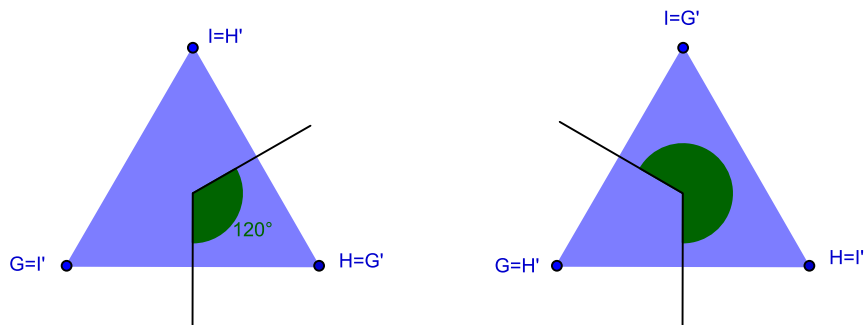


Figura 2.5: Simetrias de rotação não triviais do triângulo equilátero.

Finalizado o estudo dos três triângulos, a contagem das simetrias distingue-os de forma expressiva:

- uma simetria para o triângulo escaleno: a isometria identidade (que fixa todos os pontos do plano);
- duas simetrias para o triângulo isósceles: a identidade e uma simetria de reflexão;
- seis simetrias para o triângulo equilátero: a identidade, duas simetrias de rotação não triviais e três simetrias de reflexão.

2.2 Definição matemática de simetria

Considere-se uma figura \mathfrak{F} do plano (conjunto de pontos do plano). Seja $\alpha \in \mathfrak{T}$ uma isometria e denote-se por \mathfrak{F}' a imagem de \mathfrak{F} por meio de α , $\mathfrak{F}' = \alpha(\mathfrak{F})$. A isometria α diz-se uma *simetria* da figura \mathfrak{F} se $\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}$. Nestas condições, diz-se que α deixa a figura \mathfrak{F} globalmente invariante ou que fixa \mathfrak{F} .

Seja \mathfrak{F} uma figura qualquer. Procurar as simetrias de \mathfrak{F} traduz-se, portanto, em encontrar as isometrias do plano que deixam \mathfrak{F} invariante. Sabemos, pelo Teorema 1.54, que existem apenas quatro tipos de isometrias: as reflexões, as translações, as rotações e as reflexões deslizantes.

Em seguida, classificamos as simetrias de uma dada figura. Antes recordamos que uma *rotação de ordem n* , para um determinado $n \in \mathbb{N}$, é uma rotação associada a um ângulo de amplitude $360/n$ graus.

Se uma reflexão, uma translação, uma rotação de ordem n ou uma reflexão deslizante deixa uma determinada figura globalmente invariante, diz-se que essa figura tem, respetivamente, uma

- *simetria de reflexão* (ou *simetria axial*); o eixo de reflexão designa-se por *eixo de simetria* da figura;
- *simetria de translação* (ou *simetria translacional*);
- *simetria de rotação de ordem n* (ou *simetria rotacional de ordem n*);
- *simetria de reflexão deslizante*.

Se uma rotação de ordem 2, ou seja, uma rotação de 180° , também designada por *meia-volta*, deixa uma figura globalmente invariante, dizemos que essa figura tem uma *simetria central*. O centro de rotação da meia-volta designa-se, neste caso, por *ponto de simetria* da figura.

No caso geral, um ponto P diz-se um *centro de ordem n* de uma figura, para um determinado $n \in \mathbb{N}$, se a figura tiver uma simetria de rotação de ordem n centrada nesse ponto.

Definido o conceito de simetria de uma figura, é chegado o momento de aplicar esse conceito ao estudo das simetrias das figuras do plano.

2.3 Grupo de simetria: definição e propriedades

Dada uma figura \mathfrak{F} , designa-se por $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ o conjunto das simetrias de \mathfrak{F} , ou seja, o conjunto das isometrias do plano que deixam \mathfrak{F} (globalmente) invariante.

Prova-se, de seguida, que este conjunto, munido da composição de funções, é um grupo (subgrupo do grupo \mathcal{I} de todas as isometrias do plano).

Teorema 2.1. *Seja \mathfrak{F} uma figura qualquer do plano. O conjunto $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ das suas simetrias admite uma estrutura de grupo em relação à composição ou produto de funções.*

Demonstração. Seja \mathfrak{F} uma figura do plano. A isometria identidade, ι , fixa todos os pontos do plano e, portanto, todas as figuras. Desta forma, pertence trivialmente a $\text{Sim}(\mathfrak{F})$. Além disso, se α e β são simetrias de \mathfrak{F} , o seu produto $\alpha \circ \beta$ é uma simetria de \mathfrak{F} , uma vez que

$$\alpha \circ \beta(\mathfrak{F}) = \alpha(\beta(\mathfrak{F})) = \alpha(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}.$$

Por fim, Se α é uma simetria de \mathfrak{F} , a sua inversa α^{-1} é também uma simetria de \mathfrak{F} , pois

$$\alpha^{-1}(\mathfrak{F}) = \alpha^{-1}(\alpha(\mathfrak{F})) = \iota(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F},$$

o que permite concluir o pretendido. □

Como consequência deste resultado e do Teorema 1.14 d), concluímos que se uma figura tiver um centro de rotação de ordem n num ponto C , então o seu grupo de simetria deverá conter n simetrias de rotação: a rotação de centro C e de amplitude $360/n$ graus e todas as outras centradas no mesmo ponto cuja amplitude é um múltiplo desse valor.

Vejamos dois resultados que decorrem do teorema anterior.

Teorema 2.2. *Se m for um eixo de simetria de uma figura \mathfrak{F} e α uma simetria de \mathfrak{F} , então $\alpha(m)$ é um eixo de simetria de \mathfrak{F} .*

Demonstração. Seja m um eixo de simetria de uma figura \mathfrak{F} . Então, por definição, R_m é uma simetria de \mathfrak{F} . Como α é uma simetria de \mathfrak{F} e $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ um grupo, concluímos

que $\alpha R_m \alpha^{-1}$ pertence $\text{Sim}(\mathfrak{F})$. Mas, pelo Teorema 1.41,

$$\alpha R_m \alpha^{-1} = R_{\alpha(m)}.$$

Logo, $R_{\alpha(m)}$ também é uma simetria de \mathfrak{F} , pelo que $\alpha(m)$ é um eixo de simetria da figura \mathfrak{F} . \square

Teorema 2.3. *Se P for um ponto de simetria de uma figura \mathfrak{F} e α uma simetria de \mathfrak{F} , então $\alpha(P)$ é um ponto de simetria de \mathfrak{F} .*

Demonstração. Demonstração análoga à do teorema anterior. \square

2.4 Grupo de simetria: alguns exemplos demonstrativos

Nesta secção, pretendemos identificar grupos de simetria de figuras planas. Utilizaremos, para isso, alguns exemplos resultantes do levantamento efetuado nas calçadas da Ilha de São Miguel, nos Açores. A recolha completa será objeto da nossa atenção na Parte II deste trabalho.

Encontramos padrões matemáticos sempre que observamos um motivo que se repete sucessivamente. Para a classificação matemática desses padrões, não interessa propriamente se o motivo é uma estrela, uma cobra, um desenho abstrato ou outra coisa qualquer, mas sim o modo como se processa essa repetição. Por outras palavras, interessa-nos estudar as isometrias do plano que deixam uma determinada figura invariante, caracterizando, por conseguinte, o grupo de simetria dessa figura.

Para facilitar esta análise matemática, devemos considerar os padrões da arte decorativa que nos interessam estudar como figuras do plano. Além disso, devemos nos abstrair de pequenas imperfeições ou irregularidades que possam existir e trabalhar com apenas duas cores. Em cada uma das figuras estudadas, uma das cores é o fundo (a cor do plano) e a outra cor é a que é utilizada para desenhar a figura, ou seja, é a que corresponde aos pontos que estão assinalados no plano. Seguimos as convenções adotadas por Eduardo Veloso em [30]. Também é possível trabalhar com uma maior variedade de cores. Para um maior desenvolvimento, aconselha-se a leitura de [31, 32].

Procuraremos as simetrias de uma dada figura seguindo sempre a mesma ordem, por uma questão de uniformização de procedimento. Assim, investigaremos as simetrias pela seguinte ordem:

1. simetrias de translação;
2. simetrias de rotação;
3. simetrias de reflexão;
4. simetrias de reflexão deslizante.

Em seguida, analisam-se alguns exemplos.

Exemplo A

No exemplo da Figura 2.6, o grupo de simetria:

1. não tem simetrias de translação;
2. tem uma simetria de rotação, a identidade (ângulo de 0°);
3. tem uma simetria de reflexão, de eixo a ;
4. não tem simetrias de reflexão deslizante.

Exemplo B

No exemplo da Figura 2.7, o grupo de simetria:

1. não tem simetrias de translação;
2. tem 5 simetrias de rotação. As 5 rotações têm ângulos de 72° e dos seus múltiplos: 72° , 144° , 216° , 288° e 360° (a identidade);
3. não tem simetrias de reflexão (os X's são curvos);
4. não tem simetrias de reflexão deslizante.

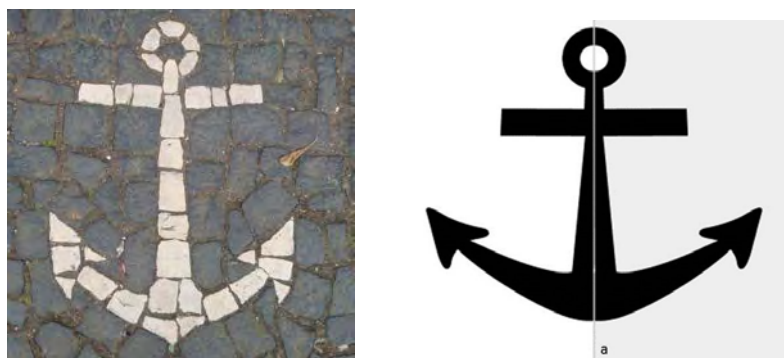


Figura 2.6: Exemplo A.



Figura 2.7: Exemplo B.

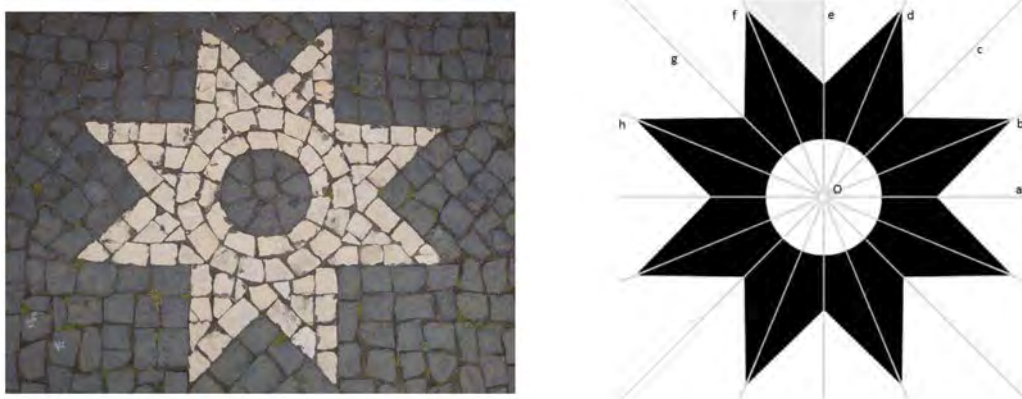


Figura 2.8: Exemplo C.

Exemplo C

No exemplo da Figura 2.8, podemos concluir que o grupo de simetria:

1. não tem simetrias de translação;
2. tem 8 simetrias de rotação, de centro O. As 8 rotações têm ângulos de 45° e dos seus múltiplos: 45° , 90° , 135° , 180° , 225° , 270° , 315° e 360° (a identidade);
3. tem 8 simetrias de reflexão, de eixos a , b , c , d , e , f , g e h ;
4. não tem simetrias de reflexão deslizante.

Exemplo D

No caso da Figura 2.9, o grupo de simetria é constituído por:

1. simetrias de translação (em número infinito); o vetor \overrightarrow{PQ} é o vetor de menor comprimento que permite definir uma simetria de translação; dizemos que a translação $T = T_{\overrightarrow{PQ}}$ tem *módulo mínimo*; todas as potências de expoente inteiro de T , T^n , são simetrias de translação da figura (note-se que $T^0 = \iota$ e $T_{\vec{u}}^{-1} = T_{-\vec{u}}$);
2. simetrias de meia-volta (em número infinito), estando indicados no esboço 5 pontos de simetria;
3. não tem simetrias de reflexão;
4. não tem simetrias de reflexão deslizante.

Exemplo E

Em relação à Figura 2.10, o grupo de simetria é constituído por:

1. simetrias de translação (em número infinito); o vetor \overrightarrow{PQ} define a translação $T = T_{\overrightarrow{PQ}}$ de módulo mínimo; as simetrias de translação são todas as potências de expoente inteiro de T ;

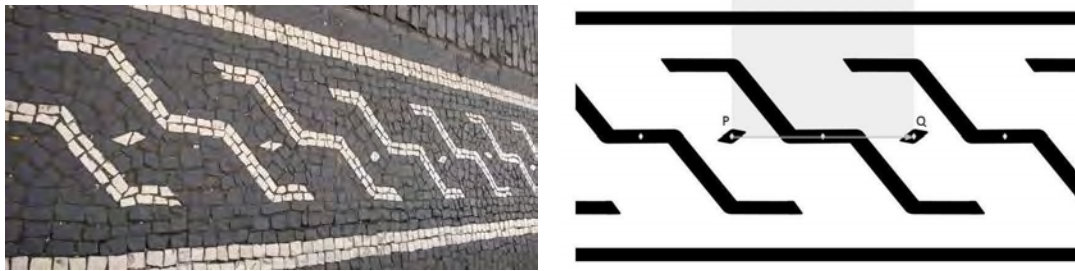


Figura 2.9: Exemplo D.

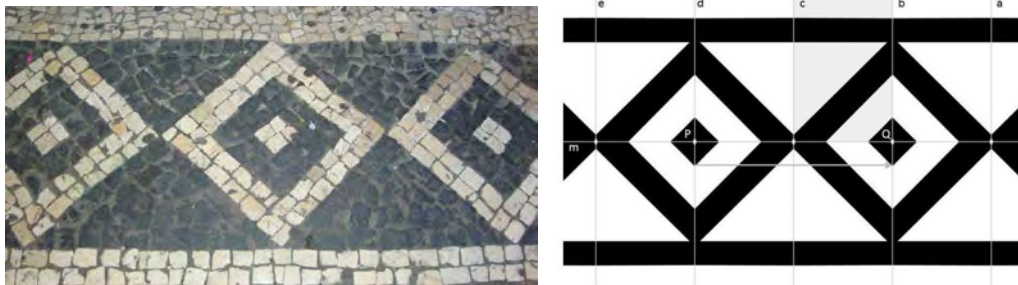


Figura 2.10: Exemplo E.



Figura 2.11: Exemplo F.

2. simetrias de meia-volta (em número infinito), com os pontos de simetria pertencentes à reta m representada na Figura 2.10; estão assinalados 5 pontos de simetria; dois centros de rotação consecutivos distam entre si metade do comprimento do vetor \overrightarrow{PQ} ;
3. uma simetria de reflexão de eixo m e simetrias de reflexão de eixos perpendiculares a m (em número infinito); estão assinalados 5 eixos: a , b , c , d , e e ; as intersecções destes eixos com a reta m coincidem com os pontos de simetria;
4. não tem simetrias de reflexão deslizante que não sejam triviais (isto é, produtos da simetria de reflexão de eixo m com uma qualquer das simetrias de translação).

Exemplo F

No caso da Figura 2.11, o grupo de simetria é constituído por:

1. simetrias de translação (em número infinito); os vetores \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{RS} definem duas translações, T e S , com direções diferentes e de módulo mínimo; as simetrias de translação são da forma $S^n T^m$, com $m, n \in \mathbb{Z}$;
2. não tem simetrias de rotação;
3. simetrias de reflexão (em número infinito), de eixos paralelos; estão assinalados 7 eixos: a , b , c , d , e , f e g ;
4. não tem simetrias de reflexão deslizante que não sejam triviais.

Exemplo G

Em relação à Figura 2.12, o grupo de simetria é constituído por:

1. simetrias de translação (em número infinito); os vetores \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{CD} definem duas translações, T e S , com direções diferentes e de módulo mínimo; as simetrias de translação são da forma $S^n T^m$, com $m, n \in \mathbb{Z}$;
2. simetrias de rotação (em número infinito), com centros de ordem 2 (ângulos de 180° e 360°) e de ordem 4 (ângulos de 90° , 180° , 270° e 360°); os pontos A , B ,

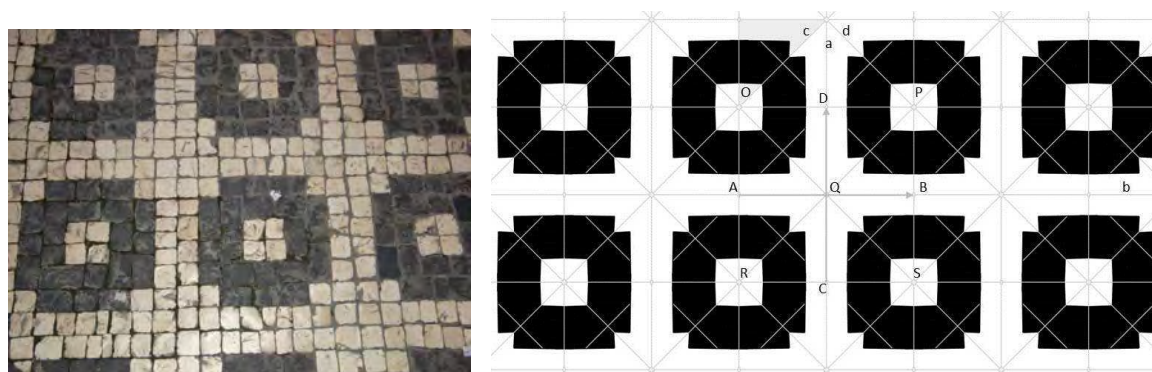


Figura 2.12: Exemplo G.

C e D são centros de rotação de ordem 2, enquanto que O , P , Q , R e S são centros de rotação de ordem 4;

3. simetrias de reflexão (em número infinito), com eixos segundo quatro direções distintas (estão representados no esboço os eixos a , b , c e d); os centros de rotação de ordem 4 são pontos de intersecção de 4 eixos de simetria, que formam entre si ângulos de 45° ; pelos centros de rotação de ordem 2 também passam dois eixos de simetria perpendiculares;
4. simetrias de reflexão deslizante não triviais (em número infinito), segundo duas direções distintas (os eixos de deslocamento estão representados a tracejado na figura); os eixos de deslocamento são perpendiculares e intersectam-se nos centros de rotação de ordem 2; entre dois eixos de deslocamento consecutivos existe um eixo de reflexão paralelo a ambos; a distância do eixo de reflexão a qualquer um dos eixos de deslocamento é metade da distância entre os eixos de deslocamento.

Breves considerações sobre os exemplos apresentados

Distinguimos claramente três tipos de figuras:

- figuras limitadas, que não têm simetrias de translação ou de reflexão deslizante; estas figuras apresentam sempre simetrias de rotação (no mínimo, a identidade),

podendo ter ou não simetrias de reflexão (exemplos A , B e C); chamam-se *rosáceas*;

- figuras formadas pela repetição de um motivo ao longo de uma faixa, estendendo-se indefinidamente para a esquerda e para a direita (exemplos D e E); são os *frisos*;
- figuras formadas pela repetição de um motivo no plano, indefinidamente e em todas as direções (exemplos F e G); são os chamados *padrões bidimensionais* ou *papéis de parede*².

2.5 Dos grupos de rosáceas aos grupos de padrões bidimensionais

Nesta secção, pretende-se determinar o grupo de simetria do conjunto de pontos formado pelos vértices de um polígono regular. Por simplificação, passaremos a designar este grupo por *grupo de simetria de um polígono regular*. Falaremos também em grupos de simetria de outros polígonos. Consideremos as seguintes definições.

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n pontos distintos e $P_{n+1} = P_1, P_{n+2} = P_2$. Se os segmentos de reta $[P_i P_{i+1}]$, $i = 1, 2, \dots, n$, não tiverem pontos em comum para além dos extremos, a união dos segmentos $[P_i P_{i+1}]$ forma uma linha poligonal fechada que define o *polígono de vértices* P_i , denotado por $[P_1 P_2 \dots P_n]$. Este polígono tem lados $[P_i P_{i+1}]$ e ângulos $\angle P_i P_{i+1} P_{i+2}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Um conjunto de pontos do plano diz-se *convexo* se, para quaisquer dois pontos A e B desse conjunto, todos os pontos entre A e B pertencerem também ao conjunto considerado, ou seja, se o segmento $[AB]$ estiver contido nesse conjunto. Um polígono regular é um polígono convexo com todos os lados e todos os ângulos congruentes.

²Alguns autores designam estas figuras simplesmente por *padrões*. Optou-se por não seguir esta terminologia, de forma a que a palavra “padrão” possa designar, sem ambiguidade, qualquer tipo de figura que apresente um motivo que se repita. Por outras palavras, ao longo deste texto, um padrão pode ser uma rosácea, um friso ou um padrão bidimensional.

Consideremos o caso particular de um quadrado $[ABCD]$ centrado na origem do referencial Oxy e com um vértice sobre a parte positiva do eixo Ox , conforme se ilustra na Figura 2.13.

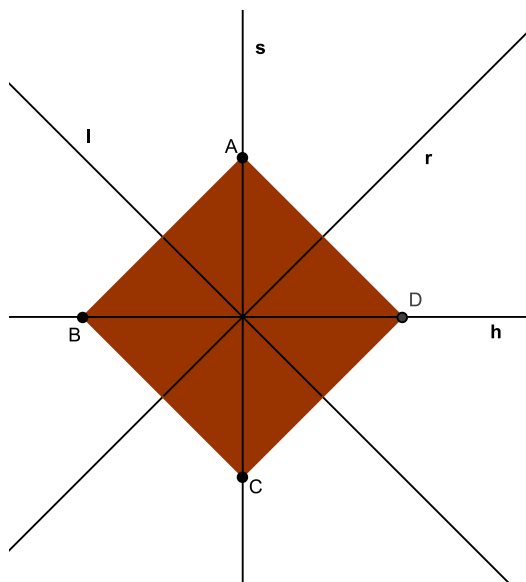


Figura 2.13: Simetrias do quadrado.

Conclui-se, sem dificuldade, que o quadrado permanece invariante quando sujeito à rotação de centro O e amplitude 90° , $\rho = R_{O,90^\circ}$, e à reflexão $\sigma = R_h$, em que h coincide com o eixo Ox . Para além disso, tem-se $\rho^4 = \sigma^2 = \iota$. Mas, de acordo com o Teorema 2.1, as simetrias de uma figura do plano formam um grupo, pelo que o quadrado é invariante para as quatro rotações $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$ e para as quatro isometrias ímpares $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma$ (reflexões de eixos, respetivamente, r, s, l e h). Observe-se que, pelo Teorema 1.28, uma rotação pode ser escrita como o produto de duas reflexões, o que implica que $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma$ sejam isometrias ímpares (neste caso, são reflexões), enquanto que $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$ são isometrias pares.

Como A e B são dois vértices adjacentes, as suas imagens por aplicação de uma determinada simetria do quadrado também terão que ser vértices adjacentes do quadrado. Assim, há quatro possibilidades para a imagem do vértice A . Fixada a imagem de A , só há duas possibilidades para a imagem de B , ficando as imagens dos restantes vértices completamente definidas. Logo, existem no máximo $4 \times 2 = 8$ simetrias diferentes, precisamente as 8 simetrias que já foram indicadas. Por conseguinte, o grupo

das simetrias do quadrado é gerado pela rotação ρ e pela reflexão σ , ou seja, o grupo das simetrias do quadrado é $\langle \rho, \sigma \rangle$, que é um grupo de ordem 8, denotado por D_4 . Note-se que $\langle \rho, \sigma \rangle$ representa o grupo gerado por ρ e σ .

As seguintes igualdades são de fácil verificação:

$$\rho = \rho^{-3}; \quad \rho^2 = \rho^{-2}; \quad \rho^3 = \rho^{-1}; \quad \rho\sigma = \sigma\rho^3; \quad \rho^2\sigma = \sigma\rho^2; \quad \rho^3\sigma = \sigma\rho.$$

Em seguida, construímos a tabela de Cayley do grupo D_4 . O preenchimento da tabela até à quarta linha resulta de cálculos simples e do facto de $\rho^4 = \iota$. Para obter os elementos da quinta linha, usam-se as igualdades anteriores, que também podem ser deduzidas da forma que se segue. Note-se que $\sigma\rho^k$ é uma isometria involutiva, o que resulta do facto de $\sigma\rho^k$ ser uma reflexão cujo eixo passa por O . De facto, pelo Teorema 1.14 d), como ρ é uma rotação de centro O , ρ^k é ainda uma rotação com o mesmo centro. Aplicando os Teoremas 1.28 e 1.29, segue-se que $\sigma\rho^k$ tem que ser uma reflexão cujo eixo ainda passa por O . Logo, segue-se que

$$\sigma\rho^k = (\sigma\rho^k)^{-1} = \rho^{-k}\sigma = \rho^{4-k}\sigma,$$

uma vez que $\rho^4 = \iota$. Para preencher as restantes linhas, basta multiplicar a quinta linha, respetivamente, por ρ , ρ^2 e ρ^3 , e ter em conta que $\rho^4 = \iota$.

D_4	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
ι	ι	ρ	ρ^2	ρ^3	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	ρ^3	ι	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	ρ^3	ι	ρ	$\rho^2\sigma$	$\rho^3\sigma$	σ	$\rho\sigma$
ρ^3	ρ^3	ι	ρ	ρ^2	$\rho^3\sigma$	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
σ	σ	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	ι	ρ^3	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	ρ	ι	ρ^3	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^3\sigma$	ρ^2	ρ	ι	ρ^3
$\rho^3\sigma$	$\rho^3\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^3	ρ^2	ρ	ι

Passamos, agora, para o caso geral. Considere-se um n -ágono regular com $n > 2$, centrado na origem com um vértice no semi-eixo positivo das abcissas. O n -ágono regular é fixo por $\rho = R_{O, \frac{360^\circ}{n}}$ e pela reflexão $\sigma = R_h$, em que h coincide com o eixo das abcissas.

Observe-se, ainda, que $\rho^n = \sigma^2 = \iota$. Uma vez que as simetrias do n -ágono regular formam um grupo, então o n -ágono regular é invariante para as n simetrias pares $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n$ e para as n simetrias ímpares $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \dots, \rho^n\sigma$, o que significa que o grupo das simetrias do n -ágono regular tem pelo menos $2n$ simetrias distintas. Por outro lado, sendo A e B dois vértices adjacentes, uma simetria arbitrária do n -ágono tem que aplicar A num dos n vértices do polígono regular e B num dos dois vértices adjacentes à imagem de A , ficando as imagens dos restantes vértices completamente determinadas. Portanto, há no máximo $n \times 2 = 2n$ simetrias possíveis, donde se conclui que existem exatamente $2n$ simetrias que são as que já foram identificadas. Por conseguinte, as simetrias ρ e σ geram o grupo das simetrias do n -ágono regular, que tem ordem $2n$ e é representado por D_n :

$$D_n = \langle \rho, \sigma \rangle = \{ \rho, \rho^2, \dots, \rho^n, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma \} = \{ \iota, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^{n-1}\sigma \}.$$

Os grupos D_n , com $n \in \mathbb{N}$, chamam-se *grupos diedrais*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos definir o subgrupo de D_n contendo todas as isometrias pares de D_n . Este grupo designa-se por *grupo cíclico* de ordem n , representa-se por C_n e é gerado por $\rho = R_{O, \frac{360^\circ}{n}}$, ou seja, $C_n = \langle \rho \rangle$.

Prova-se que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um polígono com grupo de simetria C_n e um polígono com grupo de simetria D_n . De facto, os grupos D_1 e D_2 são os grupos de simetria, respetivamente, de um triângulo isósceles, que não seja equilátero, e de um retângulo, que não seja um quadrado. Os subgrupos C_1 e C_2 são os grupos de simetria, respetivamente, de um triângulo escaleno e de um paralelogramo, que não seja um losango. Para $n > 2$, D_n é o grupo de simetria de um polígono regular de

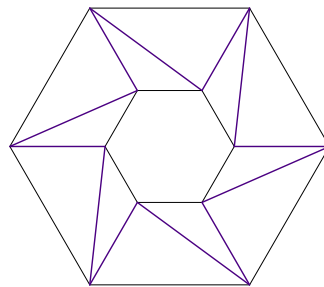


Figura 2.14: Polígono de 12 lados com grupo de simetria C_6 .

n lados e o seu subgrupo C_n é o grupo de simetria de um polígono de $2n$ lados que se obtém de um polígono regular de n lados por um processo como o ilustrado na Figura 2.14, no caso de $n = 6$. Para um maior desenvolvimento, consultar [13].

Segue-se um resultado importante que é atribuído frequentemente a Leonardo Da Vinci (1452–1519). Antes, provamos o lema que se segue.

Lema 2.4. *Se um grupo de isometrias contiver uma translação não trivial ou uma reflexão deslizante, então esse grupo é infinito.*

Demonstração. Seja G um grupo que contém uma translação T . Por ser um grupo, G tem que conter T^2 , o produto de T por si própria. O mesmo se passa com qualquer potência de expoente inteiro de T . Essas potências são diferentes umas das outras, de acordo com o Teorema 1.13 d), desde que $T \neq \iota$. Assim, existe um número infinito de elementos de G .

Suponhamos, agora, que G contém uma reflexão deslizante γ . Pelo Teorema 1.49, sabemos que γ^2 é uma translação diferente da identidade que fixa o eixo de deslocamento da reflexão deslizante γ . O grupo cíclico $\langle \gamma^2 \rangle$ gerado pela translação γ^2 é infinito e contém todas as potências pares de γ , portanto, está contido no grupo cíclico $\langle \gamma \rangle$ gerado por γ , que por sua vez está contido em G . \square

Teorema 2.5. *(Leonardo Da Vinci) Um grupo finito de isometrias é um grupo cíclico C_n ou um grupo diedral D_n , para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja G um grupo finito de isometrias. De acordo com o lema anterior, G não pode conter nem translações não triviais nem reflexões deslizantes. Logo, G tem apenas rotações e/ou reflexões. Consideremos separadamente o caso em que G só contém rotações e o caso em que G contém pelo menos uma reflexão.

1.º caso Suponhamos que G é um grupo finito de isometrias contendo apenas rotações.

Neste caso, $G = C_1 = \langle \iota \rangle$ ou G contém pelo menos uma rotação diferente da identidade, digamos $R_{A,\theta}$. Suponhamos que, para além de $R_{A,\theta}$, G contém também a rotação $R_{B,\phi}$, com $B \neq A$. Como G é um grupo, então a composição $R_{A,\theta}^{-1}R_{B,\phi}^{-1}R_{A,\theta}R_{B,\phi}$ também pertence a G . Mas, pelo Teorema 1.45, a composição de rotações com centros distintos e cuja soma das amplitudes dos ângulos é congruente com 0 módulo 360 graus, tem que ser uma translação.

Então $R_{A,\theta}^{-1}R_{B,\phi}^{-1}R_{A,\theta}R_{B,\phi}$, que pertence a G , é uma translação, o que é um absurdo pois estamos a considerar o caso em que G contém apenas rotações. Logo, $B = A$ e $R_{A,\theta}^{-1}R_{B,\phi}^{-1}R_{A,\theta}R_{B,\phi} = \iota$. Desta forma, concluímos que todas as rotações diferentes da identidade em G têm centro A , ou seja, são do tipo $R_{A,\theta}$ com $0 \leq \theta < 360^\circ$.

Considere-se, agora, o menor inteiro positivo θ_0 tal que $\rho = R_{A,\theta_0}$ pertence ao grupo G . Para qualquer rotação $R_{A,\theta}$ em G , com $\theta > 0$, existe um número inteiro k tal que $k\theta_0 \leq \theta < (k+1)\theta_0$, ou seja, $0 \leq \theta - k\theta_0 < \theta_0$. Além disso, $R_{A,\theta-k\theta_0} = R_{A,\theta}R_{A,\theta_0}^{-k}$ pertence a G . Como θ_0 é o menor inteiro positivo tal que $R_{A,\theta_0} \in G$, tem-se $\theta - k\theta_0 = 0$, isto é, $\theta = k\theta_0$. Logo, $R_{A,\theta} = R_{A,\theta_0}^k$, donde se conclui que todos os elementos de G são potências da rotação com centro no ponto A e ângulo θ_0 . Por conseguinte, um grupo finito de isometrias que não contenha nenhuma reflexão é um grupo cíclico C_n , para algum $n \in \mathbb{N}$.

2.º caso Suponhamos, agora, que G é um grupo finito de isometrias contendo, pelo menos, uma reflexão. Observe-se que: a identidade é uma isometria par, pois resulta do produto de qualquer reflexão por si própria; uma isometria e a sua inversa têm a mesma paridade; e o produto de duas isometrias pares é ainda uma isometria par. Desta forma, conclui-se que o conjunto das isometrias pares de G é um subgrupo finito de G . De acordo com o caso anterior, este subgrupo é o grupo cíclico C_n , para algum $n \in \mathbb{N}$, sendo gerado por uma rotação ρ de centro A . As isometrias pares em G são dadas por $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n$, com $\rho^n = \iota$. Suponhamos que há exatamente m reflexões em G . Se σ é uma reflexão de G , as n isometrias ímpares $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \dots, \rho^n\sigma$ pertencem a G e, portanto, $n \leq m$. Por outro lado, dos produtos das m isometrias ímpares por σ à direita resultam m isometrias pares distintas, pelo que $m \leq n$. Consequentemente, $m = n$, isto é, G contém $2n$ isometrias geradas pela rotação ρ e pela reflexão σ .

Se $n = 1$, então $G = \langle \sigma \rangle$. Se $n > 1$, então $\rho^k\sigma$, com $k = 1, \dots, n$, é uma reflexão cujo eixo passa pelo ponto A . Note-se que, de acordo com o Teorema 1.28, toda a rotação escreve-se como o produto de duas reflexões cujos eixos se intersectam no centro de rotação. Por seu turno, pelo Teorema 1.29, o produto de três reflexões com eixos concorrentes num ponto ainda é uma reflexão cujo eixo passa por esse ponto.

Portanto, o grupo finito das isometrias que contém, pelo menos, uma reflexão é o grupo diedral D_n , para algum $n \in \mathbb{N}$.

□

Corolário 2.6. *O grupo de simetria de um polígono é um grupo cíclico C_n ou um grupo diedral D_n , para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A demonstração é imediata se tivermos em conta o Teorema 2.5 e o facto de um polígono com n vértices ter, no máximo, $2n$ simetrias, pelo que o grupo de simetrias de um polígono é um grupo de isometrias finito. Pelo Teorema 2.5, existem dois grupos possíveis que são o grupo diedral D_n e o grupo cíclico C_n . □

Em seguida, apresentamos as definições adotadas para rosácea, friso e padrão bidimensional. Nos capítulos 3 e 4, deduziremos a partir destas definições propriedades importantes para os diferentes tipos de grupos de simetria e procederemos às respetivas classificações. Daremos destaque às rosáceas e aos frisos, por terem sido praticamente estes os padrões que encontramos no levantamento realizado, que será objeto da nossa atenção na Parte II desta dissertação.

Se analisarmos os grupos de simetria das figuras dos exemplos A , B e C , apresentados na secção 2.4, chegamos à conclusão que estes são finitos, não existindo simetrias de translação nem de reflexão deslizante. Chama-se *rosácea* a toda a figura do plano cujo grupo de simetria é finito.

Dos resultados que obtivemos para os grupos de simetria das figuras dos exemplos D e E , apresentados na secção 2.4, sobressai uma característica comum: existe um número infinito de simetrias de translação numa única direção. Chama-se *friso* a qualquer figura plana cujo grupo de simetria verifique a seguinte condição: existe uma simetria de translação $T_{\vec{u}}$, de módulo mínimo $\vec{u} \neq \vec{0}$, tal que as simetrias de translação da figura são todas as potências de expoente inteiro de $T_{\vec{u}}$.

No caso dos exemplos F e G , analisados na secção 2.4, constatamos que os grupos de simetria contêm um número infinito de simetrias de translação em mais do que uma direção. Chama-se *padrão bidimensional* a qualquer figura plana \mathfrak{F} que tenha duas simetrias de translação, $T_{\vec{u}}$ e $T_{\vec{v}}$, de módulos $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ e com direções diferentes, tais que as simetrias de translação de \mathfrak{F} sejam os produtos $T_{\vec{v}}^n T_{\vec{u}}^m$, para m e n inteiros.

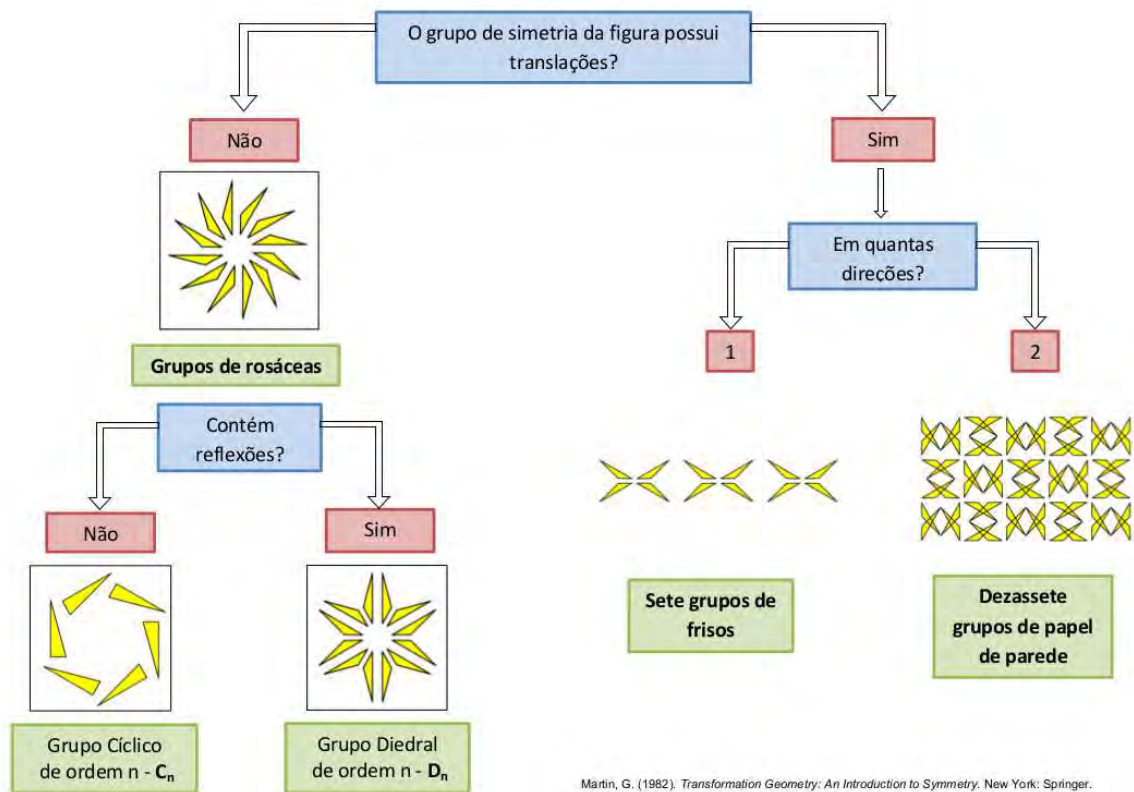


Figura 2.15: Fluxograma geral para a classificação de uma figura do plano.

Terminamos esta secção com a apresentação do fluxograma da Figura 2.15, que consta da lista de apêndices (Apêndice A). Este é o primeiro de uma série de fluxogramas, que foram desenvolvidos como forma de auxiliar a classificação das figuras planas quanto ao seu grupo de simetria.

O fluxograma da Figura 2.15 fornece a classificação geral de uma dada figura do plano, ou seja, permite identificar de uma forma rápida se a figura é uma rosácea, um friso ou um padrão bidimensional, constituindo um resumo esquemático das definições apresentadas.

Capítulo 3

Rosáceas

3.1 Consequências da definição de rosácea

Nesta secção, listam-se algumas propriedades importantes que são consequência da definição de rosácea apresentada no final do capítulo anterior.

As propriedades que se seguem surgiram naturalmente da análise dos exemplos A , B e C da secção 2.4 e foram demonstradas no Lema 2.4 e no Teorema 2.5, pelo que carecem apenas de uma reorganização formal.

Teorema 3.1. *Uma rosácea não tem simetrias de translação não triviais nem de reflexão deslizante.*

Teorema 3.2. *As simetrias de rotação de uma rosácea têm um centro comum.*

Teorema 3.3. *Se uma rosácea \mathfrak{F} tem apenas simetrias de rotação, que não se reduzem somente à identidade e que supomos em número de n , então $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ é constituído pelas rotações $\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n = \iota$, em que ρ é a simetria de rotação de menor ângulo positivo.*

Se uma rosácea \mathfrak{F} tem apenas simetrias de rotação, o seu grupo de simetria $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ tem, para um certo valor de n , uma estrutura de acordo com o teorema anterior, coincidindo, por isso, com o grupo cíclico de ordem n , C_n .

Teorema 3.4. *Se uma rosácea \mathfrak{F} tem pelo menos uma simetria de reflexão, então $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ é constituído por um número par $2n$ de simetrias, tendo n simetrias de rotação ($\rho, \rho^2, \rho^3, \dots, \rho^n = \iota$) com um centro comum e n simetrias de reflexão cujos eixos passam por aquele centro.*

Para as rosáceas nas condições do teorema anterior, o seu grupo de simetria $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ é constituído por n simetrias de rotação e por n simetrias de reflexão, coincidindo³, portanto, com o grupo diedral de ordem n , D_n .

Ficam, assim, reorganizados os vários resultados que estiveram na base da demonstração do Teorema 2.5. Note-se também que todas as simetrias de uma rosácea fixam um ponto (o centro comum das suas simetrias de rotação, por onde também passam os eixos de simetria, caso existam), que normalmente se designa por *centro* da rosácea.

3.2 Fluxograma para a determinação do tipo de rosácea

Nesta secção apresentamos o segundo fluxograma desenvolvido (Figura 3.1), que consta da lista de apêndices (Apêndice B). Constitui um instrumento auxiliar na identificação do grupo de simetria de uma rosácea.

Considere-se uma rosácea \mathfrak{F} . De acordo com o que foi provado, apenas duas situações podem ocorrer: o seu grupo de simetria é um grupo cíclico C_n (são figuras com n simetrias de rotação, onde se inclui a identidade) ou um grupo diedral D_n (são figuras com n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão).

Além disso, as simetrias de rotação têm todas o mesmo centro e estão associadas a amplitudes de $360/n$ graus e aos seus múltiplos. Os eixos de simetria, quando existem, passam todos pelo centro de rotação.

³Afirmar que “o grupo de simetria da figura \mathfrak{F} coincide com o grupo cíclico de ordem n ”, ou “com o grupo diedral de ordem n ”, não traz qualquer tipo de problema numa linguagem menos formal. Contudo, em termos formais, é mais correto afirmar que “o grupo de simetria da figura \mathfrak{F} é isomorfo ao grupo cíclico de ordem n ” ou “ao grupo diedral de ordem n ”, grupos que foram definidos na secção 2.5. Na verdade, os grupos são iguais a menos de um isomorfismo.

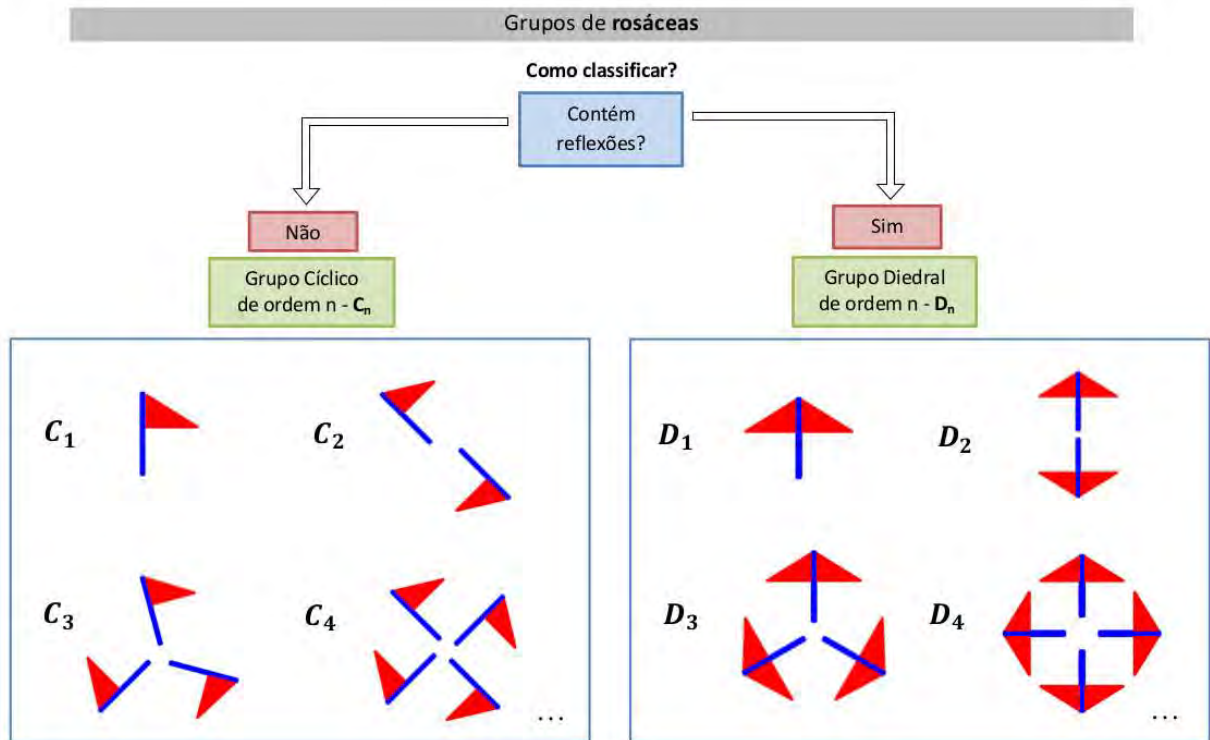


Figura 3.1: Fluxograma para a classificação das rosáceas.

Na prática, para classificar uma rosácea quanto ao seu grupo de simetria, apenas é necessário identificar o motivo que se repete em torno do centro de rotação e contar o número de repetições (n). Depois, resta verificar se só há simetrias de rotação (C) ou se também há simetrias de reflexão (D). O fluxograma da Figura 3.1 apresenta alguns exemplos, constituindo-se como um instrumento de apoio à classificação de uma rosácea quanto ao seu grupo de simetria.

Uma figura com grupo de simetria C_1 é considerada assimétrica (desprovida de simetria), uma vez que a única forma de a transformar em si própria é através da rotação trivial de $360/1 = 360$ graus (ou, se preferirmos, da identidade). Já uma figura com grupo de simetria D_1 , para além da identidade, apresenta uma simetria de reflexão.

Para o grupo de simetria C_2 , temos uma simetria de rotação de $360/2 = 180$ graus e a rotação de $180 + 180 = 360$ graus (ou seja, a identidade). Para o grupo D_2 , há ainda a considerar duas simetrias de reflexão (com eixos de simetria perpendiculares).

Por sua vez, o grupo C_3 contém as rotações de $360/3 = 120$ graus, $120 + 120 = 240$ graus e $120 + 120 + 120 = 360$ graus. Para o grupo D_3 , há que acrescentar três simetrias de reflexão. E assim sucessivamente.

3.3 Exemplos de rosáceas

Observe-se, em primeiro lugar, que as figuras dos exemplos A , B e C (Figuras 2.6, 2.7 e 2.8), da secção 2.4, têm grupos de simetria D_1 , C_5 e D_8 , respetivamente.

Ao longo desta secção, apresentamos novos exemplos de rosáceas em calçada portuguesa, que resultaram da recolha efetuada. Os exemplos estão organizados de acordo com a classificação das rosáceas.



Figura 3.2: Grupo C_1 – Candelária (Ponta Delgada).



Figura 3.3: Grupo C_1 – Água Retorta (Povoação).



Figura 3.4: Grupo C_1 – Rotunda da Autonomia (Ponta Delgada).



Figura 3.5: Grupo C_1 – Mosteiros (Ponta Delgada).



Figura 3.6: Grupo C_2 – Largo da Igreja (Vila Franca do Campo).



Figura 3.7: Grupo C_2 – Pico da Pedra (Ribeira Grande).



Figura 3.8: Grupo C_4 – Porto Formoso (Ribeira Grande).



Figura 3.9: Grupo C_5 – Algarvia (Nordeste).



Figura 3.10: Grupo C_8 – Largo da Matriz (Ponta Delgada).



Figura 3.11: Grupo D_1 – Ginetes (Ponta Delgada).



Figura 3.12: Grupo D_2 – Largo Dr. Francisco Luís Tavares (Ponta Delgada).



Figura 3.13: Grupo D_3 – Rua da Criança (Povoação).



Figura 3.14: Grupo D_4 – Pilar da Bretanha (Ponta Delgada).



Figura 3.15: Grupo D_5 – Largo da Matriz (Ponta Delgada).



Figura 3.16: Grupo D_6 – Pilar da Bretanha (Ponta Delgada).



Figura 3.17: Grupo D_8 – Campo de S. Francisco (Ponta Delgada).



Figura 3.18: Grupo D_{11} – Matriz (Ribeira Grande).

Capítulo 4

Frisos

4.1 Os sete grupos de frisos

Neste capítulo, pretendemos explorar as consequências da definição de friso apresentada no final do Capítulo 2, e proceder a uma classificação dos diferentes tipos de frisos que podemos encontrar.

Identificamos frisos em desenhos decorativos que se caracterizam pela presença de um motivo que se repete periodicamente numa única direção. Isto é, os frisos são figuras que admitem necessariamente simetrias de translação segundo uma mesma direção.

Formalmente, chama-se *friso* a qualquer figura plana cujo grupo de simetria verifique a seguinte condição: existe uma simetria de translação $T_{\vec{u}}$, de módulo mínimo $\vec{u} \neq \vec{0}$, tal que as simetrias de translação da figura são todas as potências de expoente inteiro de $T_{\vec{u}}$.

No estudo dos frisos, adotaremos algumas convenções estabelecidas por Eduardo Veloso em [30]. Nos frisos estudados, assumiremos, sem perda de generalidade, que a direção do vetor \vec{u} , que determina a translação $T_{\vec{u}}$, é “horizontal” e que o friso está contido numa faixa limitada por duas retas horizontais, o que implica a existência de uma reta horizontal m , a meia distância entre aquelas duas retas, que designamos por *eixo central do friso* (Figura 4.1). Alguns autores designam esta reta por *centro do friso* [4].



Figura 4.1: Eixo central m de um friso.

Um friso pode apresentar outras simetrias, para além das de translação. Tendo em conta a convenção estabelecida, podemos falar, sem ambiguidade, em reflexão horizontal (quando o eixo de simetria coincide com o eixo central m do friso) e em reflexões verticais (quando os eixos de simetria são perpendiculares a m).

Aliás, a existir alguma simetria de reflexão do friso, ela só poderá ser de um dos dois tipos referidos (ou seja, o eixo de simetria terá que coincidir com m ou ser perpendicular a m). Da mesma forma, a existir simetria de rotação, a sua amplitude terá de ser 180° : a chamada meia-volta. Além disso, o ponto de simetria tem que pertencer ao eixo central m do friso. A razão é simples. Como o motivo se repete ao longo de uma faixa, segundo uma única direção, a aplicação de uma rotação com amplitude diferente de 180 graus, ou com centro que não pertença a m , teria como consequência deslocar o friso para “fora da faixa” (ou seja, a figura transformada não poderia coincidir com a figura original, pelo que a transformação não seria uma simetria do friso). O mesmo se passaria se aplicássemos reflexões diferentes das referidas acima.

Também é fácil verificar que uma reflexão deslizante do plano apenas pode deixar um friso invariante se o seu eixo de deslocamento coincidir com o eixo central m do friso, o que implica que a direção da respetiva translação também tenha que ser horizontal. Além disso, se a reta m de um determinado friso for um eixo de simetria, então esse friso apresenta um número infinito de simetrias de reflexão deslizante, que resultam do produto da reflexão de eixo m com uma qualquer simetria de translação

do friso. Dizemos que estas simetrias de reflexão deslizante são *triviais*, pois os dois fatores em que se decompõem já são simetrias do friso. Por isso, não teremos em conta este tipo de simetrias. Doravante, consideraremos apenas simetrias de reflexão deslizante *não triviais* nos diferentes exemplos de frisos que estudaremos. Só poderão existir simetrias de reflexão deslizante não triviais quando o eixo central do friso não for um eixo de simetria (por exemplo, o eixo central m do friso da Figura 4.1 é um eixo de simetria, pelo que as simetrias de reflexão deslizante do friso são triviais).

Afirmar que um friso tem uma simetria de reflexão deslizante (não trivial) significa, portanto, que existe uma translação $T_{\vec{v}}$ (em que \vec{v} tem a direção do eixo central m) que composta com a reflexão R_m , de eixo m , resulta numa simetria de reflexão deslizante $R_m T_{\vec{v}}$. Note-se que $T_{\vec{v}}$ não pode ser uma simetria de translação do friso, caso contrário

$$R_m T_{\vec{v}} T_{\vec{v}}^{-1} = R_m T_{\vec{v}} T_{-\vec{v}} = R_m$$

também tem que ser uma simetria do friso, o que contradiz o pressuposto de que m não é um eixo de simetria do friso. Por outro lado, $T_{\vec{v}}^2$ tem que ser uma simetria de translação do friso. Com efeito, se $R_m T_{\vec{v}}$ é uma simetria da figura, então

$$R_m T_{\vec{v}} R_m T_{\vec{v}} = R_m R_m T_{\vec{v}} T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}}^2$$

também é uma simetria da figura. Note-se que, no Teorema 1.46, verificou-se que a ordem pela qual se realiza o produto dos dois fatores em que se decompõe uma reflexão deslizante não é relevante.

Por fim, observe-se que se $T_{\vec{u}}$ é uma translação do friso de módulo mínimo \vec{u} , então $T_{\vec{v}}^2$ não pode ser igual a uma potência de expoente par de $T_{\vec{u}}$. Caso contrário, se $T_{\vec{v}}^2 = T_{\vec{u}}^{2n}$, então $T_{\vec{v}} = T_{\vec{u}}^n$ seria uma simetria de translação do friso. Desta forma, $T_{\vec{v}}^2$ tem que ser igual a uma potência de expoente ímpar de $T_{\vec{u}}$, isto é, $\vec{v} = 1/2\vec{u}$, ou $\vec{v} = 3/2\vec{u}$, ou $\vec{v} = 5/2\vec{u}$, ...

Em síntese, num friso, além das simetrias sempre presentes de translação (numa única direção), podem existir ainda as seguintes simetrias:

1. **Simetrias de rotação:** as simetrias de rotação possíveis são simetrias de meia-volta (simetrias de ordem 2), com centros sobre a reta m , eixo central do friso;
2. **Simetrias de reflexão:** as simetrias de reflexão possíveis são a reflexão de eixo m ou reflexões de eixo perpendicular a m ;

3. Simetrias de reflexão deslizante: quando existem simetrias de reflexão deslizante (não triviais), o eixo de deslocamento é sempre o eixo central m do friso e os módulos das translações correspondentes assumem valores iguais a metade dos módulos dos vetores que determinam as simetrias de translação que são potências ímpares da translação de módulo mínimo do friso.

Como consequência, constatamos que todas as possíveis simetrias de um friso fixam obrigatoriamente o seu eixo central.

Em seguida, demonstramos formalmente que existem apenas sete tipos distintos de frisos. Para já, convém clarificar quando é que dois frisos são “do mesmo tipo”.

Para cada friso \mathfrak{F} , representamos o conjunto das suas simetrias por $\text{Sim}(\mathfrak{F})$. Como sabemos, este conjunto forma um grupo, quando munido da composição de funções. Tendo em conta a definição de friso, $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ contém uma infinidade de simetrias de translação numa direção. Para além disso, vimos que $\text{Sim}(\mathfrak{F})$ pode conter simetrias de meia-volta; simetrias de reflexão de eixo vertical; uma simetria de reflexão de eixo horizontal; e simetrias de reflexão deslizante não triviais.

Diremos que dois frisos, \mathfrak{F}_1 e \mathfrak{F}_2 , são do *mesmo tipo* se os seus grupos de simetria, $\text{Sim}(\mathfrak{F}_1)$ e $\text{Sim}(\mathfrak{F}_2)$, forem isomorfos. Em particular, os dois grupos de simetria contêm os mesmos tipos de isometrias básicas. Note-se que se estabeleceu o mesmo tipo de terminologia na classificação das rosáceas, no capítulo anterior.

Vejamos, agora, quantos tipos de frisos existem. Considerando todas as combinações possíveis entre os diferentes tipos de simetrias que podem figurar no grupo de simetria de um friso (translações, meias-voltas, reflexões de eixo vertical, reflexão de eixo horizontal e reflexões deslizantes), somos conduzidos a admitir a existência de dezasseis grupos de simetria. De facto, se contarmos os grupos que admitem apenas translações e os que admitem dois, três, quatro ou os cinco tipos possíveis de simetrias, obtemos:

$$C_0^4 + C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16.$$

Todavia, tendo em conta as propriedades das transformações em causa e o modo como estas se relacionam entre si, verificamos que nove das dezasseis possibilidades se reduzem às restantes sete, por resultar de incompatibilidades ou duplicações que vão surgindo no processo de criação de conjuntos cada vez mais amplos de simetrias.

Façamos um estudo construtivo que nos permitirá identificar e descrever os sete grupos de frisos.

Usaremos o motivo representado na Figura 4.2 para construir exemplos demonstrativos dos diferentes tipos de frisos e analisar os respectivos grupos de simetria. A escolha não foi aleatória, pois é conveniente optar-se por motivos assimétricos, ou seja, por motivos com grupo de simetria C_1 , de forma a não condicionar a classificação a realizar. Para cada tipo de friso encontrado, apresentaremos também um exemplo em calçada portuguesa, obtido no levantamento realizado e que será objeto da nossa atenção na Parte II desta dissertação.

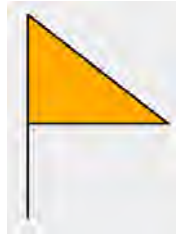


Figura 4.2: Motivo usado na construção dos frisos.

Nos esboços dos frisos apresentados, identifica-se sempre o eixo central do friso, os pontos e eixos de simetria e os eixos de deslocamento, caso existam. Note-se que os símbolos utilizados não são parte integrante dos frisos em questão, apenas auxiliam a identificação das respectivas simetrias.

Iniciamos este estudo considerando uma reta m e um ponto A pertencente a m . Apresentaremos os sete grupos de frisos com eixo central m . Na abordagem a desenvolver, consideraremos a seguinte notação:

- $A_n = T^n(A)$, com T uma simetria de translação associada a um vetor de módulo mínimo e $n \in \mathbb{Z}$ ($A = A_0 = T^0(A)$);
- M_n é o ponto médio de $[A_n A_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$;
- $M_n = T^n(M)$, $n \in \mathbb{Z}$, em que $M = M_0$ é o ponto médio de $[AA_1]$ (Figura 4.3).

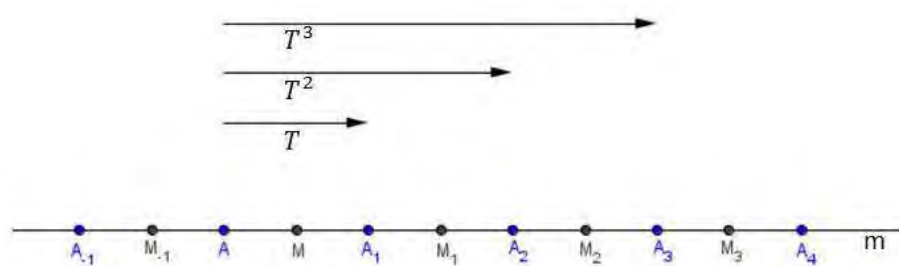


Figura 4.3: Notação utilizada na descoberta dos 7 grupos de frisos.

Grupo gerado por uma translação

Seja T uma translação não trivial que fixa a reta m (ou seja, o vetor que define a translação deve ter a direção de m). O grupo gerado por T é constituído apenas por translações da forma T^n , com $n \in \mathbb{Z}$, todas elas com a mesma direção.

Assim, pertencem ao grupo $\langle T \rangle$ (Figuras 4.4 e 4.5):

- as translações T^n , para todo o $n \in \mathbb{Z}$.

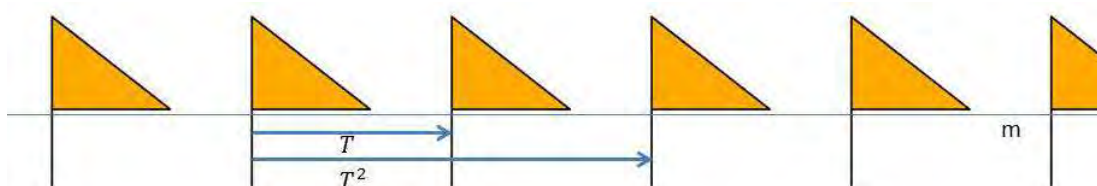


Figura 4.4: Friso que admite $\langle T \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.5: Rua Margarida de Chaves (Ponta Delgada).

Grupo gerado por uma translação e por uma meia-volta

Consideremos o grupo $\langle T, H_A \rangle$, com H_A a meia volta de centro A . Os elementos do grupo considerado são da forma $T^{i_1} H_A^{i_2} \dots T^{i_{2n-1}} H_A^{i_{2n}}$, com $i_j \in \mathbb{Z}$, para $j = 1, 2, \dots, 2n$. Note-se que TH_A é uma meia-volta (Teorema 1.45). Logo, TH_A é uma involução, $TH_A = (TH_A)^{-1}$, e conseqüentemente $TH_A = H_A T^{-1}$. Assim sendo, qualquer elemento do grupo $\langle T, H_A \rangle$ pode ser escrito na forma $T^i H_A^j$, com $i, j \in \mathbb{Z}$.

As simetrias do grupo são:

- se j for par, $T^i H_A^j = T^i$;
- se j for ímpar e i for par, $T^i H_A^j = T^i H_A = H_{A_{\frac{i}{2}}}$;
- se j for ímpar e i for ímpar, $T^i H_A^j = T^i H_A = H_{M_{\frac{i-1}{2}}}$;

Qualquer elemento do grupo é uma translação ou uma meia-volta. É de notar que $\langle T, H_A \rangle = \langle H_A, H_M \rangle$, pois $T = H_M H_A$ e $TH_A = H_M$ (Teorema 1.16).

Assim, pertencem ao grupo $\langle T, H_A \rangle = \langle H_A, H_M \rangle$ (Figuras 4.6 e 4.7):

- as translações do grupo $\langle T \rangle$;
- as meias-voltas de centros A_n e M_n , para $n \in \mathbb{Z}$.

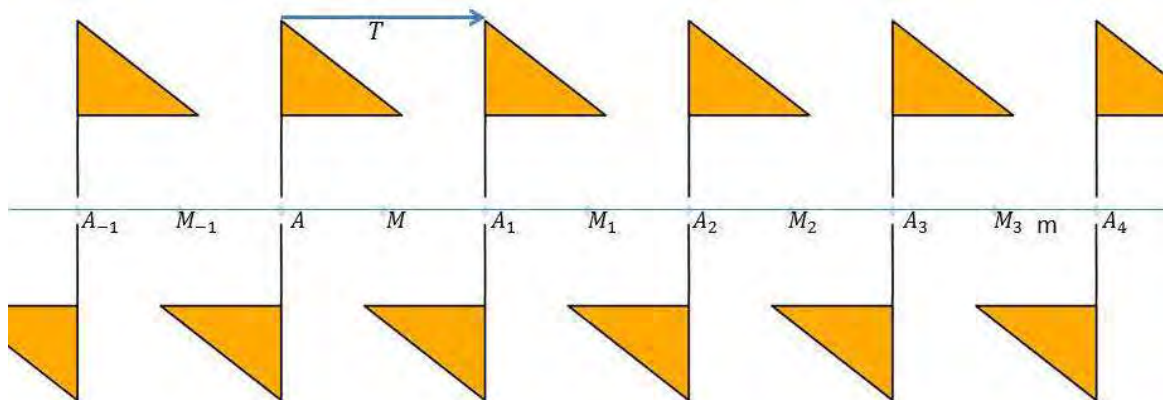


Figura 4.6: Friso que admite $\langle T, H_A \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.7: Rua Dr. Guilherme Poças (Ponta Delgada).

Grupo gerado por uma translação e por uma reflexão de eixo horizontal m

Consideremos o grupo $\langle T, R_m \rangle$. A translação T fixa a reta m , o que implica que $TR_m = R_mT$ (Teoremas 1.26 e 1.44). Todo o elemento do grupo é da forma $T^i R_m^j$, com $i, j \in \mathbb{Z}$.

As simetrias que fazem parte deste grupo são:

- se j for par, $T^i R_m^j = T^i$;
- se j for ímpar e $i = 0$, $T^0 R_m^j = R_m$;
- se j for ímpar e $i \neq 0$, $T^i R_m^j = T^i R_m$ é uma reflexão deslizante (trivial), tendo como eixo a reta m e que aplica A em A_i .

Assim, pertencem ao grupo $\langle T, R_m \rangle$ (Figuras 4.8 e 4.9):

- as translações do grupo $\langle T \rangle$;
- a reflexão R_m tendo como eixo a reta m ;
- as reflexões deslizantes (triviais) $T^n R_m$, para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

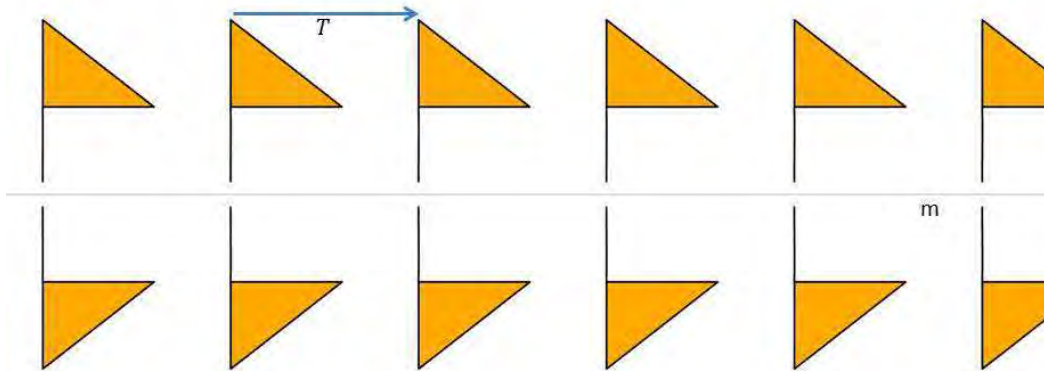


Figura 4.8: Friso que admite $\langle T, R_m \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.9: Mosteiros (Ponta Delgada).

Grupo gerado por uma translação, uma meia-volta e uma reflexão de eixo horizontal m

Consideremos o grupo $\langle T, H_A, R_m \rangle$. Analisando as isometrias geradoras, verificamos que o grupo admite, como seus subgrupos, os grupos de frisos apresentados até ao momento. Assim, são isometrias do grupo em estudo, todas as isometrias identificadas nos grupos anteriores. No entanto, as isometrias de $\langle T, H_A, R_m \rangle$ não se reduzem às referidas anteriormente. Os elementos do grupo em questão são da forma $T^{i_1} H_A^{i_2} R_m^{i_3} \dots T^{i_{3n-2}} H_A^{i_{3n-1}} R_m^{i_{3n}}$, com $i_j \in \mathbb{Z}$, para $j = 1, 2, \dots, 3n$. Como $TH_A = H_AT^{-1}$, $TR_m = R_mT$ e $H_AR_m = R_mH_A$, todo o elemento do grupo pode ser escrito na forma $T^i H_A^j R_m^k$, com $i, j, k \in \mathbb{Z}$ (a última igualdade deve-se aos Teoremas 1.28 e 1.44).

Assim,

- se j for par, $T^i H_A^j R_m^k = T^i R_m^k$ será um elemento de $\langle T, R_m \rangle$, para quaisquer inteiros i e k ;
- se k for par $T^i H_A^j R_m^k = T^i H_A^j$ será um elemento de $\langle T, H_A \rangle$, para quaisquer inteiros i e j ;
- se i for par e j e k forem ambos ímpares, $T^i H_A^j R_m^k = T^i H_A R_m = H_{A_{\frac{i}{2}}} R_m = R_{s_{\frac{i}{2}}}$, com $s_{\frac{i}{2}}$ a reta perpendicular a m no ponto $A_{\frac{i}{2}}$; note-se que podemos escrever $R_m = H_{A_{\frac{i}{2}}} R_{s_{\frac{i}{2}}}$;
- se i, j e k forem ímpares, $T^i H_A^j R_m^k = T^i H_A R_m = H_{M_{\frac{i-1}{2}}} R_m = R_{t_{\frac{i-1}{2}}}$, com $t_{\frac{i-1}{2}}$ a reta perpendicular a m no ponto $M_{\frac{i-1}{2}}$; note-se que $R_m = H_{M_{\frac{i-1}{2}}} R_{t_{\frac{i-1}{2}}}$.

Importa lembrar que no estudo do grupo $\langle T, H_A \rangle$, concluímos que $T^i H_A = H_{A_{\frac{i}{2}}}$, quando i é par, e $T^i H_A = H_{M_{\frac{i-1}{2}}}$, quando i é ímpar.

É também de referir que $\langle T, H_A, R_m \rangle = \langle T, R_s, R_m \rangle$, pois $H_A = R_m R_s$ e $R_s = R_m H_A$. Assumiremos $s = s_0$, assim como $t = t_0$.

Assim, pertencem ao grupo $\langle T, H_A, R_m \rangle = \langle T, R_s, R_m \rangle$ (Figuras 4.10 e 4.11):

- as translações do grupo $\langle T \rangle$;
- a reflexão R_m tendo como eixo a reta m ;
- as reflexões tendo como eixos as retas s_n e t_n , para todo o $n \in \mathbb{Z}$;
- as meias-voltas de centros A_n e M_n , para todo o $n \in \mathbb{Z}$;
- as reflexões deslizantes (triviais) $T^n R_m$, para $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Grupo gerado por uma translação e por uma reflexão segundo uma reta perpendicular a m

Consideremos a reta s , perpendicular a m no ponto A . Analisemos o grupo $\langle T, R_s \rangle$. A isometria TR_s é uma reflexão segundo uma reta perpendicular a m

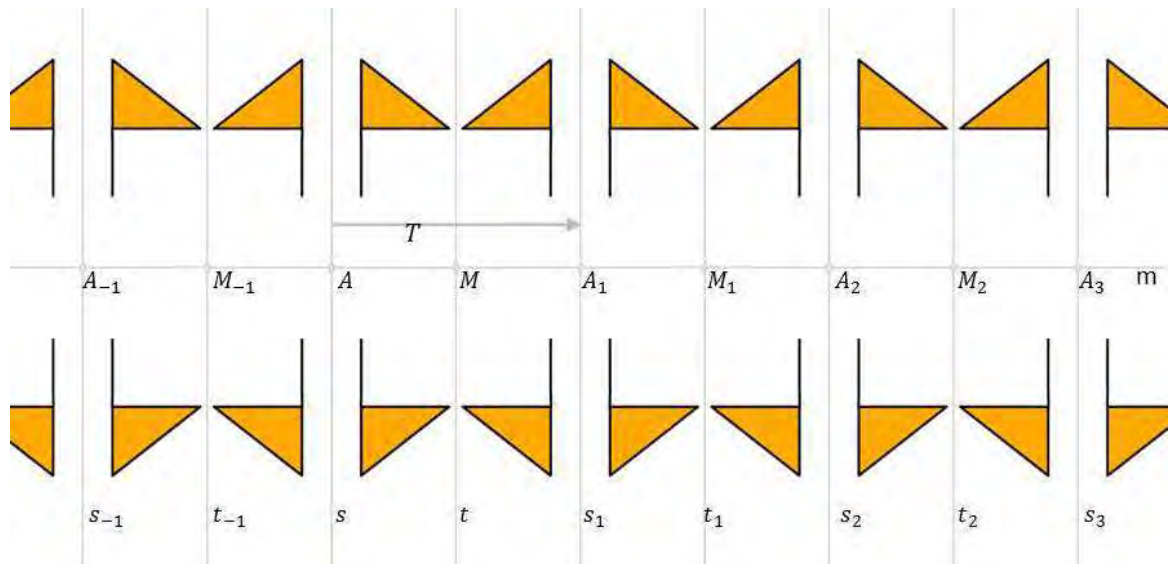


Figura 4.10: Friso que admite $\langle T, H_A, R_m \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.11: Rua do Contador (Ponta Delgada).

(Teoremas 1.26 e 1.27), portanto é uma involução e conseqüentemente $TR_s = R_sT^{-1}$. Assim, os elementos do grupo em questão são da forma $T^iR_s^j$, com i e j números inteiros. Como qualquer elemento do grupo se escreve como um produto de reflexões segundo retas paralelas, de acordo com a paridade da isometria, o produto será uma reflexão segundo uma reta perpendicular a m ou uma translação com a direção de m . Identifiquemos, as isometrias que compõem o grupo $\langle T, R_s \rangle$:

- se j for par, $T^iR_s^j = T^i$;
- se j for ímpar e i for par, $T^iR_s^j = T^iR_s = R_{s_{\frac{i}{2}}}R_sR_s = R_{s_{\frac{i}{2}}}$, com $s_{\frac{i}{2}}$ a reta perpendicular a m no ponto $A_{\frac{i}{2}}$;

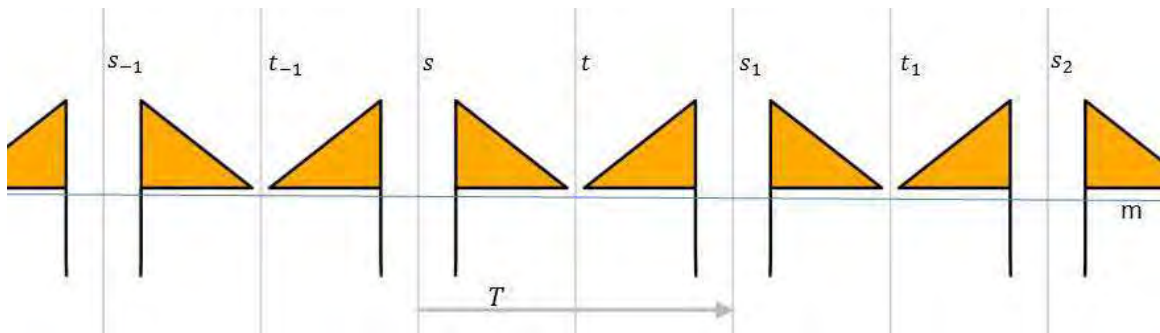


Figura 4.12: Friso que admite $\langle T, R_s \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.13: Rua Mãe de Deus (Ponta Delgada).

- se j for ímpar e i for ímpar, $T^i R_s^j = T^i R_s = R_{t_{\frac{i-1}{2}}} R_s R_s = R_{t_{\frac{i-1}{2}}}$, com $t_{\frac{i-1}{2}}$ a reta perpendicular a m no ponto $M_{\frac{i-1}{2}}$.

Assim, pertencem ao grupo $\langle T, R_s \rangle$ (Figuras 4.12 e 4.13):

- as translações do grupo $\langle T \rangle$;
- as reflexões tendo como eixos as retas s_n e t_n , para todo o $n \in \mathbb{Z}$.

Grupo gerado por uma translação, uma meia-volta e por uma reflexão segundo uma reta perpendicular à reta m

Seja l uma reta perpendicular a m num ponto P . Consideremos o grupo $\langle T, H_A, R_l \rangle$. O grupo $\langle T, H_A \rangle$ é um subgrupo de $\langle T, H_A, R_l \rangle$, como tal fazem parte do grupo em questão as meias-voltas de centros A_n e M_n , para todo o

inteiro n . Como vimos na página 108, R_m obtém-se do produto de uma meia-volta centrada num ponto A_i ou M_i com uma reflexão de eixo vertical que passa por esse ponto. Logo, se $P = A_i$ ou $P = M_i$, para algum inteiro i , a reflexão R_m pertencerá ao grupo, que coincidirá, por isso, com o grupo $\langle T, H_A, R_m \rangle$, anteriormente estudado. Suponhamos, por isso, que $P \neq A_n$ e $P \neq M_n$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$. Pelo Teorema 2.3, $B = R_l(A)$ é o centro de uma meia-volta do grupo em questão. Como pretendemos que o grupo admita $\langle T \rangle$ para seu subgrupo, $H_B H_A = T^i$, para algum inteiro i , isto é, $H_B(A) = A_i$ e, portanto, B é o ponto médio de $[AA_i]$. Assim, $B = A_j$ ou $B = M_j$, para algum inteiro j . Analisemos os dois casos.

Se $R_l(A) = A_j$, para algum j , a reta l é a mediatriz de $[AA_j]$, conseqüentemente l interseca m num ponto A_k ou num ponto M_k , para algum inteiro k , o que não nos interessa visto que caímos num grupo já estudado.

Consideremos $R_l(A) = M_j$. A reta l é a mediatriz de $[AM_j]$. De acordo com o modo como definimos os pontos A_n e M_n , concluímos que a reta l interseca m no ponto médio de $[A_k M_k]$ ou no ponto médio de $[M_{k-1} A_k]$, para algum inteiro k . Pelo Teorema 2.2, concluímos que as mediatrizes de $[A_n M_n]$ e $[M_{n-1} A_n]$, para todo o inteiro n , são eixos de reflexão do grupo, em particular a mediatriz de $[AM]$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que l é a mediatriz de $[AM]$. Averiguemos se $\langle T, H_A, R_l \rangle$ admite outras reflexões para além das mencionadas. Seja p uma reta perpendicular a m e suponhamos que R_p faz parte do grupo em questão. Nestas condições, a translação $R_p R_l$ pertence a $\langle T \rangle$, isto é, $R_p R_l = T^i$, para algum inteiro i . Conseqüentemente, $R_p(M) = R_p(R_l(A)) = A_i$ e, portanto, p é a mediatriz de $[MA_i]$. Concluímos que as únicas reflexões de eixos perpendiculares a m são as anteriormente identificadas.

Note-se que a reflexão R_m não faz parte do grupo em questão, caso contrário pertenceria a este grupo a meia-volta $H_P = R_l R_m$, sendo P o ponto médio de $[AM]$, o que não é possível, uma vez que a translação que aplica A em M teria que pertencer ao grupo.

A reflexão deslizante $\gamma = R_l H_A$, com $A \notin l$ (Teorema 1.48), que tem como eixo a reta m e que aplica A em M , faz parte do grupo. Conseqüentemente, fazem também parte do grupo todas as reflexões deslizantes de $\langle \gamma \rangle$. É de notar que $\gamma^2 = T$, como tal $\langle T \rangle \subset \langle \gamma \rangle$. Por sua vez, $\langle T, H_A, R_l \rangle = \langle H_A, R_l \rangle$.

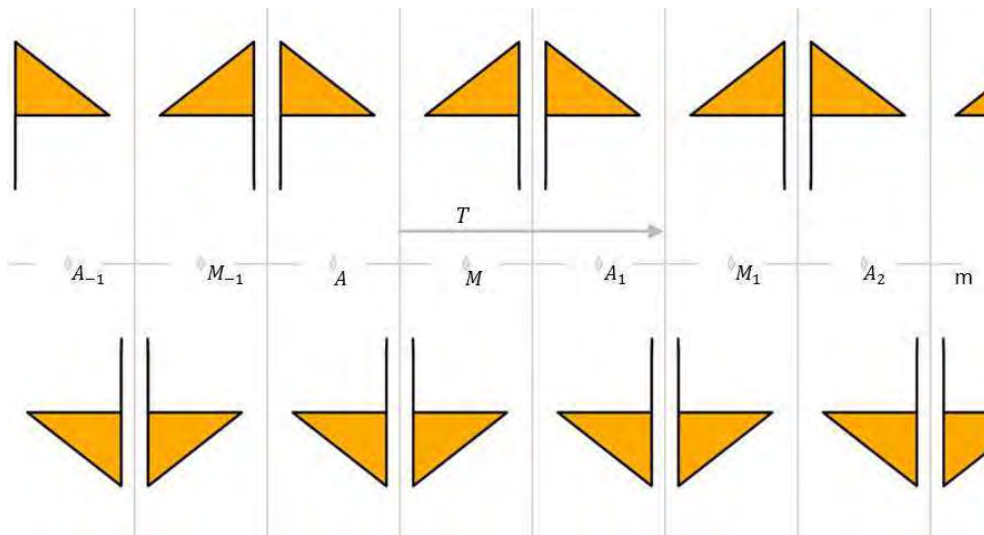


Figura 4.14: Friso que admite $\langle T, H_A, R_l \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.15: Miradouro do Escalvado (Ponta Delgada).

Assim, pertencem ao grupo $\langle T, H_A, R_l \rangle = \langle H_A, R_l \rangle$ (Figuras 4.14 e 4.15):

- as translações do grupo $\langle T \rangle$;
- as meias-voltas de centros A_n e M_n , para todo o $n \in \mathbb{Z}$;
- as reflexões tendo como eixos, respetivamente, as mediatrizes de $[A_n M_n]$ e $[M_{n-1} A_n]$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$;
- as reflexões deslizantes do grupo $\langle \gamma \rangle$, com γ a reflexão deslizante tendo como eixo a reta m e que aplica A em M .

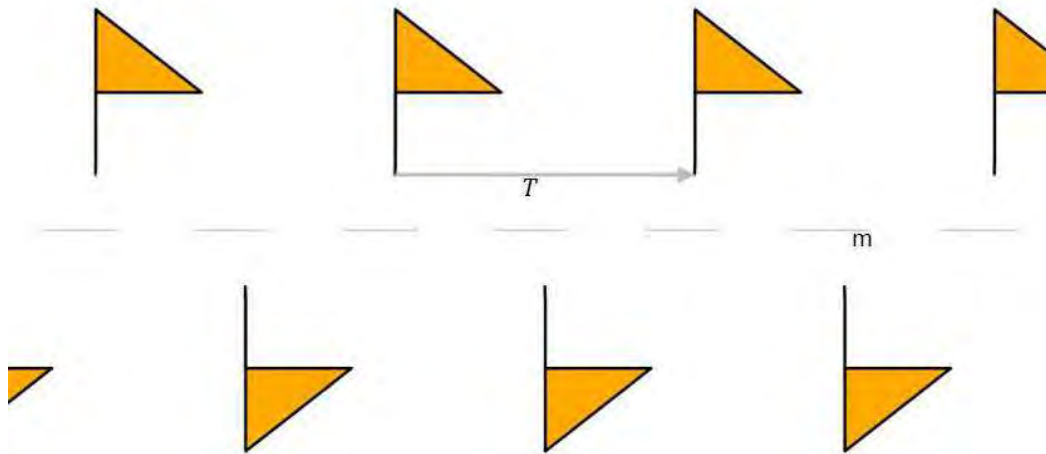


Figura 4.16: Friso que admite $\langle \delta \rangle$ como grupo de simetria.



Figura 4.17: Rua Luís Soares de Sousa (Ponta Delgada).

Grupo gerado por uma reflexão deslizante

Seja γ uma reflexão deslizante não trivial tendo como eixo a reta m . Consideremos o grupo $\langle T, \gamma \rangle$, que admite $\langle T \rangle$ como seu subgrupo. Nestas condições, γ^2 é uma translação de $\langle T \rangle$ e conseqüentemente $\gamma^2 = T^{2i}$ ou $\gamma^2 = T^{2i+1}$, para algum $i \in \mathbb{Z}$.

Suponhamos que $\gamma^2 = T^{2i}$. Consideremos a isometria ímpar γT^{-i} . Como $(\gamma T^{-i})^2 = \gamma^2 T^{-2i} = T^{2i} T^{-2i} = \iota$, concluímos que γT^{-i} é uma involução e, portanto, é uma reflexão (Teoremas 1.33, 1.52 e 1.53). Sendo γT^{-i} uma reflexão de $\langle T, \gamma \rangle$, o seu eixo será a reta m ou uma reta perpendicular a m . Suponhamos $\gamma T^{-i} = R_a$, com a uma reta perpendicular a m . Assim, $\gamma = R_a T^i = R_b$, com b uma reta perpendicular a m (Teoremas 1.26 e 1.27), o que contradiz o facto de termos suposto que γ é uma

reflexão deslizante tendo como eixo a reta m . Suponhamos que $\gamma T^{-i} = R_m$. Temos $\gamma = R_m T^i$, isto é, γ é uma reflexão deslizante tendo como eixo a reta m e que aplica A em A_i . Nestas condições, $\langle T, \gamma \rangle = \langle T, \gamma, R_m \rangle = \langle T, R_m \rangle$, caso que não nos interessa visto já ter sido anteriormente estudado.

Consideremos $\gamma^2 = T^{2i+1}$. Como T^{-i} e γ comutam (Teorema 1.49), tem-se $(T^{-i}\gamma)^2 = T^{-2i}\gamma^2 = T^{-2i}T^{2i+1} = T$, isto é, $T^{-i}\gamma$ é uma isometria ímpar cujo quadrado é T . Desta forma, $\delta = T^{-i}\gamma$ tem que ser uma simetria de reflexão deslizante (Teoremas 1.11 e 1.52), tendo como eixo a reta m e que aplica A em M . Como tal, $\langle T, \gamma \rangle = \langle T, \delta \rangle = \langle \delta \rangle$, com $\delta^2 = T$.

Assim, pertencem ao grupo $\langle T, \gamma \rangle = \langle \delta \rangle$ (Figuras 4.16 e 4.17):

- as translações do grupo $\langle T \rangle$;
- as reflexões deslizantes geradas pela reflexão deslizante tendo como eixo de deslocamento a reta m e que aplica A em M .

Existirão mais grupos de frisos?

Demonstremos, agora, a inexistência de outros grupos de frisos com eixo central m e subgrupo infinito das translações $\langle T \rangle$, que se distingam dos 7 grupos atrás apresentados em termos de isometrias admitidas. Para tal, só nos resta analisar algumas extensões do grupo $\langle \delta \rangle$ obtido anteriormente.

Consideremos o grupo $\langle \delta, R_m \rangle$. Como $(R_m\delta)^2 = \delta^2$, concluímos que $R_m\delta$ é uma simetria de translação do friso que fixa o eixo m (Teoremas 1.49 e 1.53) e tal que $R_m\delta(A) = R_m(M) = M$. Logo, $R_m\delta = T_{\overrightarrow{AM}}$. Consequentemente, $\langle \delta, R_m \rangle$ não admite o grupo $\langle T \rangle$ como o seu subgrupo das translações. Assim, a hipótese considerada é excluída. No entanto, $\langle \delta, R_m \rangle = \langle T_{\overrightarrow{AM}}, R_m \rangle$, isto é, o grupo em causa admite o mesmo tipo de simetrias do grupo $\langle T, R_m \rangle$ já estudado.

Analisemos o grupo $\langle \delta, H_A \rangle$. Como $H_A = R_m R_s$, com s a reta perpendicular a m no ponto A (Teorema 1.28), e $\delta = R_l R_s R_m$, com l a reta perpendicular a m no ponto médio de $[AM]$ (Teoremas 1.26 e 1.46), $\delta H_A = R_l R_s R_m R_m R_s = R_l$ faz parte do grupo em questão. Então $\langle \delta, H_A \rangle = \langle \delta, H_A, R_l \rangle = \langle T, H_A, R_l \rangle$ e, portanto, o grupo em questão coincide

com um dos grupos anteriormente apresentados.

Consideremos, agora, o grupo $\langle \delta, R_a \rangle$, com a uma reta perpendicular a m . Segue-se que $R_a\delta = R_aR_aR_bR_m = R_bR_m$, para uma determinada reta b perpendicular a m , é uma meia-volta que pertence ao grupo de simetrias do friso (Teorema 1.28). Se o centro de $R_a\delta$ pertencer a um eixo de reflexão do grupo, a reflexão R_m e a translação $T_{\overrightarrow{AM}}$ farão parte de $\langle \delta, R_a \rangle$. Como tal, este grupo não será considerado visto não admitir $\langle T \rangle$ como o seu subgrupo das translações. Notemos que, nestas condições, o grupo admitiria o mesmo tipo de simetrias do grupo $\langle T, H_A, R_m \rangle$. Consideremos a hipótese de o centro de $R_a\delta$ não pertencer a um eixo de reflexão. Se assim for, tem-se

$$\langle \delta, R_a \rangle = \langle \delta, R_a, H_P \rangle = \langle T, R_a, H_P \rangle,$$

com $H_P = R_a\delta$, para um determinado ponto P . Como tal, o grupo em causa coincide com o grupo $\langle T, H_A, R_l \rangle$, anteriormente apresentado, pois são gerados pelos mesmos tipos de isometrias.

Esgotamos as possibilidades de combinar as simetrias admitidas por um friso, o que nos leva a admitir a existência de apenas 7 tipos de frisos, que se distinguem tendo em consideração as respetivas simetrias que compõem o seu grupo de simetria.

Estamos, agora, em condições de enunciar o teorema que se segue.

Teorema 4.1. *Se \mathfrak{F} for um friso, então \mathfrak{F} admite como grupo de simetria um dos seguintes sete grupos distintos: $\langle T \rangle$, $\langle T, H_A \rangle$, $\langle T, R_m \rangle$, $\langle T, H_A, R_m \rangle$, $\langle T, R_s \rangle$, $\langle T, H_A, R_l \rangle$ ou $\langle \delta \rangle$.*

4.2 Fluxograma para a determinação do tipo de friso

Nesta secção, apresentamos o fluxograma dos grupos de frisos (Figura 4.18), que consta da lista de apêndices (Apêndice C) e que sistematiza a classificação dos frisos quanto ao seu grupo de simetria, tendo em conta as conclusões obtidas no último teorema.

Ao longo dos anos, têm sido propostas diferentes notações para identificar os 7

grupos de frisos. Adotamos duas delas. A primeira notação utilizada, e à qual demos maior ênfase por ser fácil de memorizar, é a *notação de Fejes Tóth* [28]. De acordo com esta notação, os sete grupos de simetria são representados pela letra F . Quando há meia-volta coloca-se 2 em índice, caso contrário coloca-se 1. Em expoente, coloca-se 1 quando há reflexão horizontal, 2 quando há reflexão vertical, ou 3 quando há reflexão deslizante. A ausência de um expoente indica que não existem simetrias de reflexão, nem de reflexão deslizante.

A segunda notação utilizada é apresentada por Washburn e Crown [32] e designa-se por *notação cristalográfica*, a qual descrevemos em seguida. A cada tipo de friso é atribuído um conjunto de quatro símbolos $pxyz$, satisfazendo as seguintes condições:

- $x=m$, se o friso tiver simetrias de reflexão de eixo vertical;
- $x=1$, se o friso não tiver simetrias de reflexão de eixo vertical;
- $y=m$, se o friso tiver uma simetria de reflexão de eixo horizontal;
- $y=a$, se o friso tiver simetrias de reflexão deslizante não triviais;
- $y=1$, se não se verificar nenhum dos dois casos anteriores;
- $z=2$, se o friso tiver simetrias de meia-volta;
- $z=1$, se o friso não tiver simetrias de meia-volta.

Obtemos a seguinte correspondência entre as diferentes notações utilizadas:

- $\langle T \rangle = F_1 = p111$
- $\langle T, H_A \rangle = F_2 = p112$
- $\langle T, R_m \rangle = F_1^1 = p1m1$
- $\langle T, H_A, R_m \rangle = F_2^1 = pmm2$
- $\langle T, R_s \rangle = F_1^2 = pm11$
- $\langle T, H_A, R_l \rangle = F_2^2 = pma2$
- $\langle \delta \rangle = F_1^3 = p1a1$

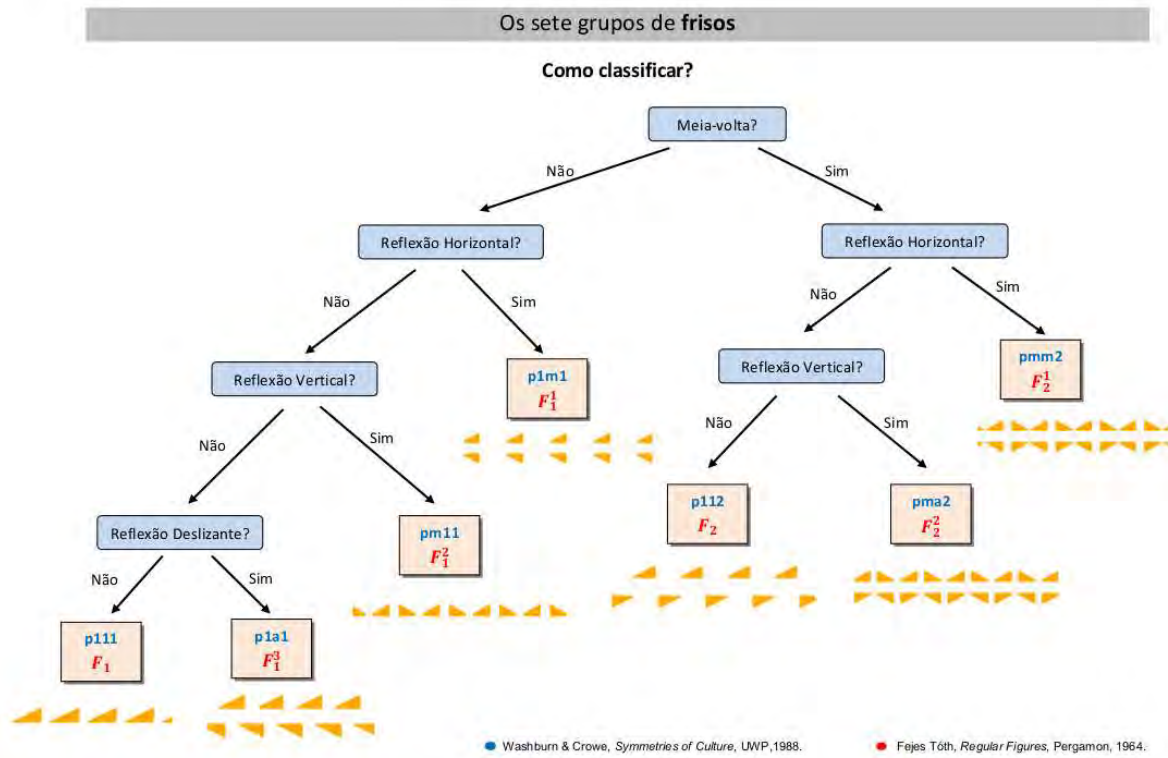


Figura 4.18: Fluxograma para a classificação dos frisos.

Por abuso de linguagem, diremos, por exemplo, que um friso \mathfrak{F} é do tipo F_1^3 , o que significa em termos formais que o seu grupo de simetria é isomorfo ao grupo F_1^3 .

4.3 Exemplos de frisos

Observe-se, em primeiro lugar, que as figuras dos exemplos *D* e *E* (Figuras 2.9 e 2.10), da secção 2.4, são frisos do tipo F_2 e F_2^1 , respetivamente.

Ao longo desta secção, apresentamos mais alguns exemplos de frisos, que resultaram do levantamento efetuado. Primeiramente, figuram exemplos de calçada portuguesa, recolhidos um pouco por toda a ilha de S. Miguel, e, em seguida, exemplos de varandas do centro histórico da cidade de Ponta Delgada.



Figura 4.19: Grupo F_1 – Rua Margarida de Chaves (Ponta Delgada).



Figura 4.20: Grupo F_1 – Ribeirinha (Ribeira Grande).



Figura 4.21: Grupo F_1 – Rua 1º Barão das Laranjeiras (Povoação).



Figura 4.22: Grupo F_1^1 – Arrifes (Ponta Delgada).



Figura 4.23: Grupo F_1^1 – Ginetes (Ponta Delgada).

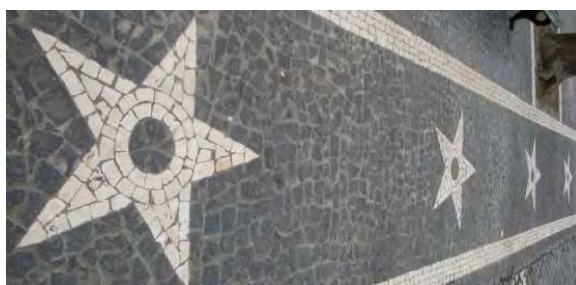


Figura 4.24: Grupo F_1^1 – Mosteiros (Ponta Delgada).

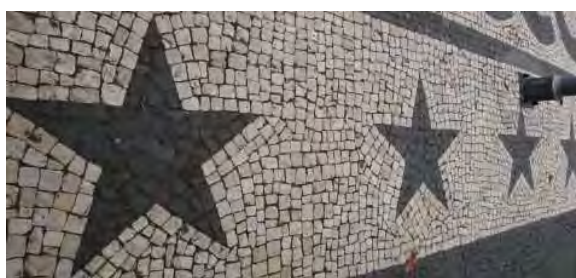


Figura 4.25: Grupo F_1^2 – Largo da Matriz (Ponta Delgada)



Figura 4.26: Grupo F_1^2 – Pilar da Bretanha (Ponta Delgada).



Figura 4.27: Grupo F_1^2 – Porto Formoso (Ribeira Grande).



Figura 4.28: Grupo F_1^3 – Rua Luís Soares de Sousa (Ponta Delgada).



Figura 4.29: Grupo F_2 – Av. Gaspar Furtuoso (Ponta Delgada).



Figura 4.30: Grupo F_2 – Largo de Camões (Ponta Delgada).



Figura 4.31: Grupo F_2 – Rua dos Clérigos (Ponta Delgada).



Figura 4.32: Grupo F_2^1 – Rua Açoriano Oriental (Ponta Delgada).



Figura 4.33: Grupo F_2^1 – Rua de Lisboa (Ponta Delgada).



Figura 4.34: Grupo F_2^1 – Rua do Aljube (Ponta Delgada).



Figura 4.35: Grupo F_2^1 – Rua Dr. Bruno Tavares Carreiro (Ponta Delgada).



Figura 4.36: Grupo F_2^2 – Miradouro do Escalvado (Ponta Delgada).

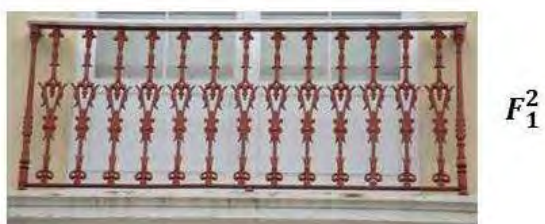


Figura 4.37: Varanda do Coliseu Micaelense.



Figura 4.38: Varanda sita na Rua Mãe de Deus.



Figura 4.39: Varanda sita na Rua Dr. Aristides da Mota.



Figura 4.40: Varanda sita na Rua Dr. Gil Mont'Alverne Sequeira.

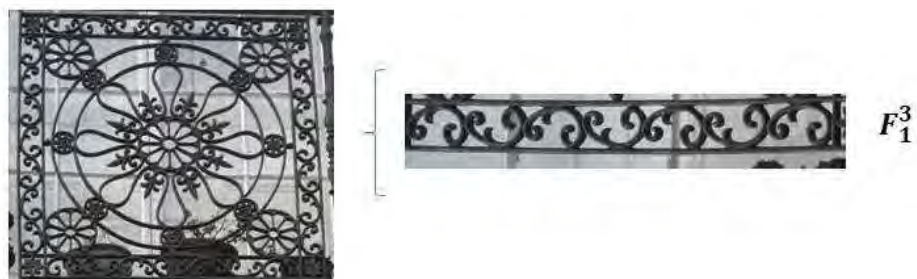


Figura 4.41: Varanda sita na Rua Dr. Aristides da Mota.

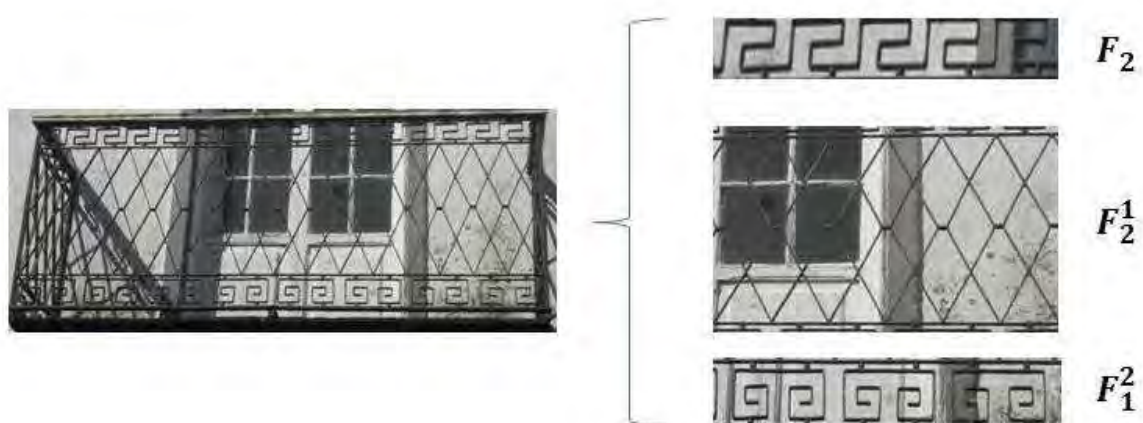


Figura 4.42: Varanda sita na Rua Margarida de Chaves.

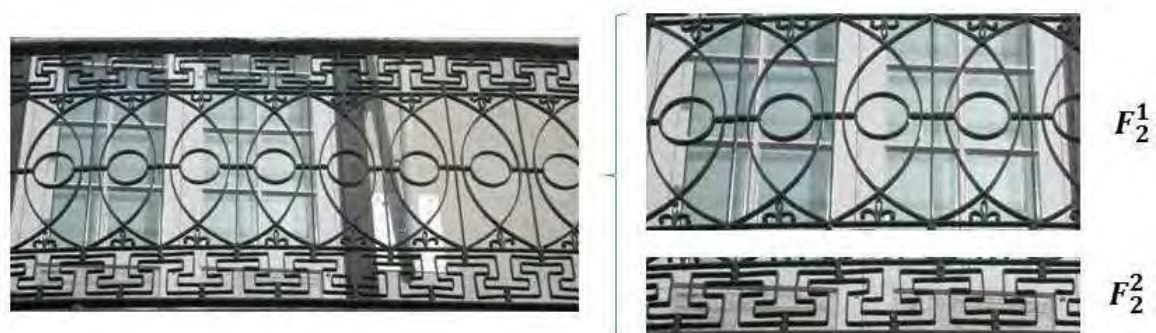


Figura 4.43: Varanda sita no Largo Vasco Bensaúde.



Figura 4.44: Varanda sita na Rua do Perú.

4.4 Para além dos frisos

No final do Capítulo 2, adotámos definições para cada um dos três tipos de figuras da arte decorativa: rosáceas, frisos e padrões bidimensionais.

No decurso da recolha de padrões nas calçadas, nas varandas e nas fachadas em azulejo, verificou-se que as figuras analisadas eram essencialmente de dois tipos: rosáceas e frisos. Além disso, os padrões bidimensionais que foram identificados eram quase todos do mesmo tipo, ou seja, pertenciam a um mesmo grupo de simetria. Por isso, concluímos não se justificar uma análise mais aprofundada dos grupos de padrões bidimensionais na fundamentação teórica.

Sendo assim, nesta secção pretendemos apenas apresentar uma breve referência aos grupos de padrões bidimensionais. Para um maior aprofundamento deste tema, o leitor poderá consultar [13] ou [30].

Quando analisamos uma figura \mathfrak{F} , no sentido de percebermos se se trata de um padrão bidimensional, um primeiro passo importante é verificar se existem simetrias de translação em mais de uma direção, o que tem como consequência a pavimentação de todo o plano. Deveremos escolher relativamente a \mathfrak{F} duas simetrias de translação, T_1 e T_2 , tais que seja possível obter qualquer simetria de translação T de \mathfrak{F} como produto de duas potências de expoente inteiro de T_1 e T_2 , que podemos exprimir dizendo que T_1 e T_2 geram o grupo das simetrias de translação de \mathfrak{F} . Se tal acontecer, então \mathfrak{F} é, por definição, um padrão bidimensional.

Tal como acontece com os frisos, os padrões bidimensionais podem apresentar outros tipos de simetrias. Prova-se que existem apenas 17 tipos diferentes de grupos de padrões bidimensionais.

O fluxograma dos grupos de padrões bidimensionais, disponível no Apêndice D, permite classificar, de forma sistemática, o grupo de simetria de um dado padrão bidimensional. À semelhança do fluxograma dos grupos de frisos, usamos também aqui duas notações, a de Fejes Tóth [28] e a notação de origem cristalográfica referenciada por Washburn e Crowe [32].

Ao consultar o Apêndice D, constata-se facilmente que as figuras dos exemplos F e G (Figuras 2.11 e 2.12), da secção 2.4, são padrões bidimensionais do tipo W_1^2 e W_4^1 , respetivamente, se tivermos em conta a análise que foi feita nessa secção.

Parte II

Identificação de rosáceas e frisos no Património Cultural dos Açores

Capítulo 5

Procedimentos metodológicos

5.1 A pesquisa bibliográfica

Na elaboração deste estudo tivemos um especial cuidado com a bibliografia consultada. Deste modo, aqui destacamos as referências bibliográficas que nos inspiraram e ajudaram na sua concretização.

Já aqui referimos que uma das obras inspiradoras do nosso trabalho é da autoria de Washburn e Crowe [32]. O livro *Symmetries of Culture*, escrito por uma antropóloga e por um matemático, é dirigido a não-matemáticos e de leitura extremamente acessível e clara. Com numerosos exemplos de frisos e de padrões bidimensionais de diversas civilizações, contém uma descrição muito completa de como se faz a classificação dos mesmos. Podemos ler na introdução do livro:

O uso dos princípios da geometria para a descrição e compreensão das formas da arte decorativa representa a união de duas disciplinas habitualmente separadas – matemática e design. A única limitação aos tipos de figuras que podem ser descritos por estes princípios é que elas devem consistir em motivos regularmente repetidos. Isto é, devem ser figuras com partes sujeitas a movimentos rígidos. Neste livro demonstramos como é possível utilizar os princípios geométricos da cristalografia para construir uma classificação descritiva dessas figuras [...] Este tipo especial de análise classifica a estrutura subjacente às figuras da arte decorativa, ou seja, o modo como as suas partes (elementos, motivos, unidades da figura) são organizadas em toda a figura pelas simetrias geométricas que

as repetem. A classificação salienta o modo como os elementos da figura se repetem, não a natureza em si própria desses elementos.

Entendemos que este texto caracteriza, de forma simples e eficaz, como se processa a classificação dos desenhos de arte decorativa que apresentam um motivo que se repete, desenhos esses que constituíram o objeto do presente estudo. Destacamos igualmente outros livros de interesse que despertaram a nossa curiosidade investigativa: [7, 8, 10, 26, 27, 33, 34, 40].

Para a escrita da Parte I desta dissertação, optou-se por consultar obras de referência na área, das quais se destaca o livro de George Martin [13], *Transformation Geometry*, que influenciou de forma decisiva o percurso trilhado no âmbito da fundamentação teórica deste trabalho. A nível nacional, os trabalhos de Eduardo Veloso [29, 30, 31] e de Ana Breda *et. al* [4] são de consulta obrigatória. Também foram utilizadas outras publicações [2, 19, 20, 28].

No decurso do desenvolvimento das propostas de atividades para o ensino, patentes no Capítulo 7, foram consultadas várias obras, incluindo alguns programas e orientações curriculares [3, 16, 17, 18, 24, 25, 41].

Maior dificuldade tivemos na obtenção de bibliografia especializada sobre as áreas do Património Cultural analisadas nesta dissertação, na sua maioria desenvolvidas fundamentalmente sob as ópticas da Arquitectura e da História da Arte.

Para o caso da calçada portuguesa, por exemplo, veja-se o estudo de autoria de Cabrera e Nunes [5], intitulado *Olhar o chão*, que faz uma abordagem histórica salientando os antecedentes da calçada em Portugal, que reportam à época do domínio romano. Podemos ainda encontrar neste livro um registo fotográfico da calçada portuguesa existente a nível nacional e, em particular, na cidade de Lisboa. Da nota das autoras destacamos um parágrafo que ilustra na perfeição o nosso sentimento:

Olhámos o chão... descobrimos uma riqueza que se impôs de tal forma que se tornou irresistível. A partir daí, valorizar e promover a calçada-mosaico, como forma de apreço pela capacidade criativa específica da cultura portuguesa, seduziu-nos.

Ao nível da Região Autónoma dos Açores, têm sido feitos, à semelhança do que acontece no continente português, diversos trabalhos com levantamentos fotográficos da calçada portuguesa nos Açores. São exemplos disso as obras: *Calçada Portuguesa nos Açores*, da autoria de Ernesto Matos [15]; *Calçada artística nos passeios de Ponta Delgada*, da autoria de Rego e Sousa [22]; e *Os ladrilhos da cidade da Horta*, de Carlos Lobão [11].

É de referir que, apesar de existir diversa bibliografia, onde podemos encontrar um levantamento histórico e fotográfico de passeios e praças em calçada portuguesa, registamos uma lacuna no que diz respeito à sua classificação matemática. Em Portugal continental, foi possível identificar dois trabalhos dessa natureza provenientes da Universidade de Coimbra [6, 12], em que se estuda alguns padrões dos mosaicos romanos de Conímbriga. No que aos Açores diz respeito, não existia qualquer estudo do género à data de conclusão desta dissertação.

Para a análise das varandas, foi ainda mais difícil a recolha de bibliografia específica. A consideração da varanda como uma zona de fronteira entre o público e o privado remete-a para análises sobre construções arquitectónicas e os materiais utilizados, nomeadamente reflexões sobre a arquitectura em ferro forjado.

Note-se, para o caso dos Açores, a importância das varandas na estética urbana, com realce para o seu papel como marca identitária do Património Classificado da Zona Histórica de Angra do Heroísmo, como refere o Art.5º do Decreto Legislativo Regional n.º 15/2004/A.

No conjunto dos três elementos patrimoniais que abordámos, as referências publicadas sobre a azulejaria são as mais frequentes, salientando-se as valências desenvolvidas pelo Museu do Azulejo. Todavia, não só se percebe que o trabalho está particularmente centrado na construção de um Inventário do património azulejar de Portugal continental, deixando à margem os dois arquipélagos portugueses, mas acima de tudo verifica-se que as análises identificativas são, acima de tudo, construídas com base em referências artísticas (correntes estéticas, técnicas de elaboração, paletas cromáticas). A própria referência no Inventário de azulejos deste Museu, com referência aos respectivos padrões, aborda somente uma descrição dos motivos do azulejo, suas cores e variantes.

Destacam-se algumas referências consultadas: [1, 9, 14, 21, 23, 35, 36, 37, 38, 39].

5.2 Os temas escolhidos

Porquê classificar os padrões existentes nas varandas, azulejos e calçadas dos Açores?

Quando iniciamos o nosso estudo deparamo-nos com uma diversidade de padrões existentes à nossa volta. Eles estão presentes nas varandas, nos azulejos e nas calçadas, mas também, nos bordados regionais, nas colchas artesanais das nossas avós, em peças de cerâmica, tapetes de arraiolos, enfim num conjunto infindável de elementos. Sentimos então a necessidade de restringir o nosso estudo. Uma das primeiras restrições foi a de optar por classificar apenas o que se encontrasse em espaços públicos.

Dada a grande beleza estética e valor cultural presentes na calçada portuguesa, esta surge como o nosso primeiro objeto de estudo. Rica em padrões, permitiu-nos classificar rosáceas, frisos e padrões bidimensionais (estes últimos em menor número).

Por limitações logísticas, não nos foi possível efetuar uma recolha que abrangesse todas as ilhas dos Açores, como era de início nossa intenção. A recolha efetuada limita-se apenas à ilha de São Miguel contemplando todos os seis concelhos.

Da mesma forma que as calçadas embelezam as nossas ruas, também as varandas acrescentam riqueza às fachadas das moradias, basta para tal levantarmos a cabeça do chão para podermos observar tamanha variedade e beleza de padrões. A presença dos frisos impera.

Por último, mas não menos importante, surge a classificação dos azulejos presentes nas fachadas de muitas casas sitas na ilha de S. Miguel, em particular na cidade de Lagoa. Este facto deve-se à localização, nesta zona, de uma fábrica de cerâmica com grande relevância histórica e económica, cuja história recua à segunda metade do século XIX.

Podemos encontrar painéis de azulejos com pinturas que homenageiam profissões ou retratam acontecimentos históricos ou religiosos, no entanto, do ponto de vista matemático, interessa-nos sobretudo analisar painéis ou fachadas em que há um determinado motivo que se repete. É o caso das fachadas em azulejo encontradas em várias moradias na Lagoa. Podemos classificar estes padrões bidimensionais de acordo com o seu grupo de simetria, embora os exemplos encontrados abranjam apenas três dos dezassete tipos que existem.

5.3 Recolha e organização dos dados

Definido o nosso objeto de estudo, fez-se o levantamento fotográfico de todas as imagens que constam nesta dissertação.

Relativamente à calçada portuguesa procedeu-se a uma recolha exaustiva, passando por todas as freguesias dos seis concelhos da ilha de São Miguel. Aquando da recolha, pudemos verificar a presença de calçada em todos os concelhos, embora nem todas as freguesias a possuam. Os concelhos micalenses que possuem mais registos de calçada são, sem dúvida, Ponta Delgada e Ribeira Grande. Na generalidade das freguesias, observamos a sua presença, sobretudo, junto às igrejas e aos coretos. De destacar o nosso maior feito: foi possível encontrar todos os 7 tipos de frisos no concelho de Ponta Delgada, 5 deles na cidade de Ponta Delgada e os restantes 2 nos Mosteiros.

Encontramos uma grande diversidade de motivos, nomeadamente: elementos ligados ao mar (peixes, caravelas, âncoras, bússolas); elementos ligados à terra (frutos, instrumentos de trabalho agrícola); elementos religiosos (coroas do Divino Espírito Santo, cruzes, símbolos papais); elementos musicais (notas e instrumentos); estrelas, brasões e motivos abstratos.

Numa fase posterior, procedeu-se à elaboração dos roteiros de simetria para cada concelho (Apêndices H a M). Nestes, podemos encontrar um mapa do concelho onde se destacam as freguesias que possuem calçadas e, ainda, a classificação matemática das mesmas.

Ponta Delgada sendo a capital administrativa do arquipélago dos Açores e sede de município da ilha de São Miguel, possui um rico património cultural, arquitetónico e histórico, daí que se entenda o facto de este ser o concelho que apresenta o maior número de calçadas. Logo sentimos a necessidade de elaborar, para além do roteiro de simetrias deste concelho, roteiros específicos para a cidade de Ponta Delgada, a saber: um roteiro de rosáceas (Apêndice E); um roteiro de frisos (Apêndice F) e um roteiro de padrões bidimensionais (Apêndice G).

No roteiro de frisos da cidade de Ponta Delgada, tentamos aliar à matemática um pouco da história, fazendo com que o trajeto, percorrido para a classificação das calçadas, contemplasse alguns pontos de interesse cultural como: o Museu Carlos

Machado, a Igreja do antigo Colégio dos Jesuítas, o Coliseu Micaelense, o Campo de S. Francisco, as Portas da Cidade, entre outros.

Relativamente ao tema dos azulejos, seguimos duas abordagens. Primeiro procedeu-se à recolha dos azulejos presentes nas fachadas de muitas casas da cidade de Lagoa. Acresce referir que alguns não se encontram em bom estado de conservação dada a sua antiguidade. À semelhança do que foi feito para as calçadas, elaborámos também um roteiro (Apêndice N) contemplando a classificação matemática destes azulejos e uma breve nota histórica. Outra recolha efetuada está relacionada com a exposição permanente de azulejaria patente no Museu Municipal da Ribeira Grande. Nesta exposição podemos encontrar uma vasta recolha de azulejos que datam dos séculos XIX e XX. Foi nossa intenção proceder à classificação de alguns destes registos (Apêndice O).

No que concerne às varandas, procedemos também à recolha de uma amostra representativa do que se pode encontrar por toda a cidade de Ponta Delgada, uma vez que muitos dos motivos usados estão visíveis em diversas moradias, por todas as ruas da cidade. Esta recolha encontra-se também documentada num roteiro (Apêndice P). Analisando os frisos presentes nas varandas podemos observar que seis dos sete tipos de frisos estão presentes. Faltam varandas com frisos do tipo F_1^1 .

De salientar que, no tratamento das imagens fotográficas, recorreu-se ao *Microsoft Office Picture Manager* 2010 e ao *GIMP* 2 e, na construção de figuras de apoio às demonstrações e aos exemplos apresentados, foram utilizados o *Tess* 1.74 e o *GeoGebra* 4. Todas as fotografias utilizadas neste estudo são da nossa autoria (Vera Moniz e Ricardo Cunha Teixeira).

Por fim, destacamos o nosso investimento na escrita em \LaTeX , utilizada amplamente na produção de textos matemáticos e científicos devido à sua alta qualidade tipográfica. Em relação aos editores e compiladores, foram utilizados o WinEdt 8, o MiKTeX 2.9 e o PcTeX 6.1.

Capítulo 6

À descoberta de simetrias: um olhar matemático sobre calçadas, azulejos e varandas

O Património Cultural de um país, de uma região ou de uma cidade está em constante transformação. Perante este facto, a sociedade tem vindo a chamar a atenção para a importância deste, reclamando a sua proteção ou mesmo a sua classificação.

Todavia, a par deste Património classificado, há uma imensa riqueza patrimonial que nos rodeia que ainda não está classificada. Os exemplos são muitos, quer no campo do Património Material Imóvel, Móvel e Integrado, quer na área do Património Cultural Imaterial. Isto não significa que este Património não seja valioso, mas apenas que ainda não foi institucionalmente reconhecido como tal.

É neste contexto que estão as calçadas, que diariamente pisamos, e as varandas e os azulejos, que ornamentam as fachadas das nossas casas. Neste caso em particular, estamos perante um Património Imóvel (calçadas) e Património Integrado (varandas e azulejos). Se lhes dedicarmos um olhar mais atento, podemos apreciar interessantes padrões decorativos, ricos e diversificados, e que constituem uma excelente oportunidade para aplicar o conceito matemático de simetria.

Deste modo, surge o casamento, aparentemente pouco provável, entre a Matemática e o Património.

6.1 Património Cultural: conceitos e omissões

De acordo com o artigo 2.º da Lei n.º 107/2001 de 8 de setembro, integram o Património Cultural todos os bens que, sendo testemunhos com valor de civilização ou de cultura portadores de interesse cultural relevante, devam ser objeto de especial proteção e valorização. O interesse cultural relevante, designadamente histórico, paleontológico, arqueológico, arquitetónico, linguístico, documental, artístico, etnográfico, científico, social, industrial ou técnico, dos bens que integram o património cultural refletirá valores de memória, antiguidade, autenticidade, originalidade, raridade, singularidade ou exemplaridade.

Consideram-se bens culturais os bens móveis e imóveis que representem testemunho material com valor de civilização ou de cultura. Os bens imóveis podem pertencer às categorias de monumento, conjunto ou sítio, nos termos em que tais categorias se encontram definidas no direito internacional. Consideram-se bens culturais móveis integrantes do património cultural aqueles que constituam obra de autor português ou sejam atribuídos a autor português, hajam sido criados ou produzidos em território nacional, provenham do desmembramento de bens imóveis aí situados, tenham sido encomendados ou distribuídos por entidades nacionais ou hajam sido propriedade sua, representem ou testemunhem vivências ou factos nacionais relevantes a que tenham sido agregados elementos naturais da realidade cultural portuguesa, se encontrem em território português há mais de 50 anos ou que, por motivo diferente dos referidos, apresentem especial interesse para o estudo e compreensão da civilização e cultura portuguesas. Os bens culturais móveis referidos constituem espécies artísticas, etnográficas, científicas e técnicas, bem como espécies arqueológicas, arquivísticas, audiovisuais, bibliográficas, fotográficas, fonográficas e ainda quaisquer outras que venham a ser consideradas.

Os bens móveis e imóveis podem ser classificados como de interesse nacional, de interesse público ou de interesse municipal. Um bem considera-se de interesse nacional quando a respetiva proteção e valorização, no todo ou em parte, represente um valor cultural de significado para a Nação. Um bem considera-se de interesse público quando a respetiva proteção e valorização represente ainda um valor cultural de importância nacional, mas para o qual o regime de proteção inerente à classificação como de interesse nacional se mostre desproporcionado. Consideram-se de interesse

municipal os bens cuja proteção e valorização, no todo ou em parte, representem um valor cultural de significado predominante para um determinado município.

Na sequência da legislação nacional, a Região Autónoma dos Açores também procedeu à publicação de legislação sobre inventariação e protecção dos bens culturais, através da Republicação do Decreto Legislativo Regional n.º 29/2004/A, de 24 de Agosto. Neste sentido, há um vasto trabalho a realizar por entidades a título coletivo ou individual, designadamente no processo da valorização do Património regional não apenas na sua componente histórica ou artística, mas também pela sua dimensão pedagógica e cultural. Aliás, na lista de Património Classificado açoriano, não estão presentes calçadas, varandas ou painéis de azulejos, o que reflete as omissões ainda presentes no olhar institucional sobre a diversidade patrimonial, com escassa atenção sobre o Património Imóvel com leituras horizontais e sobre o Património Integrado.

6.2 A calçada portuguesa

Os passeios e praças em calçada portuguesa ou mosaico português são um dos aspetos mais característicos do património de muitas cidades portuguesas. Pisamo-los diariamente, mas, na maioria das vezes, não lhes damos a devida importância face à sua riqueza histórica, artística e geométrica.

Os padrões utilizados pelos calceteiros que se destacam nas calçadas de diversas cidades podem ser estudados tanto no seu conteúdo artístico como no matemático. É à luz da Matemática que pretendemos analisar os padrões e as suas simetrias presentes nos passeios e praças existentes um pouco por toda a ilha de São Miguel, nosso objeto de estudo.

Segundo Rego e Sousa [22], “o mosaico é tão antigo como a mais remota civilização histórica”. No entanto, foi com a civilização romana que este se expandiu na pavimentação das “domus” e das “villae”.

Em Portugal, a sua utilização, com fins decorativos, é uma derivação oitocentista da via romana. Foi em Lisboa que, pela primeira vez, em 1848, surge a sua aplicação a espaços urbanos, com o projeto “Mar Largo”, composição em forma de ondas, construído na Praça D. Pedro IV, hoje Rossio. Mas, seis anos antes deste projeto,



Figura 6.1: Calceteiros executando um pavimento.

numa iniciativa do tenente-general Eusébio Cândido Cordeiro Pinheiro Furtado, foram mandadas calcetar com pedras brancas (calcário) e escuras (basalto) as vielas de acesso ao Castelo de S. Jorge.

A calçada portuguesa rapidamente se espalhou por todo o país, chegando um pouco mais tarde aos Arquipélagos da Madeira e dos Açores. Também ultrapassou as fronteiras nacionais, sendo solicitados mestres calceteiros portugueses para executar e ensinar a sua arte no estrangeiro. A sua aplicação pode ser apreciada em projetos como o do Largo de S. Sebastião, construído em Manaus (Brasil), e o famoso calçadão da Praia de Copacabana no Rio de Janeiro; em Macau; na Cidade do Cabo (África do Sul); e em muitas outras paragens.

Nos Açores, o empedrado artístico surge entre o final do século XIX e o início do século XX, tendo vindo substituir lajeamentos basálticos que compunham os passeios dos antigos e principais arruamentos das cidades. Alastrou-se também a praças e largos e, nos nossos dias, a átrios e jardins particulares, com motivos artísticos diversos, contrastando o negro do basalto com o branco do calcário. Segundo Rego e Sousa [22], por razões económicas, predominam os fundos escuros da pedra basáltica de extração local, reservando-se o calcário branco (importado de Lisboa) para as partes menos amplas.

Na figura 6.1, apresenta-se uma foto de mestres calceteiros executando um pavimento em Ponta Delgada, com a técnica de desenho a duas cores. Utiliza-se um molde

em madeira com a configuração a implementar. Depois de colocada a pedra basáltica no exterior do molde, retira-se o molde e coloca-se o calcário branco no interior.

Nos Apêndices E a M apresentam-se os roteiros de simetria da cidade de Ponta Delgada (roteiro de rosáceas, roteiro de frisos e roteiro de padrões bidimensionais), bem como roteiros gerais dos 6 concelhos da Ilha de São Miguel. Utiliza-se preferencialmente a notação de Fejes Tóth [28].

Foi possível encontrar os 7 tipos de frisos em calçada na Ilha de São Miguel. Numa análise por concelhos, o concelho de Ponta Delgada é o único que apresenta todos os 7 tipos de frisos: 5 podem ser observados na cidade de Ponta Delgada (exceto F_1^1 e F_2^2) e os outros 2, nos Mosteiros. Também existem frisos do tipo F_1^1 nos Ginetes, nos Arrifes e nas Capelas. Em relação às restantes sedes de concelho, foi possível encontrar:

- LAGOA: 3 tipos de frisos (exceto F_1 , F_1^3 , F_2 e F_2^2);
- NORDESTE: 4 tipos de frisos (exceto F_1 , F_1^1 e F_1^3);
- POVOAÇÃO: 3 tipos de frisos (exceto F_1^1 , F_1^3 , F_2 e F_2^2);
- RIBEIRA GRANDE: 4 tipos de frisos (exceto F_1^1 , F_1^3 e F_2);
- VILA FRANCA DO CAMPO: 4 tipos de frisos (exceto F_1^2 , F_1^3 e F_2^2).

Também foram identificados diversos exemplares fora das sedes de concelho, em muitas freguesias junto a igrejas, coretos e triatos⁴.

Por curiosidade, refira-se que o único exemplar de um friso do tipo F_1^3 na ilha de São Miguel foi identificado na Rua Luís Soares de Sousa, na cidade de Ponta Delgada. Em relação aos frisos mais comuns, estes são essencialmente dos tipos F_2 e F_2^1 .

Em geral, os frisos em calçada na ilha de São Miguel são feitos em calcário, apresentando o fundo em basalto, precisamente ao contrário do que sucede com os frisos em calçada que normalmente encontramos no continente português, em particular,

⁴Os triatos do Espírito Santo estão associados às festividades em honra do Divino Espírito Santo nos Açores. Destinam-se à exposição dos símbolos do Espírito Santo, nomeadamente a coroa real encimada por uma pomba, a bandeira, o ceptro, o estandarte e as varas. São construídos em planta retangular com um só piso.

em Lisboa. Como já foi referido, supomos que a diferença se deve ao facto de o basalto ser muito abundante nos Açores. Esta tendência para a escolha da cor da pedra apenas é contrariada na Vila da Povoação, sede de concelho, onde muitos dos padrões encontrados em calçada apresentam o fundo branco. O mesmo se passa com alguns exemplares da Vila do Nordeste.

Por fim, refira-se a quase inexistência de padrões bidimensionais na calçada pesquisada. Por exemplo, na cidade de Ponta Delgada apenas foi possível identificar dois tipos: W_4^1 e W_1^2 . Exemplos destes dois tipos foram analisados nas Figuras 2.11 e 2.12

6.3 O azulejo na arte decorativa

O termo *azulejo* designa uma peça de cerâmica de pouca espessura, geralmente quadrada, em que uma das faces é vidrada, resultado da cozedura de um revestimento habitualmente denominado como esmalte, que se torna impermeável e brilhante. Esta face pode ser monocromática ou policromática, lisa ou em relevo. O azulejo é especialmente usado em grande número como elemento associado à arquitetura em revestimento de superfícies interiores ou exteriores ou como elemento decorativo isolado.

Foram os árabes que introduziram o azulejo em Portugal. As primeiras utilizações conhecidas do azulejo no nosso país, como revestimento monumental das paredes, foram realizadas com azulejos hispano-mouriscos, importados de Sevilha por volta de 1503. Esta cidade espanhola foi um grande centro de produção de azulejos, muito exportados para Portugal. Já nos séculos XVII e princípios de XVIII, um dos principais mercados abastecedores do país era a Holanda.

A vinda de ceramistas de outros pontos da Europa para Lisboa originou o início de uma produção portuguesa a partir da segunda metade do século XVI. Os pintores de azulejos serviam-se de gravuras vindas do estrangeiro para criarem revestimentos cerâmicos em grandes paredes, trabalho que obrigava a uma transposição de escala.

Em meados do século XVIII, assistiu-se a um aumento do fabrico de azulejos, o que se ficou, também, a dever a grandes encomendas do Brasil. Neste período, foram executados inúmeros painéis historiados em Portugal.

O uso de técnicas semi-industriais ou industriais permitiu uma maior rapidez e ri-

gor de produção. Na segunda metade do século XIX, o azulejo de padrão, mais barato, cobriu milhares de fachadas, delimitando portas e janelas. Os temas oscilam entre os relatos de episódios históricos, cenas mitológicas, iconografia religiosa e uma extensa gama de elementos decorativos aplicados a paredes, pavimentos e tetos de edifícios civis (palácios, jardins, habitações,...) e religiosos (ermidas, igrejas, mosteiros ou conventos,...).

De forte sentido cenográfico descritivo e monumental, o azulejo é considerado hoje como uma das produções mais originais da cultura portuguesa, onde se dá a conhecer, como num extenso livro ilustrado de grande riqueza cromática, não só a história, mas também a mentalidade e o gosto de cada época.

A existência de um Museu Nacional do Azulejo em Lisboa torna bem evidente o valor desta Arte em Portugal, não só pelo imenso Património existente por todo o país e pelas antigas partes do Império, entre o Brasil, as Áfricas e até a Índia, mas também pelo que representa, no passado e ainda na atualidade, da inteligência prática e da sensibilidade dos portugueses.

Nos Açores, inicialmente, os azulejos eram importados do continente português. Os exemplares mais antigos conhecidos nos Açores datam do século XV e foram importados para a ermida de Nossa Senhora dos Remédios da Lagoa.

Nos Açores, as fábricas de cerâmica surgiram nas duas principais ilhas, São Miguel e Terceira. As primeiras tentativas de uma fábrica de cerâmica em São Miguel foram na zona da Pranchinha, em Ponta Delgada, no ano de 1823 e depois em 1851, funcionando somente durante alguns anos, com pouca relevância.

Anos mais tarde, surge a primeira fábrica na Lagoa, fundada em 1862 por Bernardino da Silva e Manuel Leite Pereira, naturais de Vila Nova de Gaia, Tomás de Ávila Boim, natural da ilha do Pico, e Manuel Joaquim d’Amaral, natural da Vila da Povoação. Foi construída junto ao Porto dos Carneiros. Alguns anos depois, Manuel Leite Pereira separou-se da sociedade acima referida e construiu uma nova fábrica no local das Alminhas, na então Vila da Lagoa, em 1872, com o nome de “Fábrica Açoriana”, que rapidamente se afirmou pela qualidade dos seus produtos e pela sua produção, que justificava o emprego de 25 operários, em 1907.

Uma terceira fábrica surge em 1885, na antiga rua de São Sebastião, atual Avenida

Poças Falcão, também na Lagoa, por João Leite Pereira, natural de Vila Nova de Gaia e irmão de Manuel Leite Pereira, co-fundador da primeira fábrica e fundador da segunda.

A produção micaelense de azulejo inspirou-se no que se fabricava no norte de Portugal, mais concretamente na zona do Porto. Ainda hoje em dia, muitos dos azulejos que se encontram nas fachadas da atual cidade de Lagoa têm muito em comum com os da cidade nortenha, nomeadamente ao nível das cores, realçando-se o uso do azul e branco; e no que respeita às dimensões, em geral, 13×13 cm.

Do ponto de vista matemático, interessa-nos analisar painéis ou fachadas de azulejos em que há um determinado motivo que se repete. Em geral, esses painéis são constituídos por um único tipo de azulejo (com um desenho único). O desenho do azulejo utilizado e a forma como se distribuem as suas cópias na superfície plana determinam as simetrias de todo o painel ou fachada.

Apresenta-se no Apêndice N o roteiro do azulejo da cidade de Lagoa. No Apêndice O, analisam-se alguns exemplares existentes no Museu Municipal da Ribeira Grande. Dedicamos particular atenção à classificação das simetrias que encontramos numa simples peça de azulejo ou que se formam pela composição de várias peças, com destaque para a análise de diversas rosáceas, frisos e padrões bidimensionais. No roteiro do azulejo, demos particular atenção à análise de rosáceas.

Em relação aos padrões bidimensionais, é de notar que foi possível identificar 3 tipos no roteiro do azulejo. O mais abundante é do tipo W_4^1 , existindo também um exemplar do tipo W_4 e outro do tipo W_1^1 . Já no Museu Municipal da Ribeira Grande também foi possível identificar mais dois tipos: W_1^2 e W_2^2 .

6.4 As varandas em ferro fundido

O trabalho em ferro fundido alcançou particular importância a partir do século XIX, com o desenvolvimento da industrialização europeia. Com efeito, os industriais ampliaram as potencialidades do ferro: utilizado apenas com fins utilitários desde a Antiguidade, agora era cada vez mais usado e apreciado com fins estéticos e artísticos. Além disso, a fundição do ferro permitiu a sua produção em série. Deste modo, o

consumidor podia encomendar esta nova arte a preços mais acessíveis, permitindo que cada vez mais famílias endinheiradas pudessem configurar as suas habitações com ferro forjado, entre grades, portões e varandas. É neste contexto que, ao longo dos séculos XIX e XX, as casas mais nobres e senhoriais da ilha de São Miguel vão ganhando fachadas enriquecidas com as modas do ferro que vinham dos principais centros urbanos europeus, como Paris e Londres.

Parte desta realidade é ainda observada por nós quando caminhamos pelo centro histórico da cidade de Ponta Delgada e nos deparamos com uma elevada quantidade e variedade de varandas. De diferentes estilos e materiais, mais ou menos contemporâneas, trabalhadas minuciosamente por habilidosos artesãos ou já por processos mecanizados, todas elas emprestam às ruas da nossa cidade um encanto especial.

À semelhança das calçadas e dos azulejos, as nossas varandas, são igualmente ricas em padrões, e caracterizam-se pela repetição de um motivo ao longo de uma faixa, tal como acontece com muitos passeios em calçada. A classificação destes frisos constitui algo apelativo, do ponto de vista matemático.

No Apêndice P, apresenta-se o roteiro de varandas da cidade de Ponta Delgada. Foi possível identificar 6 dos 7 tipos possíveis de frisos (exceto F_1^1). De notar que os frisos mais comuns são do tipo F_1^2 e F_2^1 .

Capítulo 7

Aplicações no ensino

Não foi nossa pretensão elaborar este capítulo com a minuciosidade que se espera de um manual destinado aos ensinos básico e secundário. Pretendemos, apenas, e como complemento ao trabalho desenvolvido, apresentar sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas dentro e fora da sala de aula.

Deixamos ao critério do professor a seleção das atividades em função do nível de aprendizagem, bem como a elaboração de fichas de trabalho ou de outros materiais.

7.1 Programas e orientações curriculares

Com o Programa de Matemática do Ensino Básico [17], homologado em dezembro de 2007, o conceito de simetria ganhou relevo, passando a ser considerado um conceito-chave no ensino-aprendizagem da Matemática. Ficaram para trás os longos anos em que o conceito de simetria se resumia, muitas vezes, apenas à noção de simetria axial.

O estudo deste tópico no tema Geometria, em associação a um maior cuidado dado às transformações geométricas (cujo tratamento no programa homologado no início dos anos 90 era limitado e superficial), pode tornar-se, no âmbito da experiência matemática dos alunos ao longo do ensino básico, num fator relevante para o seu desenvolvimento matemático e cultural, integrando-se assim plenamente nos objetivos do ensino da Matemática.

Entretanto, foi aprovado recentemente um novo Programa de Matemática do Ensino Básico [18] e, nesse programa, o tema continua a ter a devida importância.

Em geral, as isometrias são trabalhadas no 1.º ciclo em associação com a exploração das simetrias de figuras e não na qualidade de transformações do plano, com um determinado número de propriedades que as caracterizam. Os objetivos específicos situam-se, para este ciclo, na identificação de simetrias (axial, rotacional e translacional) e na construção de figuras que possuam um determinado tipo ou tipos de simetria.

A partir do 2.º ciclo, as isometrias aparecem já como objetos matemáticos independentes. Numa primeira etapa, trata-se a reflexão e a rotação e numa etapa posterior, a translação e a reflexão deslizante. Dos objetivos específicos para o 2.º ciclo fazem parte, para além da construção e identificação de figuras com um determinado conjunto (grupo) de simetrias, a identificação, previsão e descrição da isometria que transforma um dado objeto num que lhe é congruente, estando reservado ao 3.º ciclo o reconhecimento das propriedades comuns das isometrias e o estudo formal do conceito de vetor.

As situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos, recorrendo, por exemplo, à calçada portuguesa, às varandas e azulejos, que constituíram o objeto de estudo desta dissertação.

As conexões matemáticas desempenham um papel nuclear na aprendizagem dos alunos e devem refletir-se ao longo de todo o seu percurso escolar. Aliás, os programas e orientações curriculares, nacionais e internacionais, apontam nesse sentido. O conceito de conexão matemática é abrangente e pode ser perspectivado e explorado de variadas formas. As pontes entre diferentes temas matemáticos, a ligação da Matemática com a vida do dia a dia e a sua relação com outras áreas do saber são exemplo disso. Aliás, o sentido que damos a uma ideia matemática depende das conexões que estabelecemos entre essa ideia e outras ideias matemáticas que possuímos.

As atividades que se seguem estão organizadas por ciclos de escolaridade, no entanto, efetuando pequenas alterações, as mesmas podem ser adaptadas a qualquer nível de ensino.

7.2 Explorações no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Nesta secção, partimos da noção intuitiva que cada aluno possui do que é a simetria e pretendemos chegar ao conceito matemático de simetria, usando uma sequência de atividades. As atividades propostas têm como objetivos: identificar a presença de simetrias nas formas geométricas; “desenhar” figuras a partir do seu eixo de simetria; traçar um ou mais eixos de simetria que sejam identificados nas figuras; perceber que o eixo de simetria divide a figura em partes iguais, no sentido de serem a imagem uma da outra por um espelho.

Proposta 1

Sugerimos que o professor faça uma recolha de fotos que contenham figuras simétricas e assimétricas. De entre as simétricas, escolham-se imagens que contenham simetrias de translação, rotação, reflexão e reflexão deslizante.

Uma vez na sala de aula, o professor deve agrupar os alunos em grupos de três ou quatro e desenvolver a atividade como se descreve de seguida:

- 1.1 Observa atentamente as fotos apresentadas.
- 1.2 Separa-as em dois grupos, conforme as consideres simétricas ou não.
- 1.3 Divide as figuras simétricas em grupos que te pareçam semelhantes.
- 1.4 Quais foram os critérios utilizados?

No final da atividade deve-se comparar a classificação entre os vários grupos de trabalho e aferir se os critérios usados foram os mesmos. A partir dessas comparações, pretende-se chegar ao conceito matemático de simetria.

Proposta 2

Observa a Figura 7.1. Desenha a imagem de cada uma das subfiguras por reflexão segundo o eixo r .

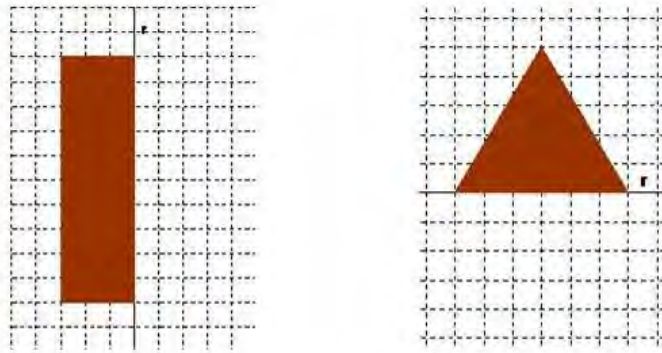


Figura 7.1: 1.º Ciclo – Proposta 2.



Figura 7.2: 1.º Ciclo – Proposta 3.

Proposta 3

Observa as subfiguras da Figura 7.2. Usando um espelho, descobre em que posições o podes colocar de forma que consigas visualizar cada figura por completo.

Note-se que também é possível aproveitar esta atividade para analisar, com espelhos, exemplos reais na nossa calçada, na sequência de uma determinada visita de estudo.

7.3 Explorações no 2.º Ciclo do Ensino Básico

É neste ciclo que os tópicos “Noção e propriedades da reflexão, da rotação e da translação” e “Simetria axial e rotacional” são trabalhados.

As atividades propostas têm como objetivos específicos: identificar e descrever a isometria em causa, dada a figura geométrica e o transformado; construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias; compreender as noções de simetria axial e rotacional e identificar as simetrias numa figura; completar, desenhar e explorar padrões geométricos que envolvam simetrias; identificar as simetrias de frisos e rosáceas; construir frisos e rosáceas.

Proposta 1

Realização de uma visita de estudo, por exemplo, ao centro histórico da cidade de Ponta Delgada. Os alunos, munidos dos roteiros de simetria (por exemplo, do roteiro de rosáceas, do roteiro de frisos ou do roteiro das varandas de Ponta Delgada), bem como dos fluxogramas, são convidados a percorrer o caminho indicado analisando ao pormenor os exemplos expostos nos roteiros e classificando-os.

Se possível, os alunos deverão fazer-se acompanhar de um bloco de notas e de uma máquina fotográfica para registar outros exemplos que não se encontram nos roteiros.

Com o material recolhido, os alunos poderão organizar uma exposição para divulgação dos seus trabalhos junto da comunidade educativa.

Proposta 2

Imagina que a praça principal da tua localidade vai ser remodelada. As obras de remodelação incluem a repavimentação do centro da praça, em calçada portuguesa. Usando papel quadriculado ou o software *Tess* (www.peda.com/tess), cria um motivo simples. Com esse motivo constrói uma rosácea e apresenta a tua proposta à entidade responsável pela repavimentação do centro da praça. Com o mesmo motivo (ou outro à tua escolha), constrói agora um friso para a repavimentação do passeio, em calçada portuguesa, da rua onde moras.

Proposta 3

Observa as seguintes rosáceas (Figura 7.3):



Figura 7.3: 2.º Ciclo – Proposta 3.

Caracteriza as simetrias que possuem e, caso existam, desenha os seus eixos de simetria.

Proposta 4

Observa os seguintes frisos, recolhidos no concelho de Ponta Delgada (Figura 7.4).

Identifica, em cada friso, o motivo e as simetrias que possui.

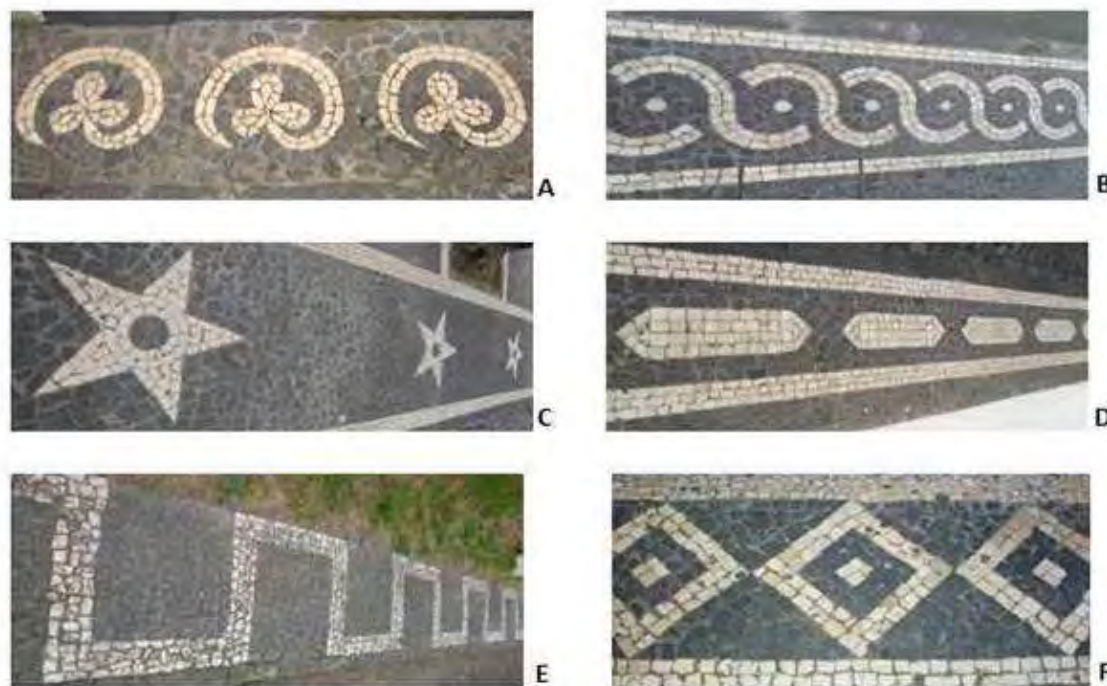


Figura 7.4: 2.º Ciclo – Proposta 4.

Proposta 5

Observa o painel constituído pelos azulejos D, E, F, G, H e I. (Figura 7.5)

- 5.1 Se aplicares ao azulejo D uma rotação de centro O e amplitude -90° (rotação de sentido negativo), seguida de uma reflexão de eixo AC, qual é o azulejo que encontras?
- 5.2 Indica o centro, a amplitude e o sentido do ângulo de uma rotação que poderia levar o azulejo H a coincidir com o azulejo E.
- 5.3 Indica o centro, a amplitude e o sentido do ângulo de uma rotação que poderia levar o azulejo H a coincidir com o azulejo F.
- 5.4 Indica o centro, a amplitude e o sentido do ângulo de uma rotação que poderia levar o azulejo H a coincidir com o azulejo I.

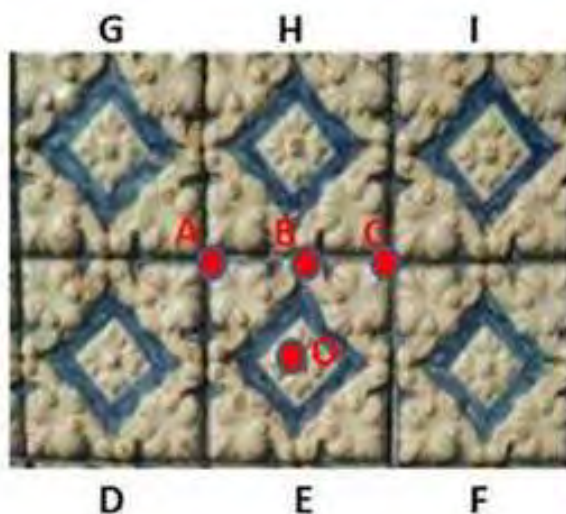


Figura 7.5: 2.º Ciclo – Proposta 5.

7.4 Explorações no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Ensino Secundário

No 3.º ciclo são retomados os tópicos explorados no ciclo anterior fazendo-se uma revisão e aprofundamento dos mesmos, com especial destaque para a translação e reflexão deslizante. O principal enfoque é dado às propriedades das isometrias.

As atividades propostas têm como objetivos específicos: identificar e descrever a isometria em causa, dada uma figura geométrica e o seu transformado; construir o transformado de uma figura, a partir de uma isometria ou de uma composição de isometrias; reconhecer as propriedades comuns das isometrias; identificar as simetrias de rosáceas, frisos e padrões bidimensionais; construir rosáceas, frisos e padrões bidimensionais.

Com as devidas adaptações, as atividades que se seguem podem também ser aplicadas no ensino secundário na disciplina de Matemática B.

Proposta 1

Realização de uma visita de estudo, por exemplo, ao centro histórico da cidade de Ponta Delgada. Os alunos, munidos dos roteiros de simetria (por exemplo, do roteiro de rosáceas, do roteiro de frisos, do roteiro de padrões bidimensionais ou do roteiro das varandas de Ponta Delgada), bem como dos fluxogramas, são convidados a percorrer o caminho, analisando ao pormenor os exemplos expostos nos roteiros e classificando-os.

Se possível, os alunos deverão fazer-se acompanhar de um bloco de notas e de uma máquina fotográfica para registar outros exemplos que não se encontram nos roteiros.

Com o material recolhido, os alunos poderão organizar uma exposição para divulgação dos seus trabalhos junto da comunidade educativa.

Proposta 2

O professor poderá elaborar um projeto, em parceria com as entidades locais, para a repavimentação de uma rua ou de uma praça, em calçada portuguesa.

Para tal, será pedido a cada aluno que construa, em papel quadriculado ou usando o software *Tess* (www.peda.com/tess), uma proposta para uma rosácea, para um friso ou para um padrão bidimensional (de acordo com a área a pavimentar). Recolhidas as diferentes propostas, estas ficarão expostas, de modo a envolver toda a comunidade escolar que votará na proposta vencedora. A selecionada será apresentada à entidade camarária que procederá à sua execução.

Proposta 3

Esta proposta é adaptada do “Projecto 1001 itens”, do GAVE [41]. A figura Figura 7.6 representa parte de um revestimento em azulejo de uma fachada de uma moradia na cidade de Lagoa.



Figura 7.6: 3.º Ciclo e Secundário – Proposta 3.



Figura 7.7: 3.º Ciclo e Secundário – Proposta 3.1.

3.1 Na Figura 7.7, é reproduzido um elemento-base do revestimento anterior.

- (a) Assinala os eixos de simetria axial da figura;
- (b) Justifica que a figura tem simetrias de rotação, indicando o centro e as suas amplitudes;
- (c) Classifica a rosácea quanto ao seu grupo de simetria.

3.2 Identifica as restantes simetrias do padrão bidimensional da Figura 7.6 e classifica-o.

Proposta 4

Esta proposta é adaptada do Teste Intermédio de Matemática B, 10.º ano, 2010. No campo de S. Francisco, em Ponta Delgada, podemos encontrar, em calçada portuguesa, várias rosáceas como a que ilustramos na figura seguinte (Figura 7.8).



Figura 7.8: 3.º Ciclo e Secundário – Proposta 4.

- 4.1 Através de uma rotação de centro no ponto O pode obter-se, a partir do polígono $[ABCO]$, o polígono $[EFGO]$. Apresenta um valor da amplitude, em graus, dessa rotação. Justifica a tua resposta.
- 4.2 Qual é a imagem do triângulo $[GHO]$ por uma reflexão com eixo de reflexão EM ? E com eixo de reflexão AI ?
- 4.3 Qual é o eixo de simetria da reflexão que transforma o ponto K no ponto C ?
- 4.4 Justifica que a figura apresentada tem simetria rotacional. Na tua justificação, refere as amplitudes possíveis para as simetrias de rotação centradas no ponto O .
- 4.5 Classifica a figura apresentada, usando o fluxograma para a classificação de rosáceas (Apêndice B).

Proposta 5

Observa os seguintes frisos (Figura 7.9), recolhidos no concelho de Ponta Delgada.



Figura 7.9: 3.º Ciclo e Secundário – Proposta 5.

5.1 Identifica, em cada friso, o motivo e as simetrias que possui.

5.2 Usando o fluxograma para a classificação de frisos (Apêndice C), classifica-os.

Esta atividade também pode ser realizada tendo como suporte o roteiro de varandas da cidade de Ponta Delgada e os seus exemplos de frisos.

Considerações finais

O estudo apresentado pretende mostrar que a Matemática está presente no quotidiano e que, através da realidade que nos rodeia, podemos motivar os nossos alunos para a aprendizagem desta ciência. Fomentar o gosto pela Matemática tem sido uma das grandes preocupações, quer por parte de educadores e professores como de encarregados de educação. Sem dúvida que uma das soluções pode passar por aliar as vivências diárias dos alunos aos seus conhecimentos matemáticos.

Ao mostrar a presença da Matemática nas nossas varandas, passeios e azulejos, estamos a dar um exemplo prático da sua aplicabilidade. Além disso, podemos motivar os jovens a trabalhar conceitos fundamentais de Geometria como as isometrias do plano (reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante) e o conceito de simetria.

Como é sabido, em 2013, comemora-se o Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra (MPT 2013). A intenção é promover, por todo o mundo, iniciativas que alertem para o papel primordial que a Matemática pode desempenhar em muitas questões relacionadas com o Planeta Terra. Em Portugal, o Ministério da Educação e Ciência, em parceria com o Ministério dos Negócios Estrangeiros, liderou o processo de criação de um Comité Nacional, com o apoio da Comissão Nacional da UNESCO. Um dos projetos criados pelo Comité Nacional, no âmbito do MPT 2013, é a “Matemática Urbana”, que tem como finalidade, entre outros aspetos, o levantamento matemático da calçada portuguesa. Deste modo, e até ao encerramento desta iniciativa, todas as atenções estão voltadas para a Matemática das nossas calçadas.

Atendendo a este facto, podemos afirmar que a instituição deste Ano Internacional da Matemática do Planeta Terra, vem demonstrar a pertinência do tema desta dissertação e, ao mesmo tempo, validar todo o trabalho desenvolvido. Acresce referir que os roteiros de rosáceas e de frisos de Ponta Delgada (São Miguel), desenvolvidos

no âmbito desta dissertação, se encontram disponíveis no site oficial do MPT 2013

www.mat.uc.pt/mpt2023/matematica-urbana.html

e constituem um precioso contributo para a concretização dos objetivos que nos propusemos alcançar. Estes roteiros também foram divulgados no encontro internacional de Matemática Recreativa, *Recreational Mathematics Colloquium III*, que se realizou em abril deste ano, em Ponta Delgada, e que reuniu matemáticos de todo o mundo. Para além disso, o levantamento realizado tem sido divulgado, junto de professores e alunos, mediante algumas palestras de divulgação que proferimos nos últimos meses. Todos os roteiros desenvolvidos no âmbito desta dissertação também estão disponíveis em:

<http://sites.uac.pt/rteixeira/simetrias/>

A informação recolhida no âmbito da construção de roteiros pode ter várias utilidades. Para além da sua utilização no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, nomeadamente, na consolidação do conceito de simetria, também deve ser aproveitada pelas autoridades camarárias que, ao procederem a trabalhos de repavimentação, podem adotar os frisos que estão em falta na sua cidade. Há, ainda, a possibilidade de se potenciar um tipo de turismo aliado ao património e à Matemática – o turismo matemático. Uma opção poderá passar pela elaboração de guias turísticos, em várias línguas, que aliem a explicação dos conceitos de simetria ao contexto histórico e cultural.

Em jeito de conclusão podemos afirmar, com toda a veemência, que a exploração da Matemática presente nas nossas calçadas, varandas e azulejos é um investimento com frutos garantidos por conseguir estabelecer um cruzamento entre a ciência, o ensino e a cultura.

Bibliografia

- [1] AAVV (1998-2010). *Inventário do Património Imóvel dos Açores*. Angra do Heroísmo: Instituto Açoriano de Cultura.
- [2] Araújo, P. V. (1998). *Curso de Geometria*. Lisboa: Gradiva.
- [3] Bellingeri, P. et al. (2003). *O Ritmo das formas: Itinerário matemático (e não só) no mundo da simetria*. Porto: Associação Atractor.
- [4] Breda, A. et al. (2011). *Geometria e Medida no ensino básico*. Lisboa: ME-Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- [5] Cabrera, A. & Nunes, M. (1990). *Olhar o chão*. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.
- [6] Cruz, C. (2006). *Grupos de Frisos e Grupos Cristalográficos Planos*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- [7] Devlin, K. (2002). *Matemática: A Ciência dos Padrões*. Porto: Porto Editora.
- [8] Farmer, D. (1999). *Grupos e Simetria: Um guia para descobrir a Matemática*. Lisboa: Gradiva.
- [9] Fernandes, F. (1981). *A indústria e arte do ferro forjado em Viana do Castelo*. Acedido a 21 de outubro de 2013 em: <http://gib.cm-viana-castelo.pt/documentos/20080515142041.pdf>.
- [10] Hargittai, M e Hargittai, I. (2009). *Visual Symmetry*. London: World Scientific Publishing.

-
- [11] Lobão, C. (2003). *Os ladrilhos da cidade da Horta*. Horta: Junta de Freguesia de Matriz.
- [12] Lopes, C. (2005). *Os Sete Grupos de Frisos*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.
- [13] Martin, G. E. (1987). *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*. New York: Springer-Verlag.
- [14] Martins, G. (2010). *Património como valor humano: 100 anos de Património (1910-2010)*. Lisboa: IGESPAR.
- [15] Matos, E. (2006). *Calçada Portuguesa nos Açores*. Angra do Heroísmo: BLU Edições.
- [16] Ministério da Educação (2001). *Programa de Matemática B*. Lisboa: ME - Departamento do Ensino Secundário.
- [17] Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME - Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- [18] Ministério da Educação e Ciência (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, MEC - Direcção Geral da Educação.
- [19] Monteiro, A. & Matos, I. (1995). *Álgebra: Um primeiro curso*. Lisboa: Escolar Editora.
- [20] Perez, I. & Reis, P. (2002). Classificação dos grupos discretos de $ISO(\mathbb{R}^2)$: Grupos finitos, grupos de frisos e grupos de azulejos. *Boletim da SPM* 46, 53-79.
- [21] Presidência do Governo Regional dos Açores (2005). *IM-Comunicar Intermuseus* 5. Açores: Direcção Regional da Cultura. Acedido a 16 de outubro de 2012 em: <http://museus.azores.gov.pt/ficheiros/jornal/1522006205814.pdf>.
- [22] Rego, V. & Sousa, N. (2000). *Calçada artística nos passeios de Ponta Delgada*. Ponta Delgada: Açores-Criações Tur'Arte.
- [23] Roll, W. (1970). *Mosaicos*. Lisboa: Editorial Presença.

- [24] Secretaria Regional da Educação e Formação (2011). *Referencial Curricular para a Educação Básica na Região Autónoma dos Açores*. Açores: SREF-DREF.
- [25] Serra, M. (2003). *Discovering Geometry: An Inductive Approach*. Berkeley, CA.: Key Curriculum Press.
- [26] Stevens, P. (1999). *Handbook of Regular Patterns: An Introduction to Symmetry in Two Dimensions*. Cambridge: The MIT Press.
- [27] Stewart, I. (2003). *Os Números da Natureza*. Lisboa: Rocco - Temas & Debates.
- [28] Tóth, F. (1964). *Regular Figures*. London: Pergamon.
- [29] Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas Actuais*. Lisboa: Ministério da Educação - Instituto de Inovação Educacional.
- [30] Veloso, E. (2012). *Simetria e Transformações Geométricas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- [31] Veloso, E. (2014). Geometria colorida. *Educação e Matemática* 127, 27-31.
- [32] Washburn, D. & Crowe, D. (1988). *Symmetries of Culture: Theory and Practice of Plane Pattern Analysis*. Seattle: University of Washington Press.
- [33] Washburn, D. & Crowe, D. (2004). *Symmetry Comes of Age: The Role of Pattern in Culture*. Seattle & London: University of Washington Press.
- [34] Weyl, H. (1980). *Symmetry*. New Jersey: Princeton University Press.

Webgrafia: (Consultada em outubro de 2013)

- [35] <http://www.culturacores.azores.gov.pt/legislacao>
- [36] <http://www.culturacores.azores.gov.pt/rrbc>
- [37] <http://www.patrimoniocultural.pt>
- [38] <http://www.monumentos.pt>
- [39] <http://www.museudoazulejo.pt>

[40] <http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/Simetria>

[41] <http://www.gave.min-edu.pt/np3/15.html>

Índice Remissivo

- figura do plano, 9
- frisos, 79, 85, 99
 - eixo central, 99
 - notação cristalográfica, 116
 - notação de Fejes Tóth, 116
 - simetrias de reflexão deslizante não triviais, 101
- grupo, 7
 - cíclico, 9
 - comutativo ou abeliano, 8
 - finito, 7
 - ordem, 7
 - isomorfismo, 8
 - subgrupo, 8
 - subgrupo gerado por um conjunto, 9
- grupo de simetria, 71
 - de um polígono, 82, 85
 - de um polígono regular, 79, 82
 - grupos cíclicos, 82, 89
 - grupos de frisos, 85, 116
 - grupos de padrões bidimensionais, 85
 - grupos diedrais, 82, 89
- isometria, 11
 - ímpar, 46
 - par, 46
- reflexão, 16
 - eixo de reflexão, 16
- reflexão deslizante, 55
 - eixo de deslocamento, 55
 - vetor não nulo associado, 55
- rotação, 23
 - ângulo orientado associado, 23
 - centro de rotação, 23
 - meia-volta, 24
 - ordem da rotação, 70
- translação, 21
 - vetor associado, 21
- padrões bidimensionais, 79, 85, 126
- património cultural
 - azulejo, 135, 140
 - calçada portuguesa, 135, 137
 - integrado, 135, 137
 - móvel e imóvel, 135–137
 - varandas, 135, 143
- polígono, 79
 - regular, 79
- rosáceas, 79, 85
 - centro, 88
 - grupo de simetria C_n , 82, 88
 - grupo de simetria D_n , 82, 88

simetria, 70

 central, 70

 ponto de simetria, 70

de reflexão deslizante, 70

de reflexão ou axial, 70

 eixo de simetria, 70

de rotação de ordem n , 70

 centro de ordem n , 70

de translação, 70

 módulo mínimo, 75

transformação geométrica, 9

 composição ou produto, 10

 identidade, 10

 imagem de um conjunto, 9

 imagem de um ponto, 9

 ponto fixo, 9

 transformação inversa, 10

 transformação involutiva, 16

Apêndices