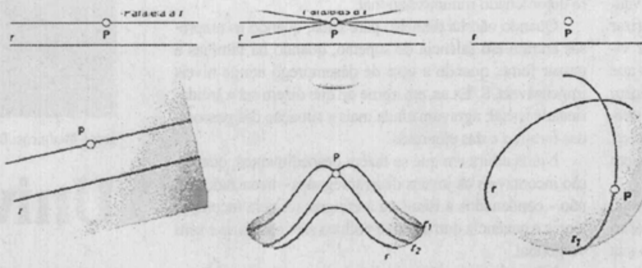
A Geometria Hiperbólica no ensino básico (?)

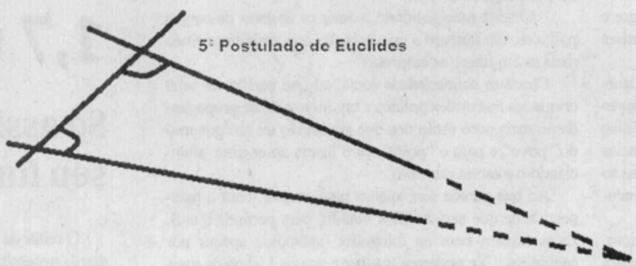
João Cabral*

No novo programa proposto pelo Ministério de Educação, para a Matemática, suportado pelo documento designado *Programa e Metas Curriculares – Matemática – Ensino Básico,* na página 73, inserido no conteúdo Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos, está presente uma "novidade" no ensino da Matemática, que deve ser implementada no 9º ano de escolaridade. No ponto 3.3 é referido o objetivo: ***Saber que é possível construir teorias modificando determinadas axiomáticas da Geometria Euclidiana que incluam o 5.º postulado de Euclides e substituindo-o pela respetiva negação, designar essas teorias por «Geometrias não-Euclidianas» e, no caso de não haver outras alterações à axiomática original para além desta substituição, saber que se designa a teoria resultante por «Geometria Hiperbólica» ou «de Lobachewski».***

Na sua forma original, apenas traduzido para Português, o 5.º postulado diz o seguinte: ***"Se uma linha reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois ângulos retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos."***. Confuso? Caro leitor, não se sinta mal consigo mesmo por não perceber o que o postulado afirma, pois este sentimento foi sempre partilhado por todos os que leram o postulado, desde a primeira vez que Euclides publicou-o na sua obra *Os Elementos*. Quando Euclides construiu os alicerces da Geometria, através de todo um conjunto de regras, bastante claras e simples, usando frases muito curtas e diretas, tais como: "Por dois pontos passa uma única reta.". Neste postulado, no entanto, usou um texto longo que lançou logo confusão, mesmo nas mentes mais brilhantes. Assim, o 5.º postulado de Euclides, mesmo sendo o mais famoso dos postulados, é ao mesmo tempo, aquele que tem dado mais dores de cabeça aos Matemáticos. Na tentativa de clarificar o que este texto original dizia, socorri-me na minha colega do Departamento de Matemática, da Universidade dos Açores, a Investigadora em Geometria, professora Doutora Helena Melo, que me forneceu, uma interpretação pessoal do postulado: "Sabemos que qualquer reta contida num plano divide-o em duas partes denominadas de semiplanos. Considerando outras duas retas que a intersecta, os dois pontos de intersecção são vértices dos quatro ângulos existentes num semiplano. Tendo em atenção a posição dessas três retas, o 5.º postulado de Euclides refere que, num semiplano, quando a soma da amplitude dos ângulos entre as duas retas é menor que 180º, essas retas intersectam-se nesse mesmo semiplano."



Geometria Euclidiana — Geometria Hiperbólica — Geometria Esférica



Para o leitor ter uma ideia da discussão que este postulado provocou, logo desde a sua escrita inicial, parafraseio o matemático Próclo (410-485), que o criticou severamente, chegando a afirmar que: *"Este postulado deve ser riscado da lista, pois é uma proposição com muitas dificuldades que Ptolomeu, em certo livro, se propôs resolver... A asserção de que duas linhas rectas, por convergirem mais e mais à medida que forem sendo prolongadas, acabam por se encontrar, é plausível mas não necessária. (...)"*. O próprio Euclides, e muitos dos seus sucessores, tentaram, sempre sem sucesso, demonstrar essa proposição, usando os outros axiomas da Geometria Euclidiana. Esta impossibilidade foi, ao longo de muitos séculos, o escândalo da Geometria e o desespero dos Geómetras. Cientistas como Ptolomeu de Alexandria (90-168), John Wallis (1616-1703) e Isaac Newton (1643-1727) falharam na tentativa de validar os argumentos do 5.º Postulado de Euclides.

O padre jesuíta Saccheri (1677-1733), através de uma abordagem completamente inovadora, que ficou conhecida como método de redução ao absurdo, admitindo a negação do Postulado, tentou obter algum absurdo ou contradição, mas também sem sucesso. O método de Saccheri, de redução ao absurdo, isto é, tenta-se provar algo negando a possível verdade, para obter algo errado ou contraditório, chegando-se à conclusão de que o que negamos tem de ser mesmo verdade, ainda hoje é usado na Matemática do Século XXI. Ao negar o 5.º Postulado de Euclides, Saccheri abriu o caminho para o nascimento das conhecidas geometrias não Euclidianas. O trabalho de Saccheri caiu, no entanto, no esquecimento durante mais de um século. Karl Gauss (1777-1855) restaurou alguns princípios do trabalho de Saccheri, quando, de forma autónoma, implementou a mesma técnica para tentar provar o 5.º Postulado, não conseguindo, também, obter nenhuma contradição.

Apesar da muita discussão gerada pelo postulado, as mentes mais inconformadas da Matemática nunca desistiram de tentar perceber as implicações do facto do Postulado ser, ou não, uma verdade. No debate surge, através do jovem matemático húngaro, Janos Bolyai (1802-1860), a ideia de que ao negar o postulado estávamos a construir um outro tipo de geometria, algo ainda imperceptível ao ser humano. De facto, resultante dessa discussão, o matemático russo Nicolai Lobachewski (1792-1856) publica em 1829 a sua versão da geometria não euclidiana à qual chama, primeiramente "imaginária" e depois "pangeometria". Atualmente, esta geometria é chamada Geometria Hiperbólica.

Assim, foi necessário esperar até ao século XIX para que Karl Gauss, Janos Bolyai, Bernard Diemann e Nicolai Ivanovich Lobachevski conseguissem demonstrar que o 5.º postulado, ou axioma das paralelas, era de facto um axioma, necessário e independente dos outros, pois é o axioma que diferencia a Geometria Euclidiana, das geometrias não Euclidianas. Estes matemáticos admitiram que o axioma era falso e substituíram-no por outros axiomas. Por exemplo, se dissermos que *"Por um ponto exterior a uma reta, podemos traçar uma infinidade de paralelas a esta reta"* estamos a trabalhar com a Geometria de Lobachevski, mas se afirmarmos que "Por um ponto exterior a uma recta não podemos traçar nenhuma paralela a esta recta" estamos já a trabalhar com a Geometria de Riemann. Todos deduziram que, substituindo o axioma das paralelas, era possível construir duas Geometrias diferentes da Geometria Euclidiana, igualmente coerentes e que não conduziam a nenhuma contradição. Apesar de serem dificilmente concebíveis, estas duas novas geometrias foram a pouco e pouco reconhecidas como alternativas legítimas. Chegou-se mesmo a demonstrar que, se qualquer das duas pudesse apresentar alguma contradição, a própria geometria euclidiana seria também contraditória. Desde então, encontramo-nos perante três sistemas geométricos diferentes:

1- A Geometria Euclidiana, por vezes também chamada Parabólica;

2- A Geometria de Lobachevski, também chamada Hiperbólica;

3- A Geometria do Riemann, também chamada Elíptica ou Esférica.

Estas novas geometrias permitiram às ciências exatas do século XX uma série de avanços, entre os quais a elaboração da Teoria da Relatividade de Einstein (1879 - 1955). O que permitiu provar que essas teorias, ao contrário do que muitos afirmavam, tinham realmente aplicações práticas.

Da mesma forma que ao longo dos séculos a discussão do 5.º Postulado de Euclides gerou discussão, mas através dessa troca de ideias foram surgindo novos conceitos e novas geometrias, a implementação da discussão do postulado no Ensino Básico em Portugal vai possibilitar ao aluno o contacto com uma nova visão geométrica, mais próxima da realidade, verificando que de facto a Geometria Euclidiana não responde a todas as questões, sendo necessário trabalhar com outras geometrias quando queremos estudar e explorar a natureza que nos envolve.

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
Diretor do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação
jcabral@uac.pt