



UNIVERSIDADE DOS AÇORES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

Interpretação Geométrica dos Problemas Clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti

RAQUEL MARIA ALMEIDA FARIA

PONTA DELGADA

ABRIL DE 2013



UNIVERSIDADE DOS AÇORES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

Interpretação Geométrica dos Problemas Clássicos de Desargues, Fagnano e Malfatti

RAQUEL MARIA ALMEIDA FARIA

Dissertação apresentada para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática para Professores, sob a orientação da Professora Doutora Helena de Fátima Sousa Melo e do Professor Doutor João Manuel Gonçalves Cabral, do Departamento de Matemática da

Universidade dos Açores.

PONTA DELGADA

ABRIL DE 2013

Conteúdo

Conteúdo	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Notações	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
Agradecimentos	xiii
1 Introdução	1
2 Geometrias não Euclidianas	3
2.1 Geometria Projetiva	4
2.1.1 Definições e Notações	4
2.1.2 Perspetividade e Projetividade	5
2.1.3 O Plano Projetivo	9
2.1.4 Princípio da Dualidade	11
2.1.5 Razão Cruzada	12
2.1.6 Pontos Harmónicos Conjugados	14
2.2 Geometria Hiperbólica	17
2.2.1 O Plano Hiperbólico	17
2.2.2 Imersões Isométricas	17
2.2.3 A Métrica Hiperbólica	18
2.2.4 Geodésicas	19
2.2.5 O Grupo $PSL(2, \mathbb{R})$	20
2.2.6 O Disco Unitário	22
2.3 Geometria Inversiva	22
2.3.1 Inversão	23
2.3.2 Alguns Resultados da Inversão	24
2.3.3 Inversão e Sistema de Coordenadas	26
3 Problema de Desargues	29
3.1 Desargues: Um Matemático Incompreendido	29
3.2 Desargues e a Geometria Projetiva	30

3.3	Desargues e a Geometria Euclidiana	33
3.4	Estudo da Localização da Reta Perspetiva	40
3.4.1	Posições Relativas dos Triângulos Perspetivos	41
3.4.2	Regiões do Plano Projetivo e do Plano Hiperbólico	42
3.4.3	O Ponto Perspetivo é Próprio	46
	Vértices Homólogos Pertencem à Mesma Semirreta	47
	Vértices Homólogos Pertencem a Semirretas Distintas	49
3.4.4	Ponto Perspetivo Impróprio	51
3.4.5	Resultado no Plano Hiperbólico	53
4	Problema de Fagnano	57
4.1	Vida e Obra do Autor	57
4.2	Estudo do Problema de Fagnano	57
4.2.1	Resolução de Fejér	60
4.2.2	Resolução de Schwarz	61
4.2.3	Solução com Base no Teorema de Heron	62
4.2.4	Solução Através do Produto Escalar	65
4.2.5	Perímetro do Triângulo Órtico	67
4.2.6	Uma Aplicação no Ensino Secundário	70
5	Problema de Malfatti	73
5.1	Origem e Evolução do Problema	73
5.2	Malfatti e a Geometria Euclidiana	75
5.2.1	Resolução Analítica	75
5.2.2	Resolução Geométrica	78
	Solução de Schellbach	79
	Solução de Steiner	81
	Comparação das Soluções	83
5.3	Malfatti e a Geometria Inversiva	84
5.3.1	Caso de Tangência Entre as Circunferências	84
5.3.2	Caso Geral	89
	Roteiro de Construção da Solução	91
5.3.3	Número de Soluções do Problema de Malfatti-Steiner	92
6	Uma Aplicação Curricular: O Jogo do Paralelo	101
6.1	O Jogo e o Currículo	101
6.2	Caracterização do Jogo do Paralelo	102
6.3	Experimentação do Jogo do Paralelo	105
7	Conclusões Finais	109
	Bibliografia	113

Lista de Figuras

2.1	Feixe de retas $P(a, b, c, d, e)$	5
2.2	Feixe de pontos $r(A, B, C, D)$	5
2.3	Perspetividade.	6
2.4	Perspetividade entre feixes de pontos.	7
2.5	Perspetividade entre feixes de retas.	7
2.6	Projetividade.	9
2.7	Configuração do plano de Fano.	11
2.8	A perspetividade não preserva distâncias.	12
2.9	Caso de perspetividade que preserva distâncias.	12
2.10	Uma perspetividade pode não manter a relação entre pontos.	13
2.11	Reta orientada.	13
2.12	Razão cruzada.	14
2.13	Quadrângulo completo $[PQRS]$	15
2.14	Quadrilátero completo $[pqrs]$	15
2.15	Conjunto harmónico $H(A, B; C, D)$	16
2.16	O ponto D é conjugado harmónico de C em relação a A e B	16
2.17	Geodésicas.	19
2.18	Ângulo entre geodésicas.	20
2.19	Os pontos A e A' são pontos inversos.	23
2.20	As circunferências C_i e C'_i são ortogonais.	25
2.21	Pontos inversos e ângulos congruentes.	26
2.22	Os ângulos $\angle ABP$ e $\angle P'B'A'$ são congruentes.	26
2.23	Os ângulos $\angle APB$ e $\angle B'P'A'$ são congruentes.	27
3.1	Configuração de Desargues no plano projetivo.	30
3.2	As três retas perspetivas são concorrentes.	32
3.3	A reta perspetiva incide com conjugados harmónicos.	33
3.4	Configuração de Desargues no plano euclidiano.	35
3.5	Caso particular do teorema de Desargues.	35
3.6	Homotetia direta.	37
3.7	A translação como composição de duas homotetias.	38
3.8	A homotetia como composição de duas homotetias.	39
3.9	Os triângulos são perspetivos da mesma reta.	41
3.10	A reta perspetiva interseta os dois triângulos.	42
3.11	Triângulos em posição invertida negativa.	42
3.12	Triângulos em posição invertida positiva.	43

3.13	Triângulos perspetivos em posição direta.	43
3.14	A região \mathcal{R}_l	44
3.15	A região \mathcal{R}_v	44
3.16	As retas l_e e l_i	45
3.17	As retas v_i e v_e	45
3.18	A região \mathcal{E}_{lv}	46
3.19	A região \mathcal{I}_{lv}	46
3.20	Triângulos em posição invertida negativa no plano projetivo: reta perspetiva na região \mathcal{R}_l	47
3.21	Triângulos em posição invertida negativa no plano hiperbólico: reta perspetiva na região \mathcal{G}_l	48
3.22	Triângulos em posição invertida positiva no plano projetivo: reta perspetiva na região \mathcal{R}_v	48
3.23	Triângulos em posição invertida positiva no plano hiperbólico: reta perspetiva na região \mathcal{G}_v	49
3.24	Triângulos em posição direta no plano projetivo: reta perspetiva na região \mathcal{E}_{lv}	49
3.25	Triângulos em posição direta no plano hiperbólico: reta perspetiva na região \mathcal{F}_{lv}	50
3.26	Reta perspetiva na região \mathcal{R}_v	50
3.27	Reta perspetiva na região \mathcal{G}_v	51
3.28	Reta perspetiva na região \mathcal{R}_l	51
3.29	Reta perspetiva na região \mathcal{G}_l	52
3.30	Reta perspetiva na região \mathcal{I}_{lv}	52
3.31	Reta perspetiva na região \mathcal{D}_{lv}	53
3.32	Reta perspetiva na região \mathcal{R}_l , com ponto perspetivo impróprio.	54
3.33	Reta perspetiva na região \mathcal{G}_l , com ponto perspetivo impróprio.	54
3.34	Reta perspetiva na região \mathcal{R}_v , com o ponto perspetivo impróprio.	55
3.35	Reta perspetiva na região \mathcal{G}_v , com o ponto perspetivo impróprio.	55
3.36	Reta perspetiva na região \mathcal{E}_{lv} , com o ponto perspetivo impróprio.	55
3.37	Reta perspetiva na região \mathcal{F}_{lv} , com o ponto perspetivo impróprio.	56
4.1	$[DEF]$ é o triângulo órtico do triângulo $[ABC]$	58
4.2	O triângulo órtico $[DEF]$ é retângulo.	59
4.3	Resolução de Fejér.	60
4.4	Resolução de Schwarz.	62
4.5	Teorema de Heron.	62
4.6	O triângulo órtico é o único que satisfaz as condições (4.5).	64
4.7	O perímetro do triângulo órtico é menor do que o dobro de qualquer altura.	65
4.8	Solução através do produto escalar de vetores.	66
4.9	Circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$	69
4.10	Exemplo de uma aplicação no ensino secundário.	71
5.1	Configuração de Malfatti num triângulo equilátero.	74
5.2	Melhor solução num triângulo equilátero.	74
5.3	Solução proposta por Malfatti.	75
5.4	Melhor solução.	75
5.5	Solução do problema proposto por Malfatti.	76

5.6	A solução do problema proposto por Malfatti contempla o círculo inscrito no triângulo dado.	76
5.7	Solução do problema de Malfatti.	77
5.8	Construção do ângulo α	81
5.9	Construção de Steiner.	81
5.10	Circunferências tangentes externamente.	85
5.11	Circunferências tangentes internamente.	85
5.12	Solução do problema de Malfatti-Steiner por inversão.	86
5.13	Solução composta por círculos tangentes externamente que ocupam o espaço delimitado pelas circunferências dadas.	86
5.14	Solução composta por círculos tangentes externamente que ocupam o espaço não delimitado pelas circunferências dadas.	87
5.15	Solução composta por círculos tangentes internamente que ocupam o espaço não delimitado pelas circunferências dadas.	88
5.16	Soluções no caso de tangência interior entre as circunferências dadas.	89
5.17	A circunferência Γ é a circunferência bissetora de C e C'	90
5.18	Construção da circunferência bissetora Γ	91
5.19	Uma solução do problema de Malfatti-Steiner.	92
5.20	O problema de Malfatti-Steiner não tem solução.	93
5.21	Problema de Malfatti-Steiner com duas soluções.	93
5.22	Quando as circunferências são exteriores e não se intersectam, o problema de Malfatti-Steiner tem duas soluções.	94
5.23	Casos em que apenas duas circunferências se intersectam.	94
5.24	Por inversão, podemos ver que o problema de Malfatti-Steiner tem duas soluções quando apenas duas circunferências são secantes.	95
5.25	Se as três circunferências têm dois pontos em comum, o problema de Malfatti-Steiner não tem solução.	95
5.26	As circunferências definem quatro pontos de interseção, em que duas não se intersectam.	96
5.27	Duas das quatro soluções do problema de Malfatti-Steiner, com recurso à inversão.	96
5.28	Outras duas soluções do problema de Malfatti-Steiner, com recurso à inversão.	97
5.29	As circunferências definem quatro pontos de interseção, sendo secantes duas a duas.	97
5.30	O problema de Malfatti-Steiner tem quatro soluções.	98
5.31	Seis pontos de interseção, em que dois se encontram no interior ou no exterior de uma circunferência.	98
5.32	As circunferências definem seis pontos de interseção, existindo um ponto interior a cada circunferência.	98
5.33	Na figura invertida, podemos determinar as soluções do problema de Malfatti-Steiner.	99
5.34	Três das seis soluções do problema de Malfatti-Steiner.	99
5.35	Por inversão podemos determinar as oito soluções do problema de Malfatti-Steiner.	100
6.1	Peça triangular.	102
6.2	Cartão.	103
6.3	Peças coloridas.	103

6.4	Segmentos paralelos de cor azul com duas peças.	104
6.5	Segmentos paralelos de cor azul com três peças.	104
6.6	Par de segmentos paralelos de cor azul de duas peças assinalado.	105
6.7	Preenchimento do cartão correspondente ao par de segmentos paralelos de cor azul de duas peças.	105
6.8	Experimentação do jogo.	106
6.9	O jogo improvisado.	106
7.1	O triângulo órtico é perspetivo do triângulo dado.	110
7.2	Visão conjunta dos três problemas estudados.	111

Lista de Notações

$[PQRS]$	Quadrângulo completo de vértices P, Q, R e S
$[pqrs]$	Quadrilátero completo definido pelas retas p, q, r e s
$P(a, b, c, d)$	Feixe de retas concorrentes no ponto P
$r(A, B, C, D)$	Feixe de pontos incidentes com a reta r
(AB, C)	Razão da divisão do segmento de reta $[AB]$ pelo ponto C
$(A, B; C, D)$	Razão cruzada de A, B em relação a C, D
$H(A, B; C, D)$	Conjunto harmónico de pontos, onde C e D são conjugados harmónicos com respeito a A e B .
$A_{[ABC]}$	Área do triângulo $[ABC]$
P_∞	Ponto impróprio, ponto ideal ou ponto no infinito na geometria projetiva
l_∞	Reta imprópria, reta ideal ou reta no infinito no plano projetivo
\mathcal{E}_∞	Plano euclidiano estendido ou aumentado
$\Pi(\mathcal{P}, \mathcal{R}, I)$	Plano projetivo
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{C}	Conjunto dos números complexos
$[z, w]$	Segmento hiperbólico de extremos z e w
r_i	Raio de uma circunferência de inversão
C_i	Circunferência de inversão
p	Perímetro do triângulo órtico
s	Semiperímetro de um triângulo
Γ	Circunferência bissetora
\mathcal{S}_P	Razão de semelhança de centro P
h_{P_1, \mathcal{S}_1}	Homotetia de centro P_1 e razão \mathcal{S}_1
\equiv	Símbolo de coincidência
\cong	Símbolo de congruência
$\angle ABC$	Ângulo de vértice em B
\sphericalangle	Medida da amplitude do ângulo
$\overline{\wedge}$	Símbolo de perspetividade
$\overline{\vee}$	Símbolo de projetividade
\circ	Símbolo de composição
\approx	Símbolo de isomorfismo

Resumo

A presente dissertação de mestrado expõe um estudo que aborda as propriedades geométricas relacionadas com os problemas de Desargues, Fagnano e Malfatti, no domínio de diferentes geometrias.

Em termos estruturais, o trabalho apresenta-se dividido em sete capítulos. O primeiro capítulo é dedicado à introdução. No segundo capítulo são introduzidos os conceitos teóricos básicos e as principais ferramentas utilizadas referentes às geometrias não euclidianas envolvidas no estudo. Atendendo à natureza dos problemas selecionados, são abordadas a geometria projetiva, a geometria hiperbólica e a geometria inversiva. Nos três capítulos seguintes, é apresentado um estudo geométrico dos referidos problemas, onde se exploram as respetivas propriedades e eventual aplicação. Destacamos, sempre que possível, as características específicas que despertaram o interesse dos matemáticos, perpetuando o seu estudo até aos nossos dias.

O terceiro capítulo é dedicado ao problema de Desargues, mais conhecido pelo teorema dos dois triângulos. No quarto capítulo estudamos o problema de Fagnano, que consiste em inscrever num triângulo acutângulo um outro triângulo que tenha o mínimo perímetro possível. No quinto capítulo exploramos o problema de Malfatti, também relacionado com o triângulo, mas cujo objetivo é o de inscrever num triângulo dado três círculos, sendo cada um tangente externamente aos outros dois e simultaneamente tangente a dois lados do triângulo. Em cada um desses capítulos, apresentamos as referências históricas relacionadas com os problemas e respetivos autores.

O sexto capítulo é dedicado à apresentação do resultado prático desenvolvido com base no estudo efetuado, o Jogo do Paralelo. Este jogo combina a figura geométrica comum aos três problemas, o triângulo, com o conceito de paralelismo, que diferencia a geometria euclidiana das geometrias não euclidianas.

No trabalho de pesquisa e investigação efetuado, presente de forma sintética e clara nos capítulos terceiro a quinto, foi utilizado, como recurso tecnológico, o programa informático Geogebra 4.2.

No capítulo final, destacamos uma visão conjunta dos problemas estudados, bem como os possíveis contributos do presente trabalho no desempenho docente da autora.

Abstract

This master's degree thesis presents a study that addresses the geometrical properties that are related with the Desargues, Fagnano e Malfatti problems, taking different point of views.

Regarding the structure, this study is divided into seven chapters. The first chapter is the introduction. On the second chapter the aim is to introduce the basic theoretical concepts and the main tools used in what concerns the non euclidian geometries that are the object of this study. Taking in consideration the problems that were pointed out, the projective geometry the hyperbolic geometry and the inversive geometry will be studied. On the next three chapters, it will be presented a geometrical study of the mentioned problems, where their properties and applications will be explored. The specific characteristics that have always been mathematicians' concern throughout the years will also be emphasized.

Chapter three is dedicated to Desargues problem, which is best known by the two triangle theorem. On chapter four it will be studied the Fagnano problem, which consists in inscribing in an acute triangle another triangle that has the minimal possible perimeter. On chapter five, the Malfatti problem will be explored. This problem is also related to the triangle, though the aim is to inscribe three circles in a given triangle, being each circle externally tangent to the other two, and simultaneously tangent to two sides of the triangle. In each of the mentioned chapters, historical references related to the problems and each of the authors will be pointed out.

On chapter six it will be presented a study case based on the "Parallel Game". This game combines the geometrical figure, which is common to the three problems - the triangle, with the concept of parallelism, which distinguishes the euclidian geometry from the non euclidian ones.

The technological resource used on the research and investigation process, which is clearly noticed from chapters three to five, was the computer program Geogebra 4.2.

On the final chapter, the combined vision of the problems that were studied will be highlighted, as well as the possible contributes of this study to the authors' daily teaching.

Agradecimentos

Agradeço aos meus orientadores, sempre disponíveis, Professora Doutora Helena Melo e Professor Doutor João Cabral, pela sua orientação, pelo seu apoio, pelas suas partilhas científicas e humanas, pela sua dedicação e, sobretudo, por acreditarem em mim.

Agradeço à minha família e a todos os meus amigos que me apoiaram e, de alguma forma, me ajudaram e se viram privados da minha companhia durante a realização deste trabalho. Em especial, ao meu tio José Alfredo Almeida pela sua colaboração.

Agradeço aos colegas do grupo disciplinar 500 da Escola Secundária da Ribeira Grande que me apoiaram, em especial à Isabel Furtado pelas suas preciosas ideias e pela ajuda na construção do protótipo do Jogo do Paralelo.

Agradeço à minha tradutora preferida, Graça Rego, pela sua valiosa ajuda.

Agradeço à minha colega Judite Costa pelas suas sugestões na revisão das referências bibliográficas.

Capítulo 1

Introdução

A presente dissertação está inserida no Mestrado em Matemática para Professores, da responsabilidade do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores.

Desde o primeiro momento, pretendemos desenvolver um trabalho que contribuísse para um enriquecimento da prática letiva, nomeadamente na área da Geometria. Desta forma, a organização do mesmo foi pensada de modo a permitir a aquisição de novos conhecimentos, bem como aprofundar os já adquiridos.

A resolução de problemas é uma das principais finalidades da Matemática, podendo dizer-se que foi uma das razões essenciais, para não dizer a principal, do aparecimento e desenvolvimento desta ciência. Nesse sentido, o caminho escolhido para atingir o nosso propósito inicial compreende a resolução de problemas. Como o próprio título do trabalho indica, foram selecionados os problemas de Desargues, Fagnano e Malfatti. A sua exploração constitui uma fonte de aquisição de conhecimentos ao nível das geometrias não euclidianas, que cada vez mais assumem um papel importante na Matemática, e de aprofundamento dos conhecimentos ao nível da geometria euclidiana, única geometria ensinada, até ao momento, nos ensinamentos básico e secundário. Queremos fazer uma ressalva relativamente ao denominado problema de Desargues, que é conhecido na literatura matemática como teorema de Desargues. Apesar de ser um teorema, optamos pela designação de problema, no título do trabalho, no sentido de que vai ser estudado sob esse ponto de vista.

No segundo capítulo, são introduzidos os conceitos teóricos básicos e as principais ferramentas utilizadas referentes às geometrias não euclidianas envolvidas no estudo. Atendendo à natureza dos problemas selecionados, são abordadas a geometria projetiva, a geometria hiperbólica e a geometria inversiva. Não consideramos necessário introduzir, nesse capítulo, a geometria euclidiana, uma vez que é amplamente estudada em todos os níveis de ensino e que os respetivos conceitos e conteúdos envolvidos em cada problema ainda são de carácter elementar. Porém, o modo com que são aplicados já não.

Nos três capítulos seguintes, apresentaremos um estudo geométrico dos referidos problemas, explorando as respetivas propriedades onde destacamos, sempre que possível, as características específicas que despertaram o interesse dos matemáticos, perpetuando o seu estudo até aos nossos dias. Atendendo à importância que a História desempenha no desenvolvimento de qualquer ciência, e considerando o papel que deve ter no ensino da Matemática, em cada um desses capítulos apresentaremos as referências históricas relacionadas com os problemas e respetivos autores.

O terceiro capítulo é dedicado ao designado teorema dos dois triângulos, da autoria de

Desargues. Neste capítulo é feita uma análise de vários aspetos, recorrendo às geometrias projetiva, hiperbólica e euclidiana, onde destacamos o estudo da localização da reta perspetiva no plano projetivo e no plano hiperbólico.

No quarto capítulo é estudado o problema de Fagnano, que consiste em inscrever num triângulo acutângulo dado um triângulo de perímetro mínimo. Apresentamos diferentes resoluções do problema na geometria euclidiana. Sendo este o problema que melhor se enquadra na atividade letiva da autora, são dadas sugestões de possíveis aplicações no ensino secundário.

No quinto capítulo é explorado o problema de Malfatti, que tem como objetivo inscrever num triângulo dado três círculos, cada um tangente aos outros dois e tangente a dois lados do triângulo. O problema é estudado do ponto de vista da geometria euclidiana e da geometria inversiva.

No trabalho de pesquisa e investigação efetuado, presente de forma sintética e clara nos capítulos terceiro a quinto, foi utilizado, como recurso tecnológico, o programa informático Geogebra 4.2.

O jogo pode constituir uma motivação para a aprendizagem da Matemática e contribuir para a desmistificação da carga negativa que alguns alunos, e a sociedade em geral, criaram relativamente à disciplina. O sexto capítulo é dedicado à apresentação do resultado prático desenvolvido com base no estudo efetuado, o Jogo do Paralelo. Este jogo combina a figura geométrica comum aos três problemas, o triângulo, com o conceito de paralelismo, que diferencia a geometria euclidiana das geometrias não euclidianas. Esperamos que este jogo seja mais um contributo para despertar nos alunos, principal público-alvo, o interesse e a curiosidade pela Geometria.

Do capítulo final, podemos destacar uma visão conjunta dos problemas estudados, bem como os possíveis contributos do presente trabalho no desempenho docente da autora.

Por uma questão de simplificação da linguagem, todas as referências ao paralelismo entre retas devem ser entendidas como paralelismo em sentido estrito, salvo indicação em contrário.

Atravessamos um período de transição relativamente à aplicação do novo acordo ortográfico da Língua Portuguesa. Atendendo ao facto de nas escolas portuguesas as normas do referido acordo serem, atualmente, as únicas admitidas, o presente trabalho foi escrito de acordo com as mesmas.

Capítulo 2

Geometrias não Euclidianas

A Matemática nasceu da necessidade de resolver problemas. Inicialmente, tinha por base a intuição e a experimentação. A geometria nasceu associada à resolução de problemas práticos, também relacionados com a medição de terrenos. As civilizações antigas como a Egípcia, a Hindu, a Babilônica e a Chinesa chegaram a vários resultados importantes relacionados com várias áreas da Matemática. Na área da Geometria, destacam-se, entre outras, a aplicação do teorema de Pitágoras, o cálculo da área de formas retilíneas simples e a observação da razão constante entre o perímetro de uma circunferência e o valor do seu diâmetro.

A sistematização da Matemática surgiu com os Gregos, iniciando-se com Tales de Mileto, século sexto a. C., continuando com Pitágoras de Samos (cerca de 580 a. C. - cerca 500 a. C.) e com os pitagóricos por mais de dois séculos.

Euclides de Alexandria (cerca de 325 a. C. - cerca de 265 a. C.) foi o primeiro a utilizar o método axiomático, que permite organizar resultados de forma lógica, bem como demonstrá-los. Com base na sua obra *Os Elementos*, considerada uma das obras matemáticas mais bem sucedidas, composta por treze livros em que explora a aritmética, a teoria dos números, a geometria plana e a geometria espacial, temos a referência dos cinco axiomas da geometria euclidiana:

Axioma I: Para quaisquer dois pontos distintos A e B existe uma única reta que passa por A e B .

Axioma II: Para quaisquer segmentos de reta, $[AB]$ e $[CD]$, existe um único ponto E na reta AB , com B pertencente ao segmento de reta $[AE]$, de tal forma que os segmentos de reta $[CD]$ e $[BE]$ são congruentes.

Axioma III: Para qualquer ponto O e para qualquer ponto A , distinto de O , existe um círculo com centro O e raio $[OA]$.

Axioma IV: Todos os ângulos retos são congruentes.

Axioma V: Se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos internos de um mesmo lado seja menor do que dois retos, então essas duas retas, quando suficientemente prolongadas, cruzam-se do mesmo lado em que estão esses dois ângulos.

Com a evolução do conhecimento matemático e da linguagem matemática é possível termos uma escrita diferente da apresentada por Euclides. Atualmente, o quinto axioma é mais conhecido segundo uma formulação moderna do texto original, dada por John Playfair (1748-1819): para qualquer reta l e qualquer ponto P , não pertencente a l , existe uma única reta m passando por P que é paralela a l .

Surpreendentemente, a obra de Euclides proporcionou o aparecimento de outras geome-

trias. Enquanto os matemáticos sempre aceitaram os quatro primeiros axiomas de forma consensual, o mesmo não aconteceu com o quinto axioma, mais conhecido como axioma das paralelas.

Muitos consideravam-no uma proposição, podendo, por esta razão, ser demonstrado. Durante mais de dois mil anos, alguns dos melhores matemáticos tentaram prová-lo, mas sem sucesso. O estudo do axioma das paralelas e a busca de alternativas para o mesmo acabaram por originar, no século XIX, o aparecimento de resultados que levaram ao surgimento de geometrias que não verificam esse axioma, sendo chamadas de geometrias não euclidianas [5] [16].

A existência de geometrias distintas constitui uma ferramenta útil na resolução de problemas geométricos. Um dos objetivos do presente trabalho consiste em estudar e resolver problemas recorrendo a diferentes geometrias, como forma de evidenciar as potencialidades de cada uma. Neste sentido, serão estudados problemas clássicos sob o ponto de vista das geometrias projetiva, hiperbólica e inversiva e, como não podia deixar de ser, da geometria euclidiana.

Atendendo ao facto de a geometria euclidiana ser das mais conhecidas nas suas bases de formulação, dada a sua longa história e ser âmbito de estudo em todos os níveis de ensino, consideramos ser desnecessário dedicar uma secção à sua introdução. O mesmo não se pode dizer das geometrias projetiva, hiperbólica e inversiva. Estas geometrias, não sendo euclidianas, e sustentadas por resultados relativamente recentes, comparativamente com os da geometria euclidiana, não são tão conhecidas. Assim, vamos fazer uma breve introdução aos seus conceitos básicos, que consideramos essenciais para a compreensão do estudo aqui desenvolvido.

2.1 Geometria Projetiva

A geometria projetiva pode ser considerada a geometria da visão, pois, aos nossos olhos, duas linhas paralelas parecem encontrar-se num ponto muito longínquo, como é exemplo os carris de um comboio. Com base na sua capacidade de observação, os artistas pintores do Renascimento, no século XV, com o objetivo de tornarem as suas obras mais realistas, desenvolveram a teoria da perspetiva. Chegaram à conclusão de que o que o olho "vê" de uma cena são os raios de luz entre ele e cada ponto da cena. A geometria projetiva explora e explica, do ponto de vista matemático, os resultados obtidos por esses artistas [6] [16].

Nesta secção iremos abordar alguns aspetos e conceitos para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1.1 Definições e Notações

Muitos termos e conceitos são comuns às geometrias projetiva e euclidiana. Os conceitos primitivos de ponto e de reta na geometria euclidiana são os mesmos existentes na geometria projetiva. Se um ponto pertencer a uma reta, dizemos que o ponto é incidente com a reta e vice-versa. Como notação, utilizaremos as letras maiúsculas romanas para designar os pontos e as letras minúsculas romanas para as retas. Uma reta também pode ser definida por dois dos seus pontos, ou seja, se os pontos A e B incidem na reta r , esta reta pode ser denotada por AB .

Os pontos que incidem com uma mesma reta, tal como na geometria euclidiana, também são denominados pontos colineares, e se duas retas se intersectam num único ponto são

denominadas também de retas concorrentes.

Definição 2.1.1 *Ao conjunto de todas as retas do plano, distintas ou não, a, b, c, d, e, \dots , concorrentes num único, P , chamamos feixe de retas e representamos por $P(a, b, c, d, e, \dots)$. As retas desse feixe são os seus elementos e o ponto é o centro do feixe (figura 2.1).*

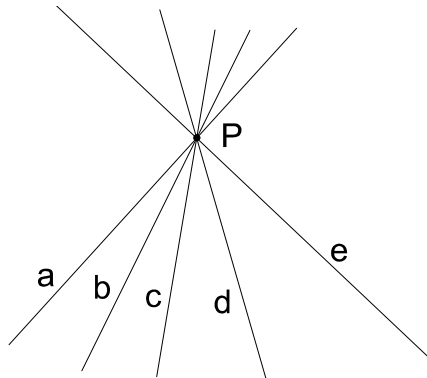


Figura 2.1: Feixe de retas $P(a, b, c, d, e)$.

De modo análogo definimos feixe de pontos.

Definição 2.1.2 *Ao conjunto de todos os pontos do plano, distintos ou não, A, B, C, D, \dots , incidentes com uma única reta, r , chamamos feixe de pontos e representamos por $r(A, B, C, D, \dots)$. Os pontos desse feixe são os seus elementos e a reta é a base do feixe (figura 2.2).*

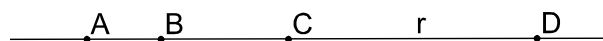


Figura 2.2: Feixe de pontos $r(A, B, C, D)$.

Um feixe de pontos é claramente um conjunto de pontos colineares.

2.1.2 Perspetividade e Projetividade

A interseção de um feixe de retas $P(a, b, c, d, \dots)$ com uma reta p , não incidente com P , define o feixe de pontos da reta p , $p(A, B, C, D, \dots)$. Existe uma correspondência biunívoca entre o feixe de retas e o feixe de pontos que faz corresponder a cada elemento do primeiro conjunto um e um só elemento do segundo conjunto e vice-versa. Através do exemplo da figura 2.3, podemos observar que a cada reta de $P(a, b, c, d)$ corresponde um único ponto de $p(A, B, C, D)$.

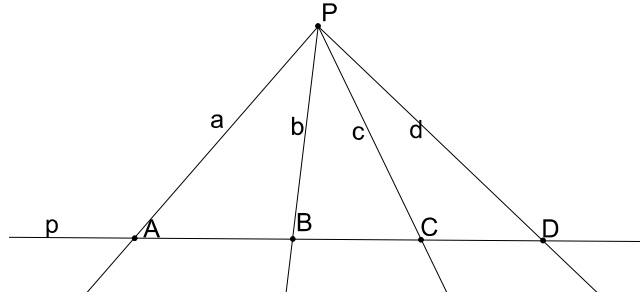


Figura 2.3: Perspetividade.

Definição 2.1.3 Consideremos $P(a, b, c, d, \dots)$ um feixe de retas e $p(A, B, C, D, \dots)$ um feixe de pontos. Chamamos *perspetividade*, ou *perspetividade elementar*, à correspondência bi-unívoca que faz corresponder a cada reta de $P(a, b, c, d, \dots)$ um único ponto de $p(A, B, C, D, \dots)$ e vice-versa. A *perspetividade* é denotada pelo símbolo $\bar{\bar{\lambda}}$.

De acordo com a figura 2.3, temos

$$P(a, b, c, d) \bar{\bar{\lambda}} p(A, B, C, D). \quad (2.1)$$

Consequentemente, temos

$$p(A, B, C, D) \bar{\bar{\lambda}} P(a, b, c, d), \quad (2.2)$$

ou seja, a perspetividade goza da propriedade comutativa.

De acordo com a figura 2.4, temos

$$P(a, b, c, d) \bar{\bar{\lambda}} p(A, B, C, D) \quad (2.3)$$

e

$$P(a, b, c, d) \bar{\bar{\lambda}} p'(A', B', C', D'). \quad (2.4)$$

Pela perspetividade ser comutativa e associativa, podemos escrever

$$p(A, B, C, D) \bar{\bar{\lambda}} P(a, b, c, d) \bar{\bar{\lambda}} p'(A', B', C', D') \quad (2.5)$$

Assim, existe uma correspondência biunívoca entre os elementos dos feixes de pontos de p e p' , pois, a cada ponto de $p(A, B, C, D)$ corresponde um único ponto de $p'(A', B', C', D')$ e vice-versa. Os pontos dos pares A e A' , B e B' , C e C' e D e D' , dizem-se *homólogos*.

Podemos reescrever a expressão (2.5), indicando o ponto de interseção das retas incidentes com os pontos homólogos, obtendo

$$p(A, B, C, D) \stackrel{P}{\bar{\bar{\lambda}}} p'(A', B', C', D'). \quad (2.6)$$

Deste modo, podemos referir que os feixes de pontos

$$p(A, B, C, D) \text{ e } p'(A', B', C', D') \quad (2.7)$$

são perspetivos do ponto P .

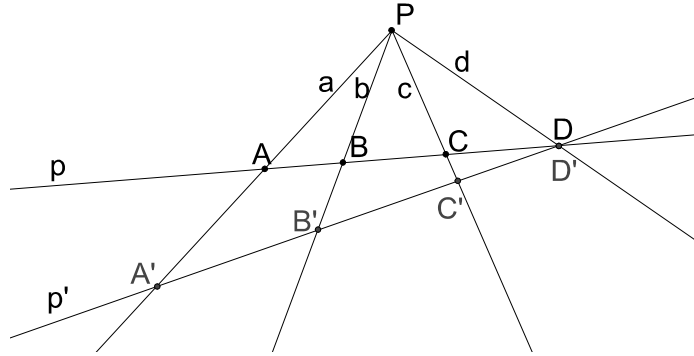


Figura 2.4: Perspetividade entre feixes de pontos.

Definição 2.1.4 Consideremos p e p' duas retas distintas. Dois feixes de pontos

$$p(A, B, C, D, \dots) \text{ e } p'(A', B', C', D', \dots) \quad (2.8)$$

são perspetivos de um ponto P se existe uma correspondência biunívoca entre os pontos dos feixes e se as retas que incidem com os pontos homólogos são concorrentes em P . Escrevemos

$$p(A, B, C, D, \dots) \stackrel{P}{\bar{\wedge}} p'(A', B', C', D', \dots). \quad (2.9)$$

O ponto P é chamado de centro da perspetividade.

Consideremos, agora, $P(a, b, c, d)$ e $P'(a', b', c', d')$ dois feixes de retas de acordo com a figura 2.5.

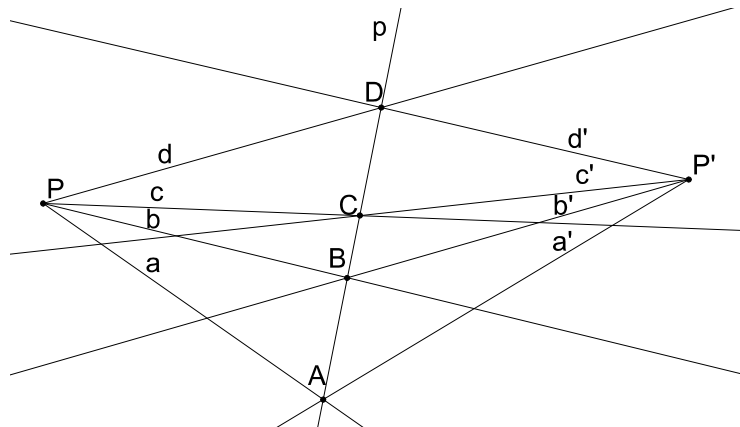


Figura 2.5: Perspetividade entre feixes de retas.

Segundo a figura 2.5, temos que

$$p(A, B, C, D) \bar{\wedge} P(a, b, c, d) \quad (2.10)$$

e

$$p(A, B, C, D) \bar{\wedge} P'(a', b', c', d') \quad (2.11)$$

e pela comutatividade e transitividade da perspetividade, podemos escrever

$$P(a, b, c, d) \bar{\wedge} P'(a', b', c', d') \quad (2.12)$$

Atendendo à correspondência biunívoca entre os elementos dos feixes, podemos reescrever a expressão (2.12) na forma

$$P(a, b, c, d) \stackrel{p}{\wedge} P'(a', b', c', d') \quad (2.13)$$

em que os feixes de retas $P(a, b, c, d)$ e $P'(a', b', c', d')$ são perspetivos da reta p .

Definição 2.1.5 *Sejam P e P' dois pontos distintos. Dois feixes de retas $P(a, b, c, d, \dots)$ e $P'(a', b', c', d', \dots)$ são perspetivos de uma reta p se existe uma correspondência biunívoca entre os feixes e se os pontos de interseção das retas homólogas incidem com p . Escrevemos*

$$P(a, b, c, d, \dots) \stackrel{p}{\wedge} P'(a', b', c', d', \dots). \quad (2.14)$$

A reta p é denominada de eixo de perspetividade.

Notamos que da mesma forma que existe perspetividade entre um feixe de retas e um feixe de pontos, também existe perspetividade entre os feixes de retas e os feixes de pontos.

Observando a figura 2.6, temos que

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \stackrel{P_1}{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2) \stackrel{P_2}{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3). \quad (2.15)$$

Efetuando as duas perspetividades sucessivamente, é possível obtermos $p_3(A_3, B_3, C_3, D_3)$ a partir de $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$. Existe uma correspondência biunívoca entre os elementos dos dois feixes de pontos que resulta da composição de duas perspetividades. Mas esta transformação não é uma perspetividade, pois as retas A_1A_3 , B_1B_3 , C_1C_3 e D_1D_3 não são concorrentes num único ponto. A correspondência resultante da composição das duas perspetividades é designada por *projetividade*.

Definição 2.1.6 *Uma projetividade entre feixes de retas ou pontos é uma composição finita de perspetividades. A projetividade é denotada pelo símbolo $\bar{\wedge}$.*

Segundo a figura 2.6, temos $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1) \bar{\wedge} p_3(A_3, B_3, C_3, D_3)$.

Uma projetividade

$$p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\wedge} p_n(A_n, B_n, C_n, D_n, \dots) \quad (2.16)$$

é definida pela composição de $n - 1$ perspetividades

$$\begin{aligned} p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) &\stackrel{P_1}{\wedge} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots) \stackrel{P_2}{\wedge} \dots \\ &\dots \stackrel{P_{n-1}}{\wedge} p_n(A_n, B_n, C_n, D_n, \dots), \end{aligned} \quad (2.17)$$

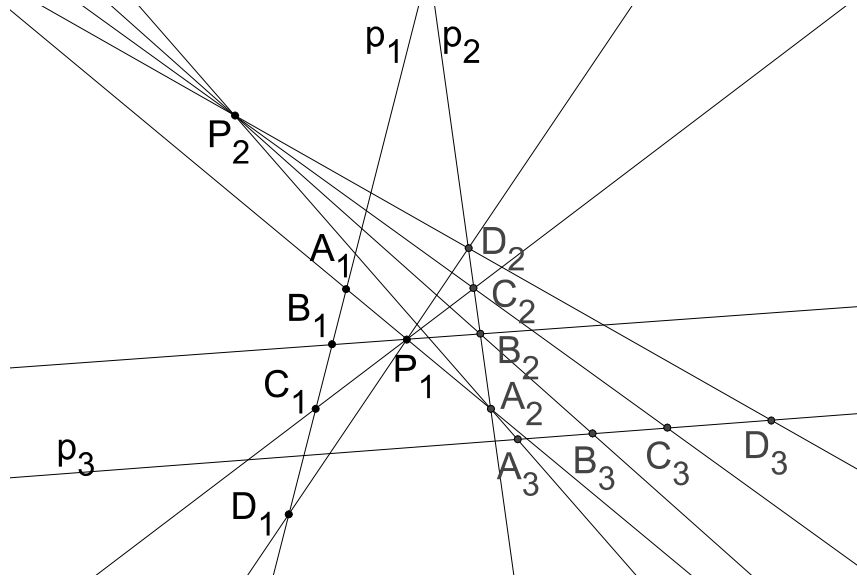


Figura 2.6: Projetividade.

onde P_i não é incidente com p_i e p_{i+1} não é incidente com P_i .

Podemos considerar uma perspetividade como um caso particular de uma projetividade. Assim, uma perspetividade é sempre uma projetividade, mas uma projetividade nem sempre é uma perspetividade.

Recorrendo ao teorema 2.1.1, existe uma forma prática de reconhecer quando uma projetividade é uma perspetividade.

Teorema 2.1.1 *Qualquer projetividade em que*

- (i) $P = p_1 \cap p_2$, onde $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \bar{\cap} p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$
com $p_1(A_1, B_1, C_1, D_1, \dots) \neq p_2(A_2, B_2, C_2, D_2, \dots)$;
 - (ii) Ou $p = P_1P_2$, onde $P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots) \bar{\cap} P_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \dots)$,
com $P_1(a_1, b_1, c_1, d_1, \dots) \neq P_2(a_2, b_2, c_2, d_2, \dots)$,
- é autocorrespondente, é uma perspetividade.*

Demonstração: Podemos encontrar uma demonstração em [3] (pp. 27). ■

2.1.3 O Plano Projetivo

Um plano projetivo, $\Pi(\mathcal{P}, \mathcal{R}, I)$, é uma estrutura de incidência, onde os elementos de \mathcal{P} são designados por pontos, os elementos de \mathcal{R} são designados por retas e I é a relação de incidência, que satisfaz as seguintes condições [32]:

- PP1: Dois pontos distintos incidem com uma única reta.
- PP2: Duas retas distintas possuem um único ponto em comum.
- PP3: Existem quatro pontos, não colineares três a três.

Verificamos que o plano euclidiano não é um plano projetivo, pois, pela existência de retas paralelas, não verifica PP2. Contudo, o plano projetivo pode ser obtido a partir do plano euclidiano.

Consideremos uma reta r do plano euclidiano \mathcal{E} . Como sabemos, ao conjunto formado por r e por todas as retas paralelas a r chamamos feixe de retas paralelas. Associamos a cada feixe de retas paralelas, no plano projetivo, um ponto.

Definição 2.1.7 *Designamos por ponto impróprio (P_∞), ponto ideal ou ponto infinito, o ponto do plano projetivo que define a direção de um feixe de retas paralelas no plano euclidiano.*

Consideremos r uma reta do plano euclidiano, pertencente a um feixe de retas paralelas cuja direção é definida pelo ponto impróprio P_∞ . Qualquer reta incidente com P_∞ é paralela à reta r .

Definição 2.1.8 *Uma reta do plano euclidiano com o respetivo ponto impróprio, no plano projetivo, é denominada de reta estendida ou aumentada.*

Atendendo que diferentes feixes de retas paralelas, no plano euclidiano, têm diferentes pontos impróprios, no plano projetivo, visto que os feixes têm direções diferentes, todos os pontos impróprios constituem uma única reta, no plano projetivo.

Definição 2.1.9 *Chamamos reta imprópria (l_∞), reta ideal ou reta no infinito, à reta incidente com todos os pontos impróprios.*

O plano euclidiano com a reta imprópria constitui um novo plano, o plano projetivo.

Definição 2.1.10 *Ao conjunto formado pelo plano euclidiano e pela reta imprópria chamamos plano euclidiano estendido ou aumentado. O plano euclidiano estendido pode ser representado por \mathcal{E}_∞ .*

Os pontos e as retas do plano euclidiano que forem diferentes dos pontos impróprios e da reta imprópria são designados de próprios.

O plano euclidiano estendido verifica as condições PP1, PP2 e PP3, portanto é um plano projetivo.

Tendo em conta PP2, concluímos que no plano projetivo todas as retas se interseçam. Sempre que quisermos referir que duas ou mais retas, no plano projetivo, correspondem a retas paralelas no plano euclidiano, diremos que o respetivo ponto de interseção é um ponto impróprio.

A partir do plano projetivo, também podemos obter o plano euclidiano. Qualquer reta do plano projetivo pode ser considerada como reta imprópria, sendo, portanto, todos os seus pontos impróprios. Um plano projetivo a menos de uma reta imprópria é o plano euclidiano. Desta forma, todas as retas concorrentes num mesmo ponto impróprio da reta imprópria, no plano projetivo, passam a constituir um feixe de retas paralelas no plano euclidiano.

A partir das condições referidas, podemos definir o número mínimo de retas e pontos de um plano projetivo.

Consideremos \mathcal{E}_∞ um plano projetivo. Por PP3, existem quatro pontos não colineares A, B, C e D em \mathcal{E}_∞ (ver figura 2.7). Por PP1, os quatro pontos definem as retas AB, BC, AC, AD, BD e CD . Por PP2, existem três pontos E, F e G tais que $E \equiv AB \cap CD$, $F \equiv BC \cap AD$, $G \equiv AC \cap BD$. Não existindo outro ponto em \mathcal{E}_∞ , temos que os pontos $E,$

F e G incidem com a mesma reta. Assim, um plano projetivo tem, no mínimo, sete pontos e sete retas [8].

Um exemplo de um plano projetivo com sete pontos e sete retas, ou seja, um plano projetivo finito, é o chamado plano de Fano, em homenagem ao matemático italiano Gino Fano (1871-1952) que desenvolveu trabalhos nesta área.

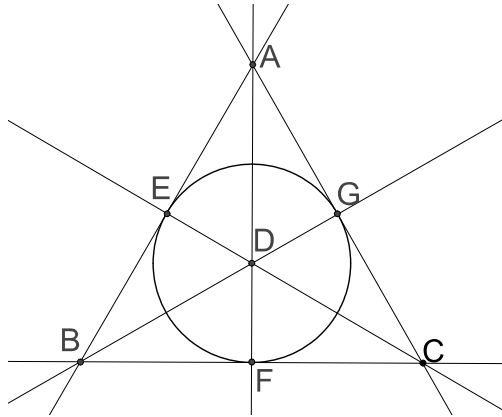


Figura 2.7: Configuração do plano de Fano.

Como em todos os planos projetivos finitos, as retas contêm o mesmo número de pontos, $n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, e os pontos incidem no mesmo número de retas, $n + 1$. Definimos a ordem de um plano projetivo finito pelo número inteiro n . O plano de Fano é um plano projetivo finito de ordem 2, a menor ordem de todas.

Através da teoria combinatória e das condições do plano projetivo, podemos afirmar que um plano projetivo finito de ordem n possui exatamente $n^2 + n + 1$ pontos e $n^2 + n + 1$ retas.

2.1.4 Princípio da Dualidade

Um princípio válido e referido como uma das maiores vantagens da geometria projetiva em relação à geometria euclidiana é o *princípio da dualidade*. Este princípio consiste na troca de palavras em afirmações, proposições, teoremas, etc., de modo a obter textos correspondentes igualmente válidos, os quais são designados de *duais* dos primeiros. Considerando que T representa uma afirmação, uma proposição, um teorema, etc., vamos designar o respetivo texto dual por T^* .

Existe um princípio de dualidade para o plano e outro para o espaço. No plano projetivo, fazendo a troca dos termos ponto e concorrente pelos termos reta e colinear, respetivamente, e fazendo as devidas adaptações, obtemos o dual, igualmente válido no plano projetivo [11].

Este princípio só é possível devido a pontos e retas terem o mesmo comportamento quanto à relação de incidência. A verificação de que os duais das condições do plano projetivo são também afirmações verdadeiras permite estabelecer o princípio da dualidade no plano projetivo. Verificamos que as condições PP1 e PP2 são duais. O dual de PP3, PP3*, afirma que existem quatro retas, não concorrentes três a três. Por PP3, sabemos que existem quatro pontos, A, B, C e D não colineares três a três. Por PP1, podemos afirmar que os quatro pontos definem as retas AB, BC, CD e AD . Verificamos que a reta AB não é concorrente com as retas BC e CD no ponto C , caso contrário, os pontos A, B e C seriam colineares. Da mesma

forma, verificamos a não concorrência das restantes retas [23]. Assim, está demonstrada a veracidade de $PP3^*$, o que permite garantir o princípio da dualidade no plano projetivo.

O princípio da dualidade traz duas grandes vantagens à geometria projetiva: permite a obtenção de resultados, através dos duais de teoremas, proposições, etc., e confere-lhe um poder de síntese, permitindo limitar o número de demonstrações, pois a demonstração de resultados duais fica justificada pelo próprio princípio.

2.1.5 Razão Cruzada

Observemos a figura 2.8.

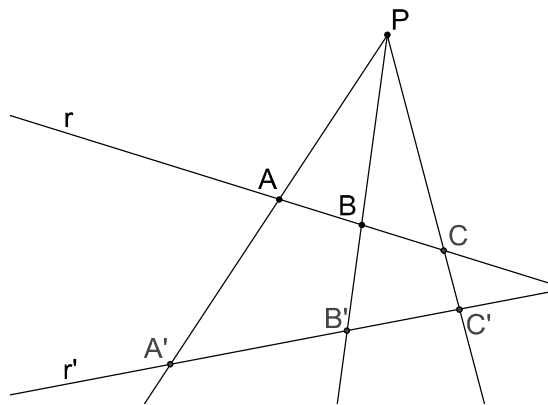


Figura 2.8: A perspetividade não preserva distâncias.

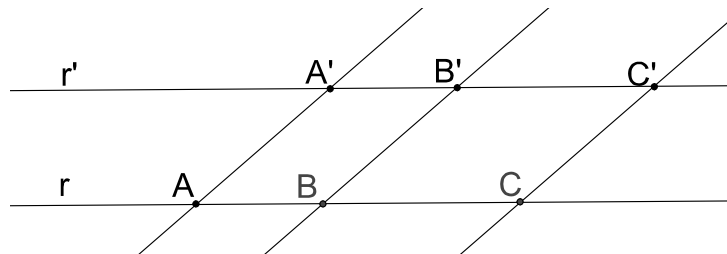


Figura 2.9: Caso de perspetividade que preserva distâncias.

Pela observação da figura 2.8, facilmente concluímos que, na generalidade, a perspetividade não preserva as distâncias entre pontos. Verificamos que $r(A, B, C) \stackrel{P}{\wedge} r'(A', B', C')$, onde $\overline{AB} = \overline{BC}$ e, sem necessidade de recorrer a cálculos, observamos que $\overline{A'B'} \neq \overline{B'C'}$. Como a projetividade é definida por uma composição finita de perspetividades, concluímos que a projetividade também não preserva distâncias. No entanto, na figura 2.9 podemos observar um caso particular em que as distâncias são preservadas por perspetividade, caso em que o centro de perspetividade é impróprio e as retas r e r' têm um ponto impróprio como ponto de interseção.

Atendendo à figura 2.10, facilmente verificamos que nem sempre uma perspetividade mantém a posição relativa entre pontos, pois o ponto B está entre os pontos A e C e o ponto

homólogo B' não se encontra entre A' e C' . Como consequência, acontece o mesmo com a projetividade.

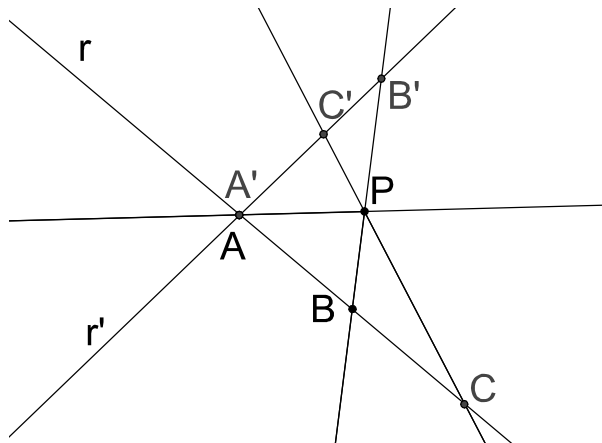


Figura 2.10: Uma perspetividade pode não manter a relação entre pontos.

Existe, contudo, uma relação que é preservada pela perspetividade e também pela proje-tividade. Esta relação é conhecida como *razão cruzada*, sendo a razão entre duas razões.

Para definir a razão cruzada, vamos considerar uma reta r com orientação e dois dos seus pontos distintos A e B . O segmento de reta com origem em A e extremo em B possui sentido oposto ao segmento de reta com origem em B e extremo em A , ou seja, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Considerando C um ponto incidente em r , distinto dos pontos A e B , podemos admitir dois casos, como se pode observar na figura 2.11.



Figura 2.11: Reta orientada.

Definição 2.1.11 A razão da divisão do segmento de reta $[AB]$ por C é definida por

$$(AB, C) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \quad (2.18)$$

e é representada por (AB, C) .

Observamos que quando \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} têm o mesmo sentido a razão da divisão do segmento de reta $[AB]$ por C é positiva, e quando \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} têm sentidos contrários, esta é negativa. Assim, $(AB, C) < 0$ se \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} têm sentidos opostos e $(AB, C) > 0$ se \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} têm o mesmo sentido, independentemente da orientação da reta r .

Definição 2.1.12 Consideremos A, B, C e D quatro pontos distintos incidentes numa reta orientada r . Nesta ordem, a razão cruzada de A, B em relação a C, D , representada por $(A, B; C, D)$, é igual à razão entre (AB, C) e (AB, D) , ou seja,

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}}{\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \quad (2.19)$$

Exemplo 2.1.1 *Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos incidentes na reta r nesta ordem (figura 2.12). Temos que*

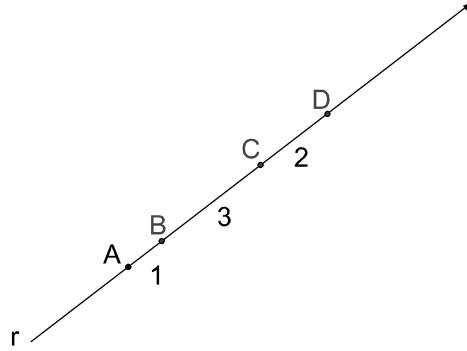


Figura 2.12: Razão cruzada.

$$(A, B; C, D) = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{6}{5}} = \frac{10}{9}$$

$$(A, C; B, D) = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{6}{2}} = -\frac{1}{9}$$

Teorema 2.1.2 *Num plano projetivo, consideremos t uma transformação projetiva, e sejam A, B, C e D quatro pontos colineares quaisquer. Se $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, $C' = t(C)$ e $D' = t(D)$, então*

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D'). \quad (2.20)$$

Demonstração: Em [6] (pp. 140), é apresentada uma demonstração. ■

Por outras palavras, o teorema 2.1.2 refere que a razão cruzada mantém-se numa projetividade, como referimos inicialmente.

2.1.6 Pontos Harmónicos Conjugados

Para a definição de pontos harmónicos conjugados, necessitamos da configuração do plano projetivo denominada de quadrângulo.

Definição 2.1.13 *Um quadrângulo completo $[PQRS]$ é formado por quatro pontos P, Q, R e S , designados por vértices, não existindo três pontos colineares, e pelas seis retas definidas por cada par de vértices, designadas por lados.*

Definição 2.1.14 *Num quadrângulo completo, dois lados dizem-se opostos quando não têm vértices em comum. Os pontos de interseção dos lados opostos são designados por pontos diagonais.*

Na figura 2.13, os pontos E , F e G são pontos diagonais do quadrângulo completo $[PQRS]$.

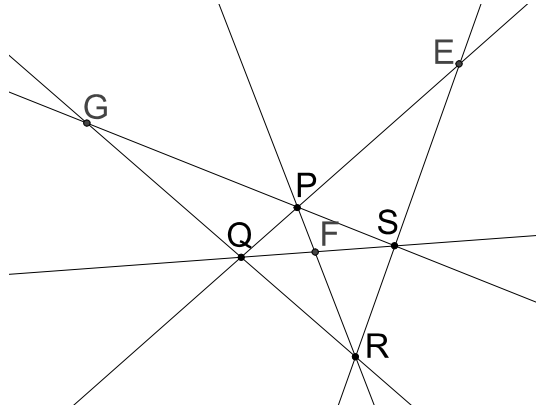


Figura 2.13: Quadrângulo completo $[PQRS]$.

A figura dual de um quadrângulo completo é um *quadrilátero completo*, formado por quatro retas (lados), não existindo três concorrentes, e pelos seis pontos de interseção de cada par de retas (vértices). Na figura 2.14 está representado o quadrilátero completo $[pqrs]$.

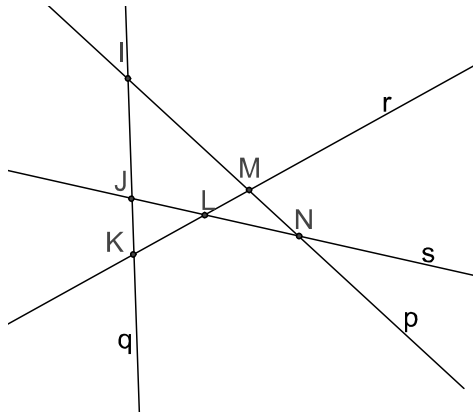


Figura 2.14: Quadrilátero completo $[pqrs]$.

Definição 2.1.15 Quatro pontos colineares A , B , C e D formam um conjunto harmónico de pontos se existir um quadrângulo completo de tal forma que um par de lados opostos seja incidente com A , outro par de lados opostos seja incidente com B , ou seja, A e B sejam pontos diagonais do quadrângulo, e cada um dos lados do terceiro par de lados opostos incida com C e D , respetivamente.

Definição 2.1.16 Consideremos quatro pontos colineares A , B , C e D . Se estes formam um conjunto harmónico de pontos (ver figura 2.15), então C e D dizem-se conjugados harmónicos com respeito a A e B , e denotamos por $H(A, B; C, D)$.

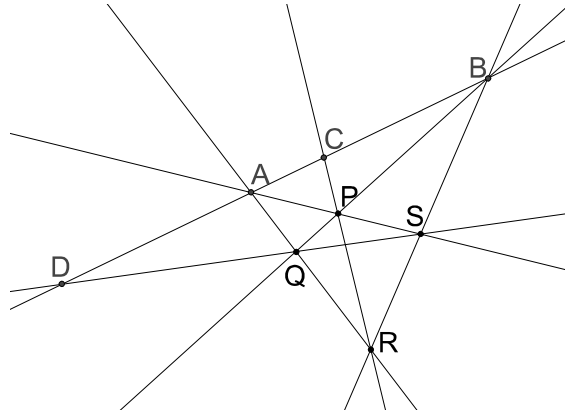


Figura 2.15: Conjunto harmónico $H(A, B; C, D)$.

Em [16] (pp. 340), encontramos uma construção para determinar o conjugado harmónico de um ponto C em relação a dois pontos A e B .

Apresentamos um possível roteiro para a construção do conjugado harmónico.

Sejam A , B e C três pontos colineares, de acordo com a figura 2.16. Para determinar o ponto D , conjugado harmónico de C em relação a A e B , seguimos as instruções dos pontos 1 a 6:

1. Determinar dois pontos I e J colineares com C , não incidentes com a reta AB .
2. Traçar as retas AJ , AI , BJ e BI .
3. Determinar o ponto $K \equiv AJ \cap BI$.
4. Determinar o ponto $L \equiv AI \cap BJ$.
5. Traçar a reta KL .
6. Determinar o ponto $D \equiv KL \cap AB$.

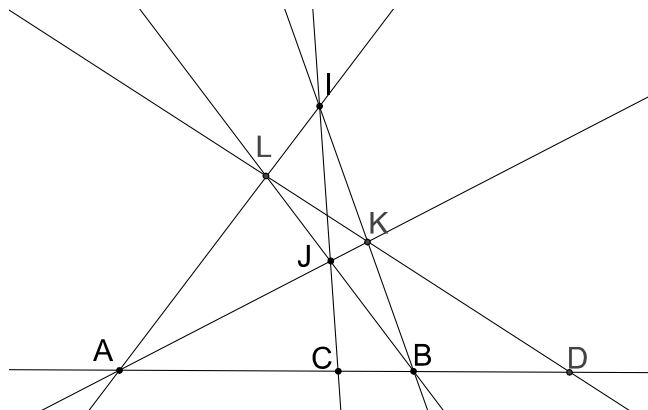


Figura 2.16: O ponto D é conjugado harmónico de C em relação a A e B .

2.2 Geometria Hiperbólica

A geometria hiperbólica surgiu como consequência da busca de alternativas para o quinto axioma de Euclides, o famoso axioma das paralelas. Nikolai Lobatchevsky (1793-1856) foi o responsável pela primeira apresentação oral pública, em 1826, e pela primeira publicação, em 1829, sobre uma geometria onde são válidos os quatro axiomas de Euclides e a negação do quinto axioma [26] [16]. Contudo, o aparecimento da geometria hiperbólica também se deve a Janos Bolyai (1802-1860) que, sem ter conhecimento do trabalho de Lobatchevsky, teve o seu trabalho publicado pela primeira vez em 1832, num apêndice de um trabalho de seu pai [5] [13].

2.2.1 O Plano Hiperbólico

Felix Klein (1849-1925), em 1871, apresentou um modelo do plano hiperbólico, atualmente conhecido como modelo de Beltrami-Klein, a partir do plano projetivo. Os planos projetivo e hiperbólico são isomorfos. Henri Poincaré (1854-1912) criou dois modelos do plano hiperbólico: o disco de Poincaré, representado por um círculo, e o modelo do semiplano superior, com base no semiplano superior euclidiano. Embora os três modelos referidos sejam distintos, verifica-se que são todos isomorfos.

2.2.2 Imersões Isométricas

Definição 2.2.1 *Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação*

$$f : M \longrightarrow N \tag{2.21}$$

chama-se imersão isométrica quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$.

Por outras palavras, podemos dizer que uma imersão isométrica f preserva distâncias sendo, também, $f : M \longrightarrow N$ sempre injetiva, pois

$$f(x) = f(y) \Rightarrow d(x, y) = d(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y. \tag{2.22}$$

Quando uma imersão isométrica é sobrejetiva toma o nome de *isometria*. Podemos verificar que toda a imersão isométrica $f : M \longrightarrow N$ define uma isometria de M sobre o subespaço $f(M) \subset N$.

A composta de duas isometrias e a inversa de uma isometria são, ainda, isometrias.

Definição 2.2.2 *Sejam X um conjunto, (M, d) um espaço métrico e*

$$f : X \longrightarrow M \tag{2.23}$$

uma aplicação injetiva. Para cada par de pontos $x, y \in X$ ponhamos

$$d'(x, y) = d(f(x), f(y)). \tag{2.24}$$

Isto define uma métrica d' em X chamada a métrica induzida por f .

Esta métrica é a única métrica em X que torna $f : X \longrightarrow M$ uma imersão isométrica.

Exemplo 2.2.1 Em $X \longrightarrow f(X) \subset M$ é induzida uma métrica pela aplicação inclusão $i : X \longrightarrow M$ tal que $i(x) = x, x \in X$.

Um dos métodos mais frequentes de introduzir uma métrica num conjunto X é induzi-la através de uma aplicação injetiva $f : X \longrightarrow M$ de X num espaço métrico M .

Definição 2.2.3 Seja $J \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e X um espaço métrico. Uma curva $\gamma : J \longrightarrow X$ é designada de curva geodésica se cada ponto $c \in J$ tem uma vizinhança $U \subset J$ tal que a restrição de $\gamma : U \longrightarrow X$ preserva distâncias.

Um exemplo básico de espaço métrico é o conjunto dos números reais equipado com a métrica $d(x, y) = |x - y|, x, y \in \mathbb{R}$. Relativamente às isometrias em \mathbb{R} , temos o resultado do teorema 2.2.1.

Teorema 2.2.1 Uma isometria $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma translação $x \longrightarrow x + a$ ou uma reflexão $x \longrightarrow b - x$.

Demonstração: Em [7] (pp. 15), apresenta-se uma demonstração. ■

2.2.3 A Métrica Hiperbólica

O que distingue o plano hiperbólico do plano euclidiano é a métrica, ou seja, a forma como se determina a distância mais curta entre dois pontos. A métrica hiperbólica é igual a

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \quad (2.25)$$

onde $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ determina a métrica euclidiana.

Seja \mathbb{C} o plano complexo e $\text{Re}(z) = x$ e $\text{Im}(z) = y$ as notações que representam, respetivamente, a parte real e imaginária de um complexo $z = x + iy \in \mathbb{C}$. O semiplano $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$, equipado com a métrica

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} \quad (2.26)$$

torna-se um modelo do plano hiperbólico, o modelo do semiplano superior.

A métrica (2.26) em \mathcal{H} é designada de métrica hiperbólica.

Como vamos observar na secção 2.2.4, as geodésicas, as curvas mais curtas, em relação a esta métrica, são representadas por linhas retas e semicircunferências ortogonais ao eixo real $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$.

Quaisquer dois pontos em \mathcal{H} definem uma única geodésica, e a distância entre estes pontos é calculada ao longo desta geodésica.

Seja $I = [0, 1]$ e $\gamma : I \longrightarrow \mathcal{H}$ um caminho diferenciável por troços

$$\gamma = \{z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathcal{H} : t \in I\}. \quad (2.27)$$

Então o comprimento hiperbólico $h(\gamma)$ do arco γ é dado por

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right| dt}{y(t)}. \quad (2.28)$$

Definição 2.2.4 A distância hiperbólica $\rho(z, w)$ entre dois pontos $z, w \in \mathcal{H}$ é definida pela fórmula

$$\rho(z, w) = \inf h(\gamma), \quad (2.29)$$

onde o ínfimo é tomado sobre todo o γ que une z a w em \mathcal{H} .

Verificamos que a distância hiperbólica é não negativa, simétrica e satisfaz a desigualdade triangular

$$\rho(z, w) \leq \rho(z, \xi) + \rho(\xi, w), \quad (2.30)$$

ou seja, é uma função distância em \mathcal{H} .

2.2.4 Geodésicas

Teorema 2.2.2 As geodésicas em \mathcal{H} são semicircunferências e linhas retas ortogonais ao eixo real \mathbb{R} .

Demonstração: Em [7] (pp. 19), é apresentada uma demonstração. ■

É de salientar que todas as semicircunferências com o mesmo centro são a representação da mesma reta.

No modelo semiplano superior, os pontos impróprios são representados no eixo real e pelo ponto no infinito ∞ que se encontra no outro extremo de cada uma das retas perpendiculares ao eixo real (figura 2.17).

Como já referimos, a geometria hiperbólica não verifica o axioma das paralelas. Dados uma geodésica g e um ponto P exterior a g , pelo ponto P passam infinitas geodésicas paralelas a g . Na figura 2.17 podemos observar que as geodésicas h, i e j passam pelo ponto P e são paralelas às geodésicas g e k . As geodésicas g e k também são paralelas. As geodésicas h e g dizem-se hiperparalelas, pois interseccionam-se no infinito.

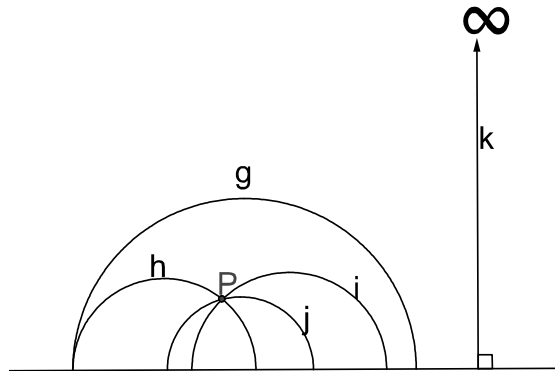


Figura 2.17: Geodésicas.

Do teorema 2.2.2 resulta o corolário 2.2.1, cujo resultado tem uma aplicação muito prática.

Corolário 2.2.1 Quaisquer dois pontos $z, w \in \mathcal{H}$ podem ser ligados por uma única geodésica, e a distância hiperbólica entre $z, w \in \mathcal{H}$ é igual ao comprimento hiperbólico do único segmento hiperbólico que une estes dois pontos, que denotamos por $[z, w]$.

Toda a circunferência hiperbólica é uma circunferência euclidiana. Assim, em \mathcal{H} , a amplitude do ângulo entre duas geodésicas é determinado da mesma forma que se calcula a amplitude do ângulo entre duas circunferências no plano euclidiano. O ângulo entre duas geodésicas é determinado pelo ângulo entre as retas tangentes a cada uma das geodésicas no seu ponto de interseção. Na figura 2.18, podemos observar o ângulo formado por duas geodésicas em \mathcal{H} .

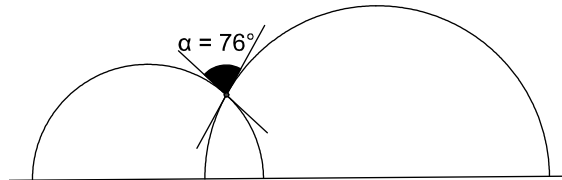


Figura 2.18: Ângulo entre geodésicas.

2.2.5 O Grupo $PSL(2, \mathbb{R})$

Definição 2.2.5 Designamos por plano complexo estendido o plano complexo reunido com um ponto no infinito, sendo representado por

$$\widehat{\mathbb{C}} : \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}. \quad (2.31)$$

Definição 2.2.6 Uma transformação de Möbius é uma função $M : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (2.32)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. Se $c = 0$, então convencionamos que

$$M(\infty) = \infty. \quad (2.33)$$

Caso contrário, convencionamos que

$$M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \text{ e } M(\infty) = \frac{a}{c}. \quad (2.34)$$

A composição de duas transformações de Möbius é uma transformação de Möbius e toda a transformação de Möbius tem uma inversa, tendo-se

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}. \quad (2.35)$$

As transformações de Möbius formam um grupo em relação à composição.

Consideremos um grupo de matrizes reais $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com

$$\det(g) = ad - bc = 1. \quad (2.36)$$

A expressão $\text{tr}(g) = a + d$ representa o traço da matriz g . Este grupo é chamado de grupo unimodular e é denotado por $SL(2, \mathbb{R})$.

O conjunto das transformações de Möbius de \mathbb{C} em \mathbb{C} da forma

$$\left\{ z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \quad (2.37)$$

constitui um grupo tal que o produto de duas transformações corresponde ao produto das matrizes correspondentes e a inversa da transformação corresponde à inversa da matriz. Este grupo é designado por $PSL(2, \mathbb{R})$. Cada transformação T da forma (2.37) é representada por um par de matrizes $\pm g \in SL(2, \mathbb{R})$, sendo o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ isomorfo a $SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$, onde I_2 é matriz identidade 2×2 , e escrevemos $PSL(2, \mathbb{R}) \approx SL(2, \mathbb{R})/\{\pm I_2\}$.

Temos que $tr(-g) = -tr(g)$, e assim,

$$tr^2(T) = tr^2(g) \quad e \quad tr(T) = |tr(g)| \quad (2.38)$$

são funções bem definidas de T .

Notemos que o grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ contém todas as transformações de Möbius da forma

$$z \longrightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.39)$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, e $\Delta = ad - bc > 0$, já que dividindo o numerador e denominador por $\sqrt{\Delta}$ obtemos uma nova matriz para este de determinante 1. Em particular, $PSL(2, \mathbb{R})$ contém todas as transformações da forma

$$z \longrightarrow az + b (a, b \in \mathbb{R}, a > 0), \quad (2.40)$$

e a transformação

$$z \longrightarrow -\frac{1}{z}. \quad (2.41)$$

Registamos os resultados dos teoremas 2.2.3 e 2.2.4 relativamente ao grupo $PSL(2, \mathbb{R})$.

Teorema 2.2.3 *O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ atua em \mathcal{H} por homeomorfismos.*

Demonstração: Em [7] (pp. 18) consta uma demonstração. ■

Teorema 2.2.4 *Qualquer transformação em $PSL(2, \mathbb{R})$ transforma geodésicas em geodésicas em \mathcal{H} .*

Demonstração: Consultando [7] (pp. 20), obtemos uma demonstração. ■

Definição 2.2.7 *Uma transformação de \mathcal{H} em \mathcal{H} é chamada de isometria se esta preserva a distância hiperbólica em \mathcal{H} .*

O conjunto de todas as isometrias de \mathcal{H} formam um grupo, o qual vamos denotar por $Isom(\mathcal{H})$.

Teorema 2.2.5 *O grupo $PSL(2, \mathbb{R})$ está contido no grupo $Isom(\mathcal{H})$.*

Demonstração: Em [7] (pp. 19) é apresentada uma demonstração. ■

2.2.6 O Disco Unitário

O modelo do plano hiperbólico do disco de Poincaré pode ser representado por um disco unitário:

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}. \quad (2.42)$$

A transformação

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i} \quad (2.43)$$

é uma transformação injectiva de \mathcal{H} em \mathcal{U} . Assim, ρ^* dada por

$$\rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}z, f^{-1}w), z, w \in \mathcal{U} \quad (2.44)$$

é uma métrica em \mathcal{U} .

Usando o facto de que se $z \in \mathcal{H}$ e

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i}, \frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}(z)}, \quad (2.45)$$

podemos ver que ρ^* pode ser identificada com a métrica proveniente do diferencial

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (2.46)$$

A circunferência $\sigma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é designada de circunferência principal, sendo a fronteira euclidiana de \mathcal{U} .

No modelo \mathcal{U} as geodésicas são representadas por arcos de circunferências euclidianas ortogonais à circunferência principal e pelos diâmetros da mesma.

Todas as transformações e figuras geométricas da geometria euclidiana têm correspondência na geometria hiperbólica. No entanto, o plano hiperbólico parece ter muito mais espaço junto à fronteira no infinito do que o plano euclidiano. Para além disso, o estudo no plano hiperbólico requer uma sólida consolidação dos conceitos euclidianos, dadas as diferenças relativamente à representação da reta hiperbólica. Ao longo do trabalho, constatamos que a introdução da geometria hiperbólica no ensino secundário não seria uma ideia descontextualizada, podendo, por exemplo, constituir um projeto a ser desenvolvido em contexto de oficina. Consideramos que o modelo \mathcal{H} seria a melhor opção para a representação do plano hiperbólico. Sendo \mathcal{H} um semiplano do plano complexo que é estudado no décimo segundo ano, seria um modelo perceptível para o aluno, para além da vantagem da facilidade da representação das geodésicas. Neste sentido, optamos, neste trabalho, pelo modelo \mathcal{H} para o estudo efetuado no plano hiperbólico.

2.3 Geometria Inversiva

A geometria inversiva é considerada como a geometria da circunferência. Esta geometria permite resolver facilmente problemas e obter construções que, de outra forma, se tornam de difícil resolução ou obtenção. Destacamos os problemas que envolvem tangências, como são exemplos o problema de Apolônio, o porisma de Steiner e o problema de Malfatti, que será estudado no capítulo 5.

2.3.1 Inversão

Uma transformação fundamental da geometria inversiva é a inversão, desenvolvida por Jacob Steiner (1796-1863) [5].

Definição 2.3.1 Consideremos uma circunferência C_i de centro no ponto O e raio real r_i , com $r_i > 0$, e um ponto A diferente de O . Se A' é o ponto da semirreta $\dot{O}A$ que satisfaz a equação $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r_i^2$, dizemos que A' é o inverso de A em relação à circunferência C_i ou que A e A' são inversos em relação a C_i . O ponto O é chamado de centro de inversão e C_i é chamada de circunferência de inversão.

Em [6] (pp. 202) podemos encontrar uma construção para determinar o inverso, A' , de um ponto A em relação a uma circunferência C_i de centro O e raio real $r_i > 0$, com A exterior à circunferência (figura 2.19). Apresentamos o seguinte roteiro de construção do inverso de um ponto exterior à circunferência de inversão.

Consideremos uma circunferência de inversão C_i de centro no ponto O e raio real $r_i > 0$ e um ponto A exterior a C_i . Na construção geométrica para a determinação do inverso do ponto A em relação à circunferência C_i , seguimos os passos 1 a 4 (figura 2.19):

1. Traçar a semirreta $\dot{O}A$.
2. Traçar, pelo ponto A , uma das duas tangentes à circunferência C_i , determinando o ponto de tangência T .
3. Traçar, pelo ponto T , uma perpendicular à semirreta $\dot{O}A$.
4. Determinar o ponto A' , ponto de interseção da perpendicular com a semirreta $\dot{O}A$.

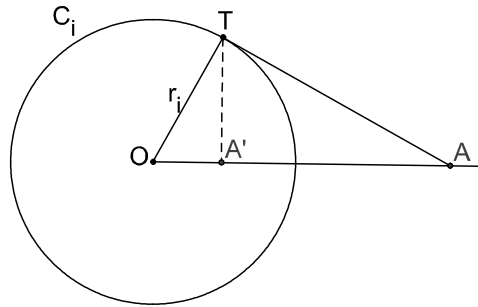


Figura 2.19: Os pontos A e A' são pontos inversos.

A construção apresentada é a mais usual. Como curiosidade, referimos que em [25] (pp. 77) podemos encontrar uma construção simples feita apenas com o compasso.

Se o ponto A está no interior do círculo da circunferência de inversão C_i , de centro no ponto O e raio real $r_i > 0$, devemos seguir o roteiro anterior de modo inverso. Traçamos a semirreta $\dot{O}A$, e pelo ponto A traçamos uma perpendicular à semirreta $\dot{O}A$. Consideramos um dos dois pontos de interseção da reta perpendicular com a circunferência C_i , o ponto T , e por esse ponto traçamos a reta tangente à circunferência C_i . O ponto de interseção da reta tangente com a semirreta $\dot{O}A$ é o inverso do ponto A , o ponto A' .

Com o programa informático utilizado no estudo do nosso trabalho, tivemos a vantagem de não ter de fazer as referidas construções, uma vez que o mesmo tem uma função que permite obter o inverso de um ponto, dada uma circunferência.

Atendendo à figura 2.19, verificamos que $\angle OTA = \angle AA'T = 90^\circ$ e que o $\angle AOT$ é comum aos triângulos $[OA'T]$ e $[OAT]$, donde temos

$$[OA'T] \sim [OAT]. \quad (2.47)$$

Assim, obtemos a relação

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OA}} \iff \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OT}^2, \quad (2.48)$$

ou seja,

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r_i^2. \quad (2.49)$$

Observando a construção do ponto inverso, verificamos que o centro O da circunferência de inversão C_i não faz parte do domínio da inversão no plano euclidiano. Por este facto, há quem considere a inversão uma quase-transformação. Essa situação pode ser modificada ao acrescentarmos ao plano euclidiano um ponto infinito, $\infty \equiv O'$, correspondendo ao inverso do centro de qualquer circunferência de inversão. Desta forma, o plano euclidiano estendido constitui o plano inversivo, onde a inversão é uma transformação cujo domínio e contradomínio são o conjunto de todos os pontos do plano inversivo, incluindo o ponto infinito.

2.3.2 Alguns Resultados da Inversão

Nesta secção registamos as propriedades da inversão que consideramos mais pertinentes. Atendendo ao âmbito do trabalho, optamos por dispensar a apresentação das respetivas demonstrações. Contudo, será feita um breve comentário sobre cada uma delas para cada resultado.

Propriedade 2.3.1 *A inversão deixa invariante a circunferência de inversão ponto a ponto.*

Considerando A um ponto de uma circunferência de inversão C_i de centro O e raio r_i , temos que o seu inverso satisfaz a condição $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r_i^2$. Como $\overline{OA} = r_i$ então $\overline{OA'} = r_i$, sendo $A \equiv A'$ [14] (pp. 52).

Propriedade 2.3.2 *A inversão é involução.*

Seja A' o inverso de A em relação a uma circunferência C_i de centro O e raio real r_i , com $r_i > 0$. Facilmente concluímos que o inverso do inverso de A é o próprio ponto A [14] (pp. 52).

Propriedade 2.3.3 *Consideremos A e A' pontos inversos em relação a uma circunferência de inversão C_i e seja C'_i uma circunferência que contém os pontos A e A' . Então C_i e C'_i são circunferências ortogonais.*

Atendendo à figura 2.20, por inversão temos $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OT}^2$. Tendo em conta a definição de potência de ponto, temos que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'}$ e \overline{OT}^2 representam a potência do ponto O em relação à circunferência C'_i . Concluimos, portanto, que o ponto T é o ponto de interseção da

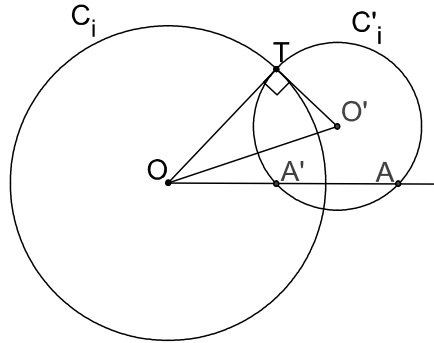


Figura 2.20: As circunferências C_i e C'_i são ortogonais.

reta tangente a C'_i que passa por O e, conseqüentemente, que as circunferências C_i e C'_i são ortogonais [25] (pp. 76).

Esta propriedade permite-nos chegar ao resultado de que o inverso de uma circunferência C'_i ortogonal à circunferência de inversão é a própria circunferência C'_i , ou seja, a circunferência mantém-se invariante, mas não ponto a ponto.

Propriedade 2.3.4 *Sejam A' e B' pontos inversos de A e B , respectivamente, por uma inversão em relação à circunferência C_i de centro O e raio $r_i > 0$. Então:*

- (i) $\angle BAO \cong \angle OB'A'$ e $\angle OBA \cong \angle B'A'O$ (figura 2.21).
- (ii) Os pontos A, B, A' e B' estão sobre uma mesma circunferência (figura 2.21).
- (iii) A circunferência de inversão C_i e a circunferência circunscrita ao quadrilátero $[ABB'A']$ são ortogonais (figura 2.21).
- (iv) Sendo P um ponto da reta AA' e P' o seu inverso em relação à circunferência de inversão C_i , então $\angle ABP \cong \angle P'B'A'$ (figura 2.22).
- (v) Sendo P um ponto de uma reta qualquer que contém o ponto O e P' o seu inverso em relação à circunferência de inversão C_i , então $\angle APB \cong \angle B'P'A'$ (figura 2.23).

A alínea (i) resulta da semelhança dos triângulos $[OAB]$ e $[OA'B']$ (figura 2.21) [14] (pp. 54).

Pela alínea (i), concluímos que $\angle A'B'B$ e $\angle BAA'$ (figura 2.21) são ângulos suplementares, bem como $\angle AA'B'$ e $\angle B'BA$. Assim, os pontos A, B, A' e B' são os vértices de um quadrilátero inscrito numa circunferência [14] (pp. 54).

O resultado (iii) é consequência imediata da propriedade 2.3.3 e da alínea (ii) [14].

Atendendo à alínea (i) e ao teorema angular de Tales, comprovamos os resultados das alíneas (iv) e (v) [14] (pp. 55 e 56).

Em geral, a inversão conserva a medida da amplitude de um ângulo, entre retas e curvas, mas inverte a sua orientação.

Teorema 2.3.1 *Consideremos C_i uma circunferência de inversão de centro no ponto O e raio real r_i , com $r_i > 0$. Temos que:*

- (i) O inverso de uma reta que contenha o ponto O é a própria reta. A reta fica invariante, mas não ponto a ponto.

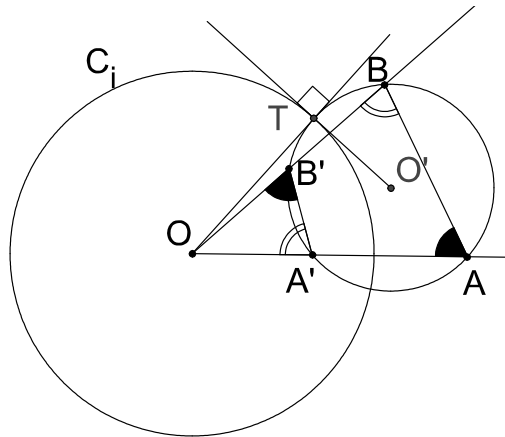


Figura 2.21: Pontos inversos e ângulos congruentes.

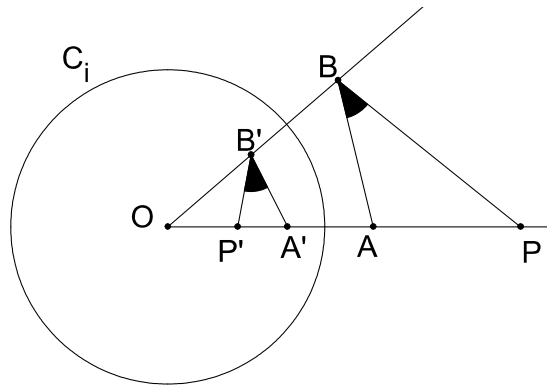


Figura 2.22: Os ângulos $\angle ABP$ e $\angle P'B'A'$ são congruentes.

(ii) O inverso de uma reta que não contenha o ponto O é uma circunferência que contém o ponto O .

(iii) O inverso de uma circunferência que contém o ponto O é uma reta que não contém o ponto O .

(iv) o inverso de uma circunferência que não contém o ponto O é uma circunferência que não contém o ponto O .

Demonstração: Em [6] (pp. 205 e 206), podemos encontrar as respectivas demonstrações com recurso a um sistema de coordenadas. ■

2.3.3 Inversão e Sistema de Coordenadas

Por vezes, o recurso a um sistema de coordenadas que permita relacionar as coordenadas de um ponto A com as do seu inverso A' é necessário e vantajoso. Para o nosso estudo, vamos apenas utilizar um referencial cartesiano onde a circunferência de inversão tenha o centro coincidente com a origem do referencial e raio um.

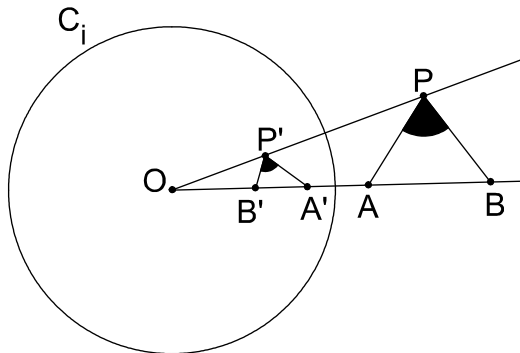


Figura 2.23: Os ângulos $\angle APB$ e $\angle B'P'A'$ são congruentes.

Teorema 2.3.2 *A inversão segundo uma circunferência unitária com centro coincidente com a origem do referencial é a função*

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right) \quad (2.50)$$

Demonstração: Em [6] (pp. 203) encontramos uma demonstração. ■

Como consequência do teorema 2.3.2, resulta uma forma prática para determinar uma equação do inverso de uma reta ou de uma curva em relação à circunferência de centro $O(0,0)$ e raio um. Assim, escrevemos uma equação da reta ou da curva que relacione as coordenadas x e y dos respectivos pontos e substituímos, nesta equação, x por $\frac{x}{x^2+y^2}$ e y por $\frac{y}{x^2+y^2}$, simplificando a expressão obtida [6].

Por exemplo, numa inversão segundo a circunferência unitária com centro na origem do referencial, uma circunferência de centro (a, b) , com $a, b \neq 0$, e raio r , com $r > 0$, é transformada numa circunferência de centro

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}, \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2} \right) \quad (2.51)$$

e raio

$$\frac{r}{|a^2 + b^2 - r^2|}. \quad (2.52)$$

Este resultado facilmente se verifica. Substituindo, na equação da circunferência a ser invertida, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, x por $\frac{x}{x^2+y^2}$ e y por $\frac{y}{x^2+y^2}$, obtemos a equação

$$\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2ax}{x^2 + y^2} + a^2 - \frac{2by}{x^2 + y^2} + b^2 = r^2 \quad (2.53)$$

que pode ser reescrita na forma

$$x^2 (a^2 + b^2 - r^2) - 2ax + y^2 (a^2 + b^2 - r^2) - 2by = -1. \quad (2.54)$$

Visto que $a^2 + b^2 - r^2 \neq 0$, temos

$$x^2 - \frac{2ax}{a^2 + b^2 - r^2} + y^2 - \frac{2by}{a^2 + b^2 - r^2} = -\frac{1}{a^2 + b^2 - r^2} \quad (2.55)$$

Atendendo à expressão do quadrado da diferença, e fazendo as devidas simplificações, obtemos a equação

$$\left(x - \frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 = \left(\frac{r}{a^2 + b^2 - r^2}\right)^2 \quad (2.56)$$

de uma circunferência de centro

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2 - r^2}, \frac{b}{a^2 + b^2 - r^2}\right) \quad (2.57)$$

e raio

$$\frac{r}{|a^2 + b^2 - r^2|}. \quad (2.58)$$

Capítulo 3

Problema de Desargues

3.1 Desargues: Um Matemático Incompreendido

Girard Desargues nasceu em Lyon, em 1591, e morreu na cidade natal, em 1661, tendo vivido, por volta dos seus trinta anos, na cidade de Paris. Foi arquiteto e engenheiro e teve um importante papel na História da Matemática no século XVII [5].

Em 1639, em Paris, publicou uma obra sobre cónicas intitulada *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan*, cuja tradução pode ser "Esboço tosco de uma tentativa de tratar o resultado de um encontro entre um cone e um plano". Embora o trabalho de Desargues se baseasse em ideias simples como o princípio de continuidade de Kepler e da perspetiva na arte do Renascimento, o título da obra publicada ilustra a forma pouco convencional que Desargues tinha de se expressar. O seu estilo de escrita, o aparecimento, dois anos antes, da Geometria Analítica, devida a René Descartes (1596-1650), e o facto de na altura se registarem avanços na Álgebra e na Análise, constituem possíveis fatores para a obra ter sido negligenciada e cair no esquecimento. Para além disso, a forma de pensar de Desargues não estava adequada ao seu tempo, tendo sido apreciada mais tarde com o aparecimento de geometrias não euclidianas (século XIX) [5] [13].

Desargues publicava as suas obras com o principal intuito de as dar aos amigos, e os poucos exemplares do trabalho sobre cónicas acabaram por desaparecer. Felizmente, em 1847 numa biblioteca em Paris, foi encontrada uma cópia manuscrita feita por Philippe de Lahire (1640-1718), um matemático francês e admirador de Desargues. Desde então, a obra tem sido considerada um clássico no aparecimento da geometria projetiva [5].

Apesar do contributo de Desargues para o desenvolvimento da Geometria Projetiva, o seu nome é conhecido pelo teorema e configuração a ele associados. Como já foi referido, optamos pela designação de problema, com o intuito de fazermos uma exploração utilizando outra geometria.

Problema 3.1.1 *Se dois triângulos são colocados de tal maneira que as três retas que unem os pares de vértices correspondentes são concorrentes, então os três pontos de interseção de pares de lados correspondentes são colineares e reciprocamente.*

O teorema de Desargues foi publicado, pela primeira vez, em 1648 pelo artista francês Abraham Bosse (1611-1678), amigo e admirador de Desargues, no livro intitulado *Manière universelle de S. Desargues pour pratiquer la perspective*. O teorema é válido no plano e no espaço e tornou-se fundamental na Geometria Projetiva [5].

3.2 Desargues e a Geometria Projetiva

De acordo com o estudo feito no âmbito da geometria projetiva, podemos dizer que a configuração de Desargues é relevante nesta geometria. Começemos por enunciar e demonstrar o teorema de Desargues nesse domínio.

Teorema 3.2.1 *Dois triângulos são perspetivos de um ponto se, e só se, são perspetivos de uma reta.*

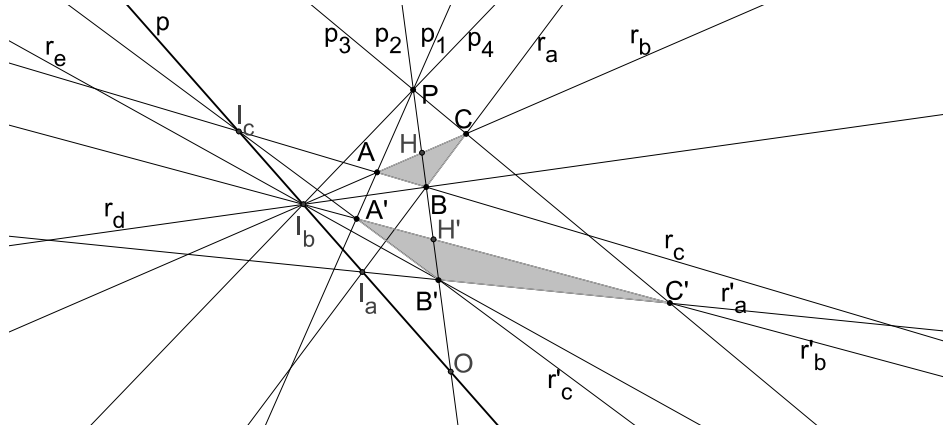


Figura 3.1: Configuração de Desargues no plano projetivo.

Demonstração: Vamos assumir, por hipótese, que os triângulos são perspetivos de um ponto e , recorrendo à demonstração apresentada em [3] (pp. 39), concluir que são perspetivos de uma reta. Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ perspetivos do ponto P . As retas $AA' \equiv p_1$, $BB' \equiv p_2$ e $CC' \equiv p_3$ são concorrentes no ponto P (ver figura 3.1). Sejam $AC \equiv r_b$, $AB \equiv r_c$, $BC \equiv r_a$, $A'C' \equiv r'_b$, $A'B' \equiv r'_c$, $B'C' \equiv r'_a$ e $r_a \cap r'_a \equiv I_a$, $r_b \cap r'_b \equiv I_b$, $r_c \cap r'_c \equiv I_c$. Sendo $I_aI_c \equiv p$, vamos demonstrar que o ponto I_b pertence à reta p . Seja $BI_b \equiv r_d$, $B'I_b \equiv r_e$ e $PI_b \equiv p_4$. Temos que

$$B(r_a, r_c, p_2, r_d) \stackrel{r_b}{\wedge} P(p_3, p_1, p_2, p_4) \stackrel{r'_b}{\wedge} B'(r'_a, r'_c, p_2, r_e) \quad (3.1)$$

e, portanto,

$$B(r_a, r_c, p_2, r_d) \bar{\wedge} B'(r'_a, r'_c, p_2, r_e). \quad (3.2)$$

De acordo com o teorema 2.1.1, esta projetividade é uma perspetividade, pois a reta que contém os centros dos feixes de retas (a reta p_2) é autocorrespondente. O eixo de perspetividade contém os pontos $r_a \cap r'_a \equiv I_a$, $r_c \cap r'_c \equiv I_c$ e $r_d \cap r_e \equiv I_b$. Assim, está demonstrado que $r_b \cap r'_b \equiv I_b$ pertence à reta $I_aI_c \equiv p$ e, conseqüentemente, que os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são perspetivos de uma reta, como queríamos demonstrar.

Assumamos agora que, por hipótese, os triângulos são perspetivos de uma reta. Vamos concluir, recorrendo à demonstração apresentada em [12] (pp. 254), que são perspetivos de um ponto. Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ perspetivos da reta p , ou seja, os pontos $I_a \equiv r_a \cap r'_a$, $I_b \equiv r_b \cap r'_b$, $I_c \equiv r_c \cap r'_c$ pertencem à reta p , onde $AC \equiv r_b$, $AB \equiv r_c$, $BC \equiv r_a$, $A'C' \equiv r'_b$, $A'B' \equiv r'_c$, $B'C' \equiv r'_a$. Demonstramos que as retas AA' , BB' e CC'

são concorrentes. De acordo com a figura 3.1, vamos considerar a reta BB' , cujas interseções com r_b , r'_b e p são, respetivamente, os pontos H , H' e O e sejam $BI_b \equiv r_d$ e $B'I_b \equiv r_e$. Temos que

$$r_b(I_b, A, H, C) \stackrel{B}{\bar{\wedge}} p(I_b, I_c, O, I_a) \stackrel{B'}{\bar{\wedge}} r'_b(I_b, A', H', C') \quad (3.3)$$

e, consequentemente,

$$r_b(I_b, A, H, C) \bar{\wedge} r'_b(I_b, A', H', C'). \quad (3.4)$$

De acordo com o teorema 2.1.1 temos que a projetividade apresentada é uma perspetividade, pois o ponto de interseção das bases dos feixes de pontos (o ponto I_b) é autocorrespondente. Sendo assim, concluimos que as retas AA' , HH' , BB' e CC' incidem todas com um mesmo ponto, ou seja, as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes, como queríamos demonstrar. ■

Na pesquisa bibliográfica, constatamos que há autores que consideram que o teorema de Desargues contempla apenas a primeira condição, ou seja, "se dois triângulos são perspetivos de um ponto, então são perspetivos de uma reta", pois a outra condição existe por dualidade, isto é, "se dois triângulos são perspetivos de uma reta, então são perspetivos de um ponto".

Apenas recorrendo à observação da configuração de Desargues no plano projetivo, podemos tecer algumas conclusões, como consequência do teorema. Assim, se existe um par de lados homólogos cuja interseção seja um ponto impróprio, a reta perspetiva passará pelo mesmo ponto impróprio. Se existirem dois pares de lados homólogos cujos pontos de interseção são pontos impróprios, concluimos, pela condição PP1, que a reta perspetiva é a reta imprópria e, como consequência, o terceiro par de lados homólogos terá como ponto de interseção um ponto impróprio. Por outro lado, se a reta perspetiva for a reta imprópria, implica que os pontos de interseção dos lados homólogos são impróprios e, pela visão da geometria euclidiana, podemos dizer que os três pares de lados homólogos são paralelos.

É de salientar que o ponto perspetivo pode ser impróprio. Neste caso, os três pares de vértices homólogos são incidentes com retas que são concorrentes num ponto impróprio.

O software de geometria utilizado, Geogebra 4.2, permitiu-nos estudar a configuração de Desargues de uma forma dinâmica, através da variação dos diversos elementos. Com base nesta exploração, envolvendo a razão cruzada e pontos harmónicos conjugados, é possível enunciar as proposições 3.2.1, 3.2.2 e 3.2.3.

Proposição 3.2.1 *Dados três triângulos perspetivos de um ponto, as três retas perspetivas de cada par de triângulos pertencem ao mesmo feixe de retas.*

Demonstração: Consideremos $[A_1B_1C_1]$, $[A_2B_2C_2]$ e $[A_3B_3C_3]$, três triângulos perspetivos de um ponto P (figura 3.2).

Seja r_1 a reta perspetiva dos triângulos $[A_2B_2C_2]$ e $[A_3B_3C_3]$, r_2 a reta perspetiva dos triângulos $[A_1B_1C_1]$ e $[A_3B_3C_3]$ e r_3 a reta perspetiva dos triângulos $[A_1B_1C_1]$ e $[A_2B_2C_2]$.

Vamos considerar dois triângulos de tal forma que cada um tem os seus vértices sobre as retas r_1 , r_2 e r_3 . desta forma, sejam $V, S \in r_1$, $R, U \in r_2$ e $Q, T \in r_3$, onde

$$\begin{aligned} V &\equiv B_2C_2 \cap B_3C_3, & S &\equiv A_2C_2 \cap A_3C_3, & R &\equiv A_1C_1 \cap A_3C_3, \\ U &\equiv B_1C_1 \cap B_3C_3, & Q &\equiv A_1C_1 \cap A_2C_2 & T &\equiv B_1C_1 \cap B_2C_2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Temos que

$$RQ \cap UT \equiv C_1, \quad QS \cap TV \equiv C_2 \quad \text{e} \quad RS \cap UV \equiv C_3, \quad (3.6)$$

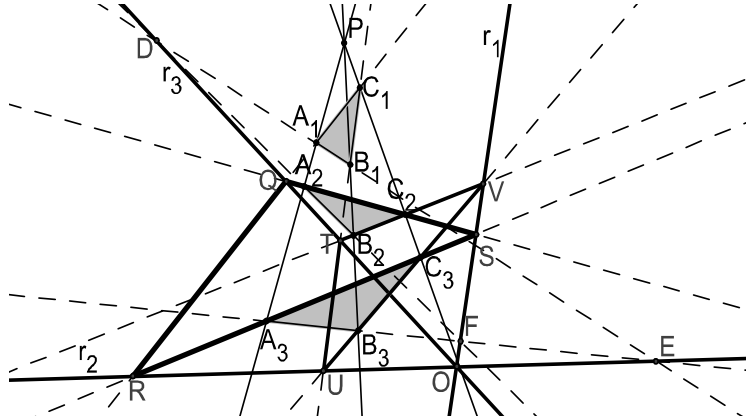


Figura 3.2: As três retas perspetivas são concorrentes.

pelo que verificamos que os triângulos $[QRS]$ e $[TUV]$ são perspetivos da reta C_1C_3 . Pelo teorema de Desargues, sabemos que os triângulos são perspetivos de um ponto. Assim, temos que as retas SV , RU e QT são concorrentes. Mas,

$$SV \equiv r_1, RU \equiv r_2 \text{ e } QT \equiv r_3, \quad (3.7)$$

de onde concluímos que as retas r_1 , r_2 e r_3 são concorrentes, no ponto O de acordo com a figura 3.2. ■

Proposição 3.2.2 *Dados três triângulos perspetivos de uma reta, os três pontos perspetivos de cada par de triângulos pertencem à mesma reta.*

Demonstração: A proposição 3.2.2 é dual da proposição 3.2.1, pelo que se dispensa a sua demonstração com base no princípio da dualidade. ■

Verificamos um aspeto interessante na configuração de Desargues quando um dos triângulos está inscrito no outro, conforme se mostra na proposição 3.2.3.

Proposição 3.2.3 *Consideremos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dois triângulos perspetivos de um ponto P cujos vértices A' , B' e C' pertencem aos segmentos de reta $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente. Os pontos $G \equiv BC \cap B'C'$, $I \equiv AC \cap A'C'$ e $F \equiv AB \cap A'B'$ são colineares e são os conjugados harmónicos de A' , B' e C' relativamente aos pontos B e C , A e C e A e B , respetivamente. Por outras palavras, a reta perspetiva é incidente com os conjugados harmónicos de A' , B' e C' relativamente aos pontos B e C , A e C e A e B , respetivamente.*

Demonstração: Sejam os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ perspetivos de um ponto P , onde os vértices A' , B' e C' são pontos pertencentes aos segmentos de reta $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente. De acordo com a figura 3.3, pelo teorema de Desargues, os triângulos são perspetivos da reta incidente com os pontos $I \equiv AC \cap A'C'$, $F \equiv AB \cap A'B'$ e $G \equiv BC \cap B'C'$, pelo que os pontos são colineares. Os pontos P , C' , B e A' definem um quadrângulo completo. Os pontos A e C são pontos diagonais do quadrângulo completo $[PC'BA']$ e B' e I são pontos incidentes com cada um dos outros dois lados opostos do quadrângulo completo $[PC'BA']$. Por definição de conjunto harmónico, temos que os pontos C , B' , A e I formam um conjunto

harmónico, sendo o ponto I o conjugado harmónico de B' relativamente a A e C . Da mesma forma, verificamos que F é o conjugado harmónico de C' relativamente a A e B , considerando o quadrângulo completo $[PA'CB']$ e que G é o conjugado harmónico de A' relativamente a B e C , considerando o quadrângulo completo $[PB'AC']$. ■

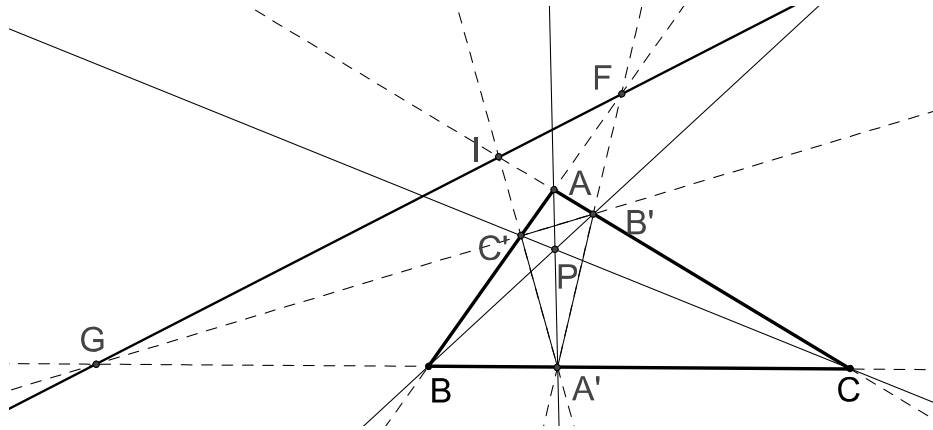


Figura 3.3: A reta perspetiva incide com conjugados harmónicos.

3.3 Desargues e a Geometria Euclidiana

O teorema de Desargues também é válido no plano euclidiano. Vamos enunciá-lo e demonstrá-lo no domínio da geometria euclidiana.

Uma das demonstrações mais utilizadas para este teorema recorre ao teorema de Menelau [25] (pp. 28).

O teorema de Menelau refere que, dadas três retas, AB , BC e AC , contendo os lados do triângulo $[ABC]$, se uma reta intersesta as retas AB , BC e AC nos pontos X , Y e Z , respetivamente, temos que

$$\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} \cdot \frac{\overline{BY}}{\overline{YC}} \cdot \frac{\overline{CZ}}{\overline{ZA}} = -1 \quad (3.8)$$

se, e só se, os pontos X , Y e Z são colineares.

O facto de o produto ser negativo decorre, na geometria euclidiana, de uma reta intersestar dois lados de um triângulo internamente e o seu terceiro lado externamente [25].

Passemos ao enunciado e à demonstração do teorema de Desargues com base no teorema de Menelau, como se pode encontrar em [33].

Teorema 3.3.1 *Consideremos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dois triângulos, com vértices distintos, tais que as retas AA' , BB' e CC' pertencem ao mesmo feixe. Então os pontos resultantes das interseções, se existirem, $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ e $AC \cap A'C'$, são colineares e vice-versa.*

Demonstração: Sem perda de generalização, consideremos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dois triângulos com vértices distintos, tais que as retas AA' , BB' e CC' sejam concorrentes num ponto P . Vamos demonstrar que os pontos

$$F \equiv AB \cap A'B', G \equiv BC \cap B'C' \text{ e } I \equiv AC \cap A'C' \quad (3.9)$$

são colineares. Consideremos os triângulos $[A'C'P]$, $[C'B'P]$ e $[B'A'P]$, no sentido definido pela ordem dos vértices, e as respectivas retas transversais AC , BC e AB , como se pode observar na figura 3.4. Atendendo ao teorema de Menelau aplicado a cada um dos triângulos, temos

$$\frac{\overline{A'I}}{\overline{IC'}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{AA'}} = -1 \quad (3.10)$$

$$\frac{\overline{C'G}}{\overline{GB'}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{CC'}} = -1 \quad (3.11)$$

$$\frac{\overline{B'F}}{\overline{FA'}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{BB'}} = -1 \quad (3.12)$$

Multiplicando os membros das três igualdades, obtemos

$$\frac{\overline{A'I}}{\overline{IC'}} \cdot \frac{\overline{C'C}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{AA'}} \cdot \frac{\overline{C'G}}{\overline{GB'}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{CC'}} \cdot \frac{\overline{B'F}}{\overline{FA'}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{AP}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{BB'}} = -1 \quad (3.13)$$

Como

$$\frac{\overline{C'C}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{PC}}{\overline{CC'}} = 1, \quad \frac{\overline{PA}}{\overline{AA'}} \cdot \frac{\overline{A'A}}{\overline{AP}} = 1 \text{ e } \frac{\overline{B'B}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{PB}}{\overline{BB'}} = 1, \quad (3.14)$$

segue

$$\frac{\overline{A'I}}{\overline{IC'}} \cdot \frac{\overline{C'G}}{\overline{GB'}} \cdot \frac{\overline{B'F}}{\overline{FA'}} = -1. \quad (3.15)$$

Pelo teorema de Menelau aplicado ao triângulo $[A'C'B']$, concluímos que os pontos F , G e I são colineares. Considerando, agora, por hipótese, que os pontos F , G e I , nas condições do enunciado, são colineares, demonstremos que as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes num ponto P . Seja o ponto $P \equiv AA' \cap BB'$. Tendo em conta os triângulos $[AA'I]$ e $[BB'G]$, temos que as retas AB , $A'B'$ e IG são concorrentes no ponto F . Como os pontos

$$P \equiv AA' \cap BB', \quad C \equiv AI \cap BG \text{ e } C' \equiv A'I \cap B'C' \quad (3.16)$$

são colineares, pelo demonstrado anteriormente, concluímos que a reta CC' passa pelo ponto P , demonstrando que as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes num mesmo ponto. ■

No caso de os três pares de lados homólogos estarem sobre retas paralelas, temos o caso paralelo do teorema de Desargues definido pelo teorema 3.3.3, e este será demonstrado recorrendo ao cálculo vetorial. Na demonstração do teorema 3.3.3, vamos recorrer ao teorema 3.3.2, o qual passamos a enunciar.

Teorema 3.3.2 *Considerando A , B e C três pontos não colineares, se conseguimos encontrar três números reais x , y e z tais que $x + y + z = 0$ e $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, então temos que $x = y = z = 0$.*

Demonstração: Em [25] (pp. 27), podemos encontrar uma possível demonstração. ■

Teorema 3.3.3 *Se dois triângulos quaisquer e distintos têm os lados homólogos paralelos, então as retas definidas pelos vértices homólogos são paralelas ou concorrentes.*

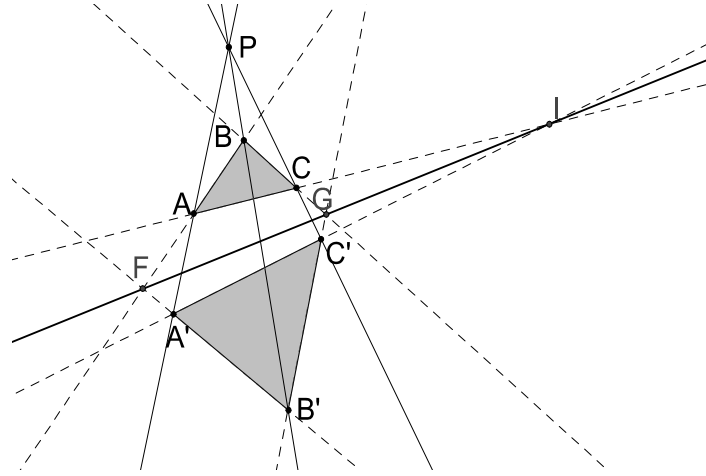


Figura 3.4: Configuração de Desargues no plano euclidiano.

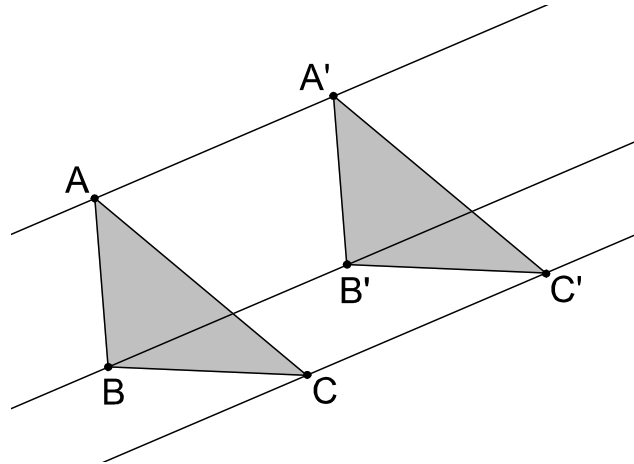


Figura 3.5: Caso particular do teorema de Desargues.

Demonstração: Vamos apresentar uma demonstração com base em [25] (pp. 33). Sendo o segmento de reta $[BC]$ homólogo e paralelo ao segmento de reta $[B'C']$, os vetores \overrightarrow{BC} e $\overrightarrow{B'C'}$ têm a mesma direção (figura 3.5). Do mesmo modo concluímos que os vetores \overrightarrow{CA} e $\overrightarrow{C'A'}$ e \overrightarrow{AB} e $\overrightarrow{A'B'}$ têm a mesma direção. Assim

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= k_1 \overrightarrow{A'B'} \\ \overrightarrow{BC} &= k_2 \overrightarrow{B'C'} \\ \overrightarrow{CA} &= k_3 \overrightarrow{C'A'}\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mas, como $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$, temos que

$$k_1 \overrightarrow{A'B'} + k_2 \overrightarrow{B'C'} + k_3 \overrightarrow{C'A'} = \vec{0}.\tag{3.18}$$

Mas, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{OC'} - \overrightarrow{OB'}$ e $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OC'}$, pelo que (3.18) pode ser escrita na forma

$$(k_3 - k_1)\overrightarrow{OA'} + (k_1 - k_2)\overrightarrow{OB'} + (k_2 - k_3)\overrightarrow{OC'} = \vec{0}. \quad (3.19)$$

Sendo A' , B' e C' três pontos não colineares, dado que existem os reais $(k_3 - k_1)$, $(k_1 - k_2)$ e $(k_2 - k_3)$ tais que

$$(k_3 - k_1) + (k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) = 0 \quad (3.20)$$

e tendo em consideração a igualdade (3.20), pelo teorema 3.3.2, segue que

$$k_3 - k_1 = k_1 - k_2 = k_2 - k_3 = 0 \quad (3.21)$$

logo,

$$k_1 = k_2 = k_3 = k. \quad (3.22)$$

Então, das igualdades em (3.17), temos que

$$\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OC'}. \quad (3.23)$$

Se $k \neq 1$, podemos considerar de (3.23) que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OA'} &= \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OB'} \\ \overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OA'} &= \overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OC'} \\ \overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OB'} &= \overrightarrow{OC} - k\overrightarrow{OC'} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Da primeira igualdade temos

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'}) \quad (3.25)$$

logo

$$\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{B'A'}. \quad (3.26)$$

Considerando a norma de cada um dos vetores \overrightarrow{BA} e $\overrightarrow{B'A'}$, segue que

$$\overline{BA} = |k| \overline{B'A'} \quad (3.27)$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= |k| \overline{C'A'} \\ \overline{CB} &= |k| \overline{C'B'} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Atendendo a (3.27) e (3.28), podemos escrever

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{B'A'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{C'B'}} \quad (3.29)$$

Pelo facto de os pares de vetores \overrightarrow{BA} e $\overrightarrow{B'A'}$, \overrightarrow{CA} e $\overrightarrow{C'A'}$ e \overrightarrow{CB} e $\overrightarrow{C'B'}$ serem constituídos por vetores com a mesma direção, e considerando (3.29), podemos concluir que os triângulos são homotéticos de um ponto H . Desta forma, temos que $AA' \cap BB' \cap CC' \equiv H$, ou seja, as retas definidas pelos vértices homólogos dos triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ são concorrentes.

Se $k = 1$, temos

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C'A'} \text{ e } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'B'}. \quad (3.30)$$

Se $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B'A'}$, e dado que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'}$, temos que

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'}, \quad (3.31)$$

podendo reescrever como

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB'}, \quad (3.32)$$

concluindo que $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{B'B}$. Analogamente, de $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{C'A'}$ temos que $\overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{C'C}$ e de $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C'B'}$ temos que $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{C'C}$, ou seja, os vetores $\overrightarrow{A'A}$, $\overrightarrow{B'B}$ e $\overrightarrow{C'C}$ têm a mesma direção e, conseqüentemente, as retas AA' , BB' e CC' são paralelas. ■

A demonstração do teorema 3.3.4 é feita com base no teorema de Tales. O teorema de Tales afirma que, se duas retas paralelas intersectam duas retas concorrentes, os triângulos obtidos têm lados paralelos correspondentes proporcionais.

De acordo com a figura 3.6, temos, pelo teorema de Tales,

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \mathcal{S}_P, \quad (3.33)$$

onde \mathcal{S}_P representa a razão de semelhança entre os triângulos $[A'B'C']$ e $[ABC]$.

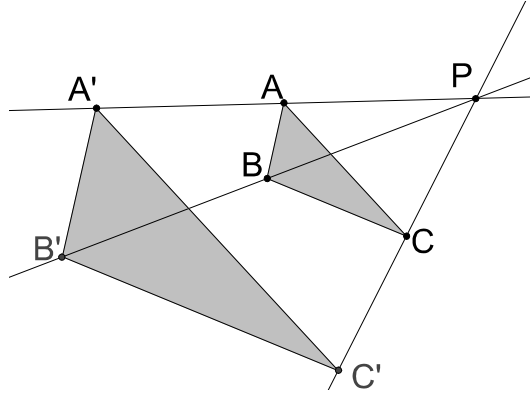


Figura 3.6: Homotetia direta.

Teorema 3.3.4 *Se dois triângulos perspetivos de um ponto tiverem dois pares de lados homólogos paralelos, então os lados do terceiro par também são paralelos.*

Demonstração: Consideremos os triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ de tal forma que

$$AA' \cap BB' \cap CC' \equiv P \quad (3.34)$$

com AB paralela a $A'B'$ e BC paralela a $B'C'$ (figura 3.6). Pelo teorema de Tales, aplicado às retas PB e PA , temos que

$$\frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}}. \quad (3.35)$$

Aplicando-o em relação às retas PA e PC , obtemos

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}}. \quad (3.36)$$

Assim,

$$\frac{\overline{PA'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC'}}{\overline{PC}} = \mathcal{S}_P, \quad (3.37)$$

onde \mathcal{S}_P representa a razão de semelhança da homotetia que permite obter os segmentos de reta $[A'B']$ e $[B'C']$ a partir dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$, respetivamente. Então, a imagem do ponto A pela homotetia de centro P e razão \mathcal{S}_P é o ponto A' , e a imagem do ponto C pela mesma homotetia é o ponto C' . Concluimos, então, que a imagem do segmento de reta $[AC]$ pela referida homotetia é o segmento de reta $[A'C']$. Como o ponto P não pertence a $[AC]$, temos que os segmentos de reta $[AC]$ e $[A'C']$ são paralelos. ■

Este resultado já tinha sido referido no domínio da geometria projetiva, na secção 3.2, cuja demonstração é trivial, não sendo tão trivial na geometria euclidiana.

Recorrendo ao teorema de Desargues, demonstramos a proposição 3.3.1.

Proposição 3.3.1 *A composição de duas homotetias é uma translação ou é uma homotetia.*

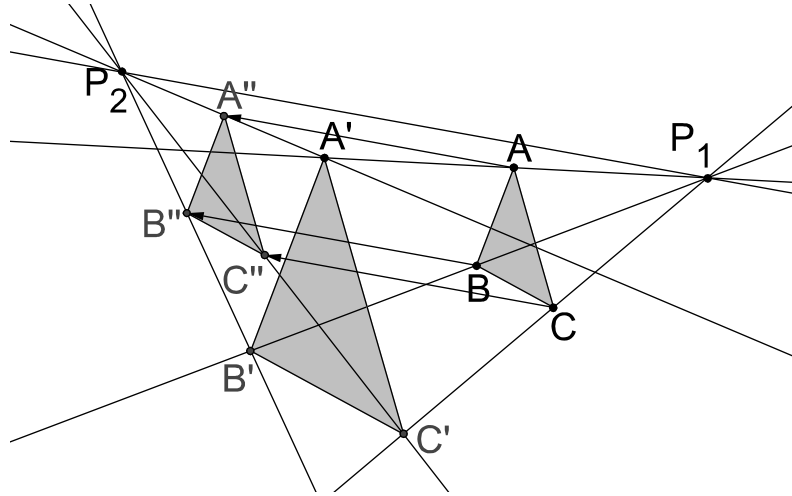


Figura 3.7: A translação como composição de duas homotetias.

Demonstração: Sem perda de generalização, vamos considerar o caso da homotetia direta. Consideremos um triângulo $[ABC]$ e h_{P_1, \mathcal{S}_1} a homotetia de centro P_1 e razão de semelhança \mathcal{S}_1 . Seja

$$A' = h_{P_1, \mathcal{S}_1}(A), \quad B' = h_{P_1, \mathcal{S}_1}(B) \text{ e } C' = h_{P_1, \mathcal{S}_1}(C). \quad (3.38)$$

Considerando o triângulo $[A'B'C']$ e h_{P_2, \mathcal{S}_2} a homotetia de centro P_2 e razão de semelhança \mathcal{S}_2 , seja

$$A'' = h_{P_2, \mathcal{S}_2}(A') = h_{P_2, \mathcal{S}_2}(h_{P_1, \mathcal{S}_1}(A)), \quad (3.39)$$

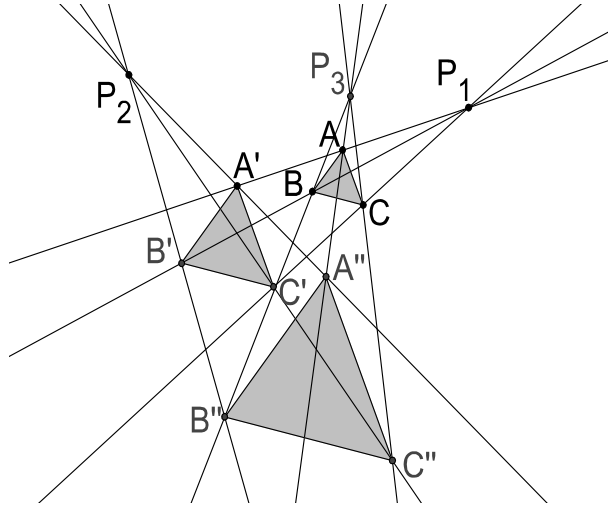


Figura 3.8: A homotetia como composição de duas homotetias.

$$B'' = h_{P_2, \mathcal{S}_2}(B') = h_{P_2, \mathcal{S}_2}(h_{P_1, \mathcal{S}_1}(B)), \quad (3.40)$$

$$C'' = h_{P_2, \mathcal{S}_2}(C') = h_{P_2, \mathcal{S}_2}(h_{P_1, \mathcal{S}_1}(C)). \quad (3.41)$$

Pelas propriedades da homotetia, e considerando a homotetia h_{P_1, \mathcal{S}_1} , podemos garantir que os segmentos de reta $[AB]$ e $[A'B']$ são paralelos, assim como os segmentos de reta $[BC]$ e $[B'C']$ e os segmentos de reta $[AC]$ e $[A'C']$. Da mesma forma, considerando a homotetia h_{P_2, \mathcal{S}_2} , podemos garantir que os segmentos de reta $[A'B']$ e $[A''B'']$ são paralelos, assim como os segmentos de reta $[B'C']$ e $[B''C'']$ e os segmentos de reta $[A'C']$ e $[A''C'']$. Assim, os segmentos de reta $[AB]$, $[A'B']$ e $[A''B'']$ são paralelos, bem como os segmentos de reta $[BC]$, $[B'C']$ e $[B''C'']$ e $[AC]$, $[A'C']$ e $[A''C'']$.

De $[A'B'C'] = h_{P_1, \mathcal{S}_1}[ABC]$ segue que

$$\frac{\overline{P_1A'}}{\overline{P_1A}} = \frac{\overline{P_1B'}}{\overline{P_1B}} = \frac{\overline{P_1C'}}{\overline{P_1C}} = \mathcal{S}_1 \quad (3.42)$$

e, pelo teorema de Tales,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \mathcal{S}_1 \quad (3.43)$$

De $[A''B''C''] = h_{P_2, \mathcal{S}_2}[A'B'C']$ segue que

$$\frac{\overline{P_2A''}}{\overline{P_2A'}} = \frac{\overline{P_2B''}}{\overline{P_2B'}} = \frac{\overline{P_2C''}}{\overline{P_2C'}} = \mathcal{S}_2 \quad (3.44)$$

e, pelo teorema de Tales,

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{A''C''}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{B''C''}}{\overline{B'C'}} = \mathcal{S}_2 \quad (3.45)$$

Como

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'} \cdot \overline{A''B''}}{\overline{AB} \cdot \overline{A'B'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 \quad (3.46)$$

Se $\overline{AB} = \overline{A''B''}$, ou seja, $\mathcal{S}_3 = 1$, temos que se pode obter o segmento de reta $[A''B'']$ a partir do segmento de reta $[AB]$ por uma translação segundo o vetor $\overrightarrow{AA''}$, como se pode observar na figura 3.7. Concluimos, analogamente, o mesmo resultado, considerando os segmentos de reta $[BC]$ e $[AC]$. Caso contrário, se $\mathcal{S}_3 \neq 1$, seja $P_3 \equiv AA'' \cap BB''$, com base na figura 3.8. Vamos demonstrar que P_3 é o centro da homotetia $h_{P_2, \mathcal{S}_2} \circ h_{P_1, \mathcal{S}_1}$. Sendo C um ponto qualquer e $C'' = h_{P_2, \mathcal{S}_2} \circ h_{P_1, \mathcal{S}_1}(C)$, temos, pelas propriedades da homotetia, que os segmentos de reta $[AB]$ e $[A''B'']$ são paralelos, assim como os segmentos de reta $[BC]$ e $[B''C'']$ e os segmentos de reta $[AC]$ e $[A''C'']$. Como temos que $P_3 \equiv AA'' \cap BB''$, pelo teorema 3.3.3, podemos afirmar que as retas AA'' , BB'' e CC'' são concorrentes, sendo P_3 o ponto de interseção. Assim, podemos concluir que P_3 é o centro da homotetia $h_{P_2, \mathcal{S}_2} \circ h_{P_1, \mathcal{S}_1}$. ■

Atendendo aos resultados apresentados, verificamos que o problema de Desargues pode ser trabalhado nos ensinos básico e secundário, uma vez que a homotetia é estudada no âmbito das figuras semelhantes.

Pensando numa generalização da proposição 3.3.1 aplicada à configuração de Desargues, e como consequência de resultados experimentais com o auxílio do programa informático Geogebra 4.2, formulamos a conjectura 3.3.1.

Conjetura 3.3.1 *Consideremos $[A_1B_1C_1]$, $[A_2B_2C_2]$ e $[A_3B_3C_3]$ três triângulos em que os triângulos $[A_1B_1C_1]$ e $[A_2B_2C_2]$ são perspetivos do triângulo $[A_3B_3C_3]$ segundo os pontos P e P' , respetivamente. Se se verificam as igualdades*

$$\frac{\overline{PA_1}}{\overline{PA_3}} = \frac{\overline{P'A_2}}{\overline{P'A_3}}, \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PB_3}} = \frac{\overline{P'B_2}}{\overline{P'B_3}}, \frac{\overline{PC_1}}{\overline{PC_3}} = \frac{\overline{P'C_2}}{\overline{P'C_3}}, \quad (3.47)$$

então os triângulos $[A_1B_1C_1]$, $[A_2B_2C_2]$ e $[A_3B_3C_3]$ são perspetivos da mesma reta (figura 3.9).

A geometria hiperbólica também permite-nos estudar todos os casos vistos na geometria projetiva e na geometria euclidiana.

3.4 Estudo da Localização da Reta Perspetiva

Com o estudo da configuração de Desargues, com recurso ao programa Geogebra 4.2, surgiu, desde o início, a curiosidade pelo estudo da localização da reta perspetiva. Com o estudo efetuado ao nível da geometria hiperbólica, na secção 2.2.1, temos que o plano projetivo e o plano hiperbólico são isomorfos. Sendo assim, decidimos alargar a nossa pesquisa também ao plano hiperbólico, através da representação do semiplano superior, dada a facilidade de construção das geodésicas.

Por serem casos triviais, não serão contemplados os casos em que os triângulos se intersejam, onde a reta perspetiva interseja um ou os dois triângulos. Apresentamos um exemplo na figura 3.10.

O estudo efetuado relativamente à localização da reta perspetiva contemplou os casos em que os triângulos perspetivos $[ABC]$ e $[A'B'C']$, perspetivos de um ponto P , têm os vértices A , A' e C , C' localizados em semiplanos distintivos definidos pela reta PB .

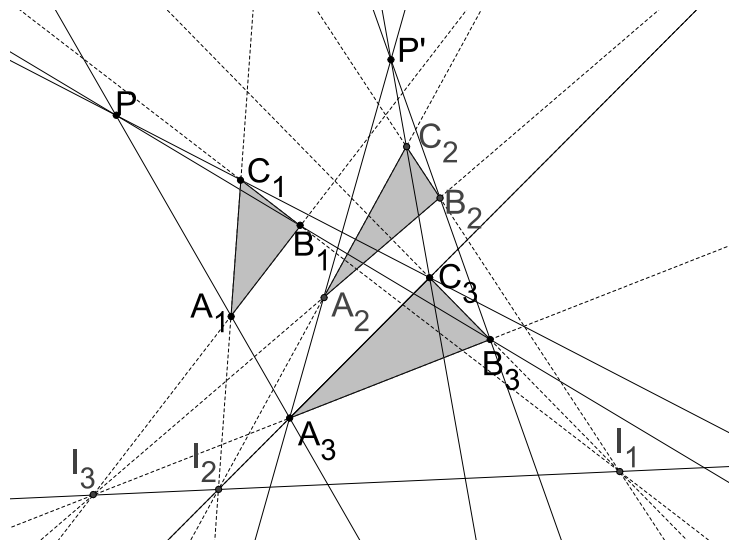


Figura 3.9: Os triângulos são perspetivos da mesma reta.

A investigação da posição da reta perspetiva foi feita com o recurso ao programa informático Geogebra 4.2. Todas as observações feitas são baseadas em resultados experimentais aplicando o referido programa.

Para melhor registar as nossas observações, sentimos a necessidade de definir as posições relativas dos triângulos perspetivos. Assim, na secção 3.4.1, definimos as diferentes posições relativas dos triângulos no plano projetivo, considerando-as igualmente no plano hiperbólico.

3.4.1 Posições Relativas dos Triângulos Perspetivos

Tenhamos em conta dois triângulos, $[ABC]$ e $[A'B'C']$, perspetivos de um ponto P . Vamos considerar a orientação do plano euclidiano, constituída por dois sentidos. O sentido anti-horário será considerado o sentido positivo e o sentido horário será considerado o sentido negativo.

Definição 3.4.1 Dizemos que dois triângulos perspetivos de um ponto estão em posição invertida quando na leitura de cada um dos triângulos se tem dois sentidos diferentes.

Nas figuras 3.11 e 3.12 temos dois exemplos correspondentes a triângulos em posição invertida. Na figura 3.11, o triângulo $[ABC]$ é definido no sentido negativo e o triângulo $[A'B'C']$ é definido no sentido positivo. Na figura 3.12, o triângulo $[ABC]$ é definido no sentido positivo e o triângulo $[A'B'C']$ é definido no sentido negativo. Para distinguir os dois casos, vamos considerar os semiplanos definidos pela reta AC (também se pode ter como referência os semiplanos definidos pela reta $A'C'$).

Definição 3.4.2 Consideremos dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida, em que os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Designamos por posição invertida negativa a posição invertida em que os vértices B e B' se encontram em semiplanos distintos definidos pela reta AC (figura 3.11).

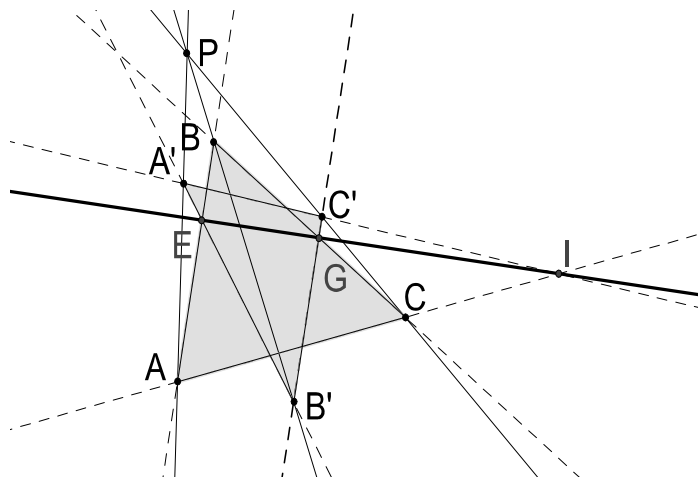


Figura 3.10: A reta perspectiva intersesta os dois triângulos.

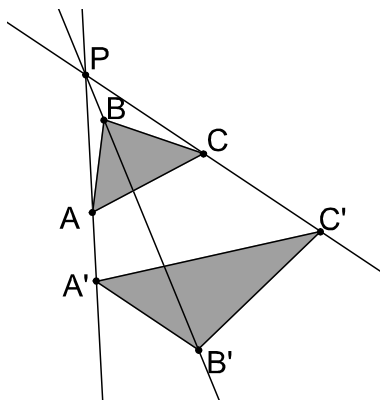


Figura 3.11: Triângulos em posição invertida negativa.

Definição 3.4.3 Consideremos dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida, em que os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Designamos por posição invertida positiva a posição invertida em que os vértices B e B' se encontram no mesmo semiplano definido pela reta AC (figura 3.12).

Definição 3.4.4 Dizemos que dois triângulos perspetivos de um ponto estão em posição direta quando na leitura de cada um dos triângulos se tem um só sentido (figura 3.13).

3.4.2 Regiões do Plano Projetivo e do Plano Hiperbólico

Atendendo à posição relativa dos triângulos perspetivos e como forma de localizar a reta perspectiva no plano projetivo e no plano hiperbólico, vamos definir regiões de cada um dos planos.

Para os casos em que os triângulos estão em posição invertida, vamos definir duas regiões do plano projetivo e do plano hiperbólico.

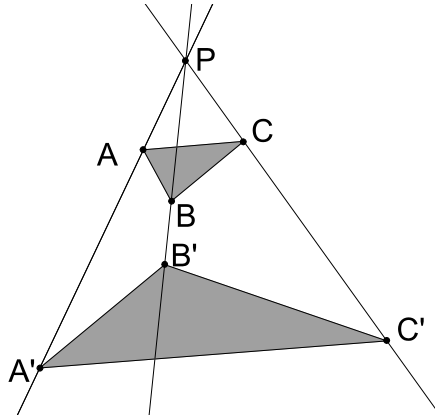


Figura 3.12: Triângulos em posição invertida positiva.

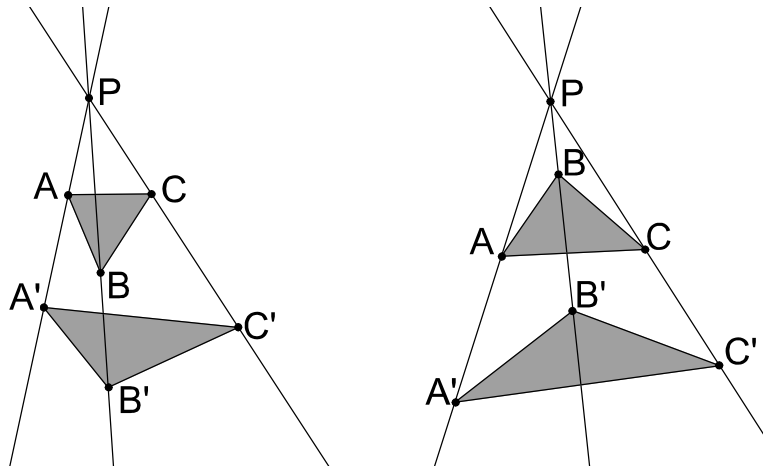


Figura 3.13: Triângulos perspetivos em posição direta.

Definição 3.4.5 Consideremos no plano projetivo (hiperbólico), dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida, em que os vértices A , A' e C , C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta (geodésica) PB . Seja $I \equiv AC \cap A'C'$.

(i) Designamos por $\mathcal{R}_l(\mathcal{G}_l)$ a região do plano projetivo (hiperbólico) limitada pelas retas (geodésicas) AC e $A'C'$ que não contém os triângulos considerados (ver figura 3.14).

(ii) Designamos por $\mathcal{R}_v(\mathcal{G}_v)$ a região do plano projetivo (hiperbólico) limitada pelas retas (geodésicas) IB e IB' que não contém os triângulos considerados (ver figura 3.15).

Para os casos em que os triângulos estão em posição direta, também vamos definir duas regiões para cada um dos planos projetivo e hiperbólico. Para tal, surgiu a necessidade de, em primeiro lugar, definir quatro retas que vão delimitar as regiões em cada plano.

Definição 3.4.6 Consideremos no plano projetivo (hiperbólico), dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição direta, em que os vértices A , A' e C , C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta (geodésica) PB . Seja $I \equiv AC \cap A'C'$.

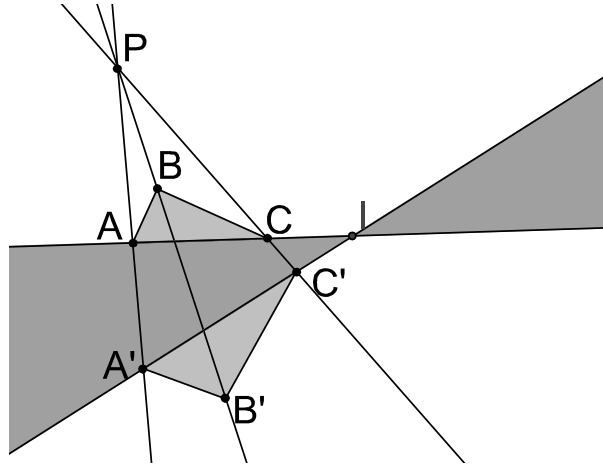


Figura 3.14: A região \mathcal{R}_l .

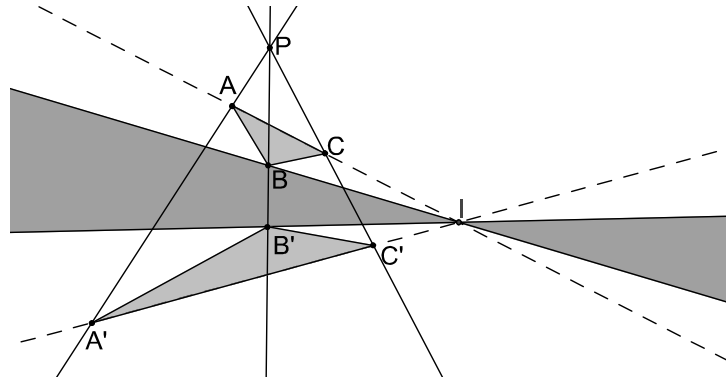


Figura 3.15: A região \mathcal{R}_v .

(i) Designamos por l_e (\bar{l}_e) a reta (geodésica) não incidente com B nem B' que contém o lado do triângulo que divide o plano projetivo (hiperbólico) em dois semiplanos de tal forma que os dois triângulos pertencem ao mesmo semiplano (figura 3.16).

(ii) Designamos por l_i (\bar{l}_i) a reta (geodésica) não incidente com B nem B' que contém o lado do triângulo que divide o plano projetivo (hiperbólico) em dois semiplanos de tal forma que os dois triângulos pertencem a semiplanos distintos (figura 3.16).

(iii) Designamos por v_i (\bar{v}_i) a reta (geodésica) definida por I e pelo vértice incidente com a reta (geodésica) PB , do triângulo que não tem vértices incidentes com a reta (geodésica) l_i (\bar{l}_i) (figura 3.17).

(iv) Designamos por v_e (\bar{v}_e) a reta (geodésica) definida por I e pelo vértice incidente com a reta (geodésica) PB , do triângulo que não tem vértices incidentes com a reta (geodésica) l_e (\bar{l}_e) (figura 3.17).

Neste momento, estamos em condições de definir as duas regiões do plano projetivo e do plano hiperbólico, correspondentes aos casos em que os triângulos estão em posição direta, que vão ser necessárias para o nosso estudo.

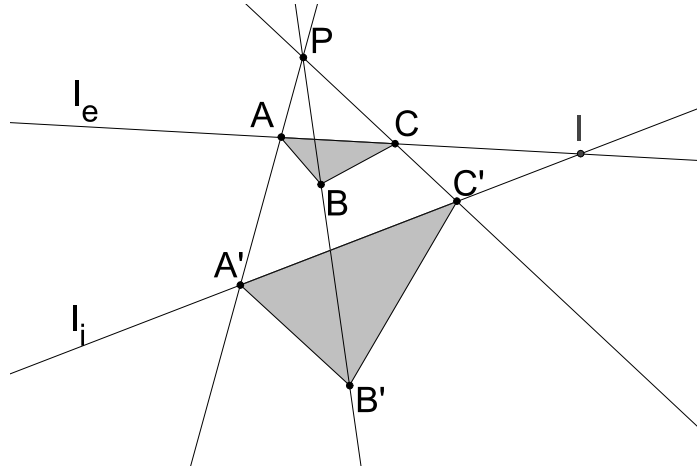


Figura 3.16: As retas l_e e l_i .

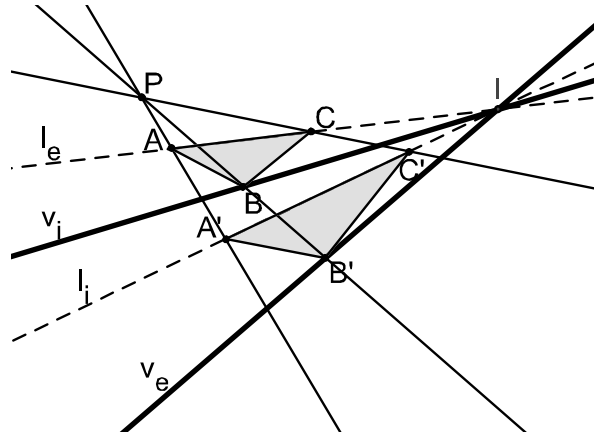


Figura 3.17: As retas v_i e v_e .

Definição 3.4.7 Consideremos no plano projetivo (hiperbólico), dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição direta, em que os vértices A , A' e C , C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta (geodésica) PB .

(i) Designamos por \mathcal{E}_{lv} (\mathcal{F}_{lv}) a região do plano projetivo (hiperbólico) limitada pelas retas l_e e v_e (geodésicas \tilde{l}_e e \tilde{v}_e) que não contém os triângulos considerados (figura 3.18).

(ii) Designamos por \mathcal{I}_{lv} (\mathcal{D}_{lv}) a região do plano projetivo (hiperbólico) limitada pelas retas l_i e v_i (geodésicas \tilde{l}_i e \tilde{v}_i) que não contém os triângulos considerados (figura 3.19).

Foram definidas as regiões do plano projetivo e do plano hiperbólico envolvidas no estudo feito. Contudo, podemos sempre considerar, para cada caso, a região do respetivo plano não contemplada como a região complementar da região definida.

Depois da apresentação das definições consideradas necessárias, podemos proceder ao estudo da localização da reta perspetiva nos planos projetivo e hiperbólico. Vamos começar por estudar os casos em que o ponto perspetivo P é um ponto próprio, seguindo-se os casos em que o ponto perspetivo é impróprio.

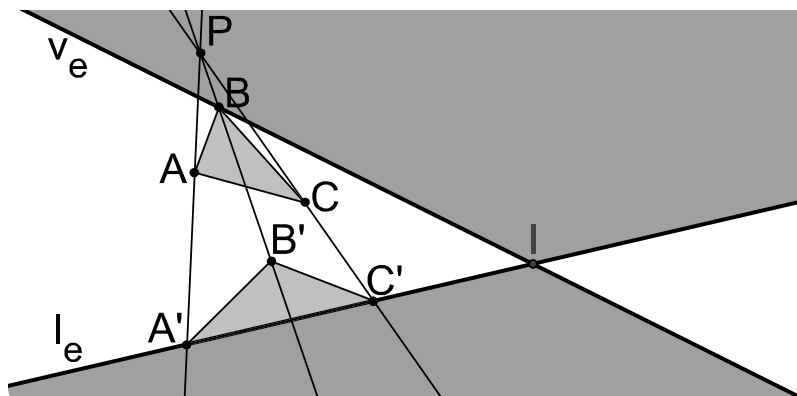


Figura 3.18: A região \mathcal{E}_{lv} .

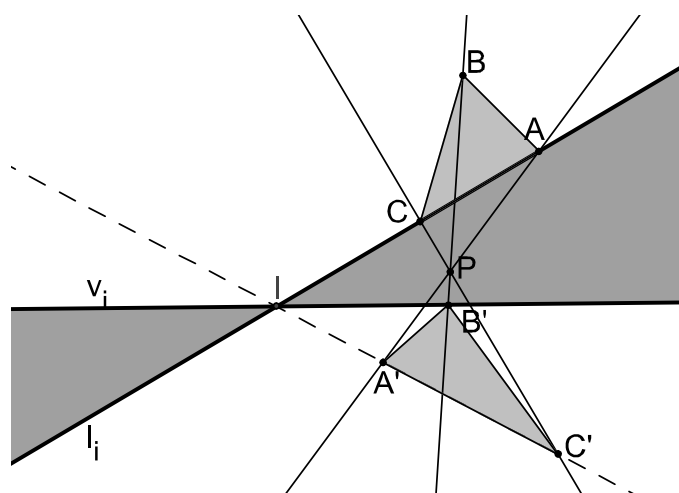


Figura 3.19: A região \mathcal{I}_{lv} .

3.4.3 O Ponto Perspetivo é Próprio

Considerando o ponto perspetivo P um ponto próprio, vamos explorar três casos distintos. No primeiro caso, um dos vértices de um triângulo coincide com o ponto P . No segundo caso, os vértices homólogos dos triângulos perspetivos pertencem à mesma semirreta definida pelo ponto P . No terceiro caso, os vértices homólogos dos triângulos perspetivos pertencem a semirretas distintas definidas pelo ponto P .

Caso 3.4.1 *Um Vértice Coincidente com o Ponto Perspetivo*

Quando um dos vértices de um dos triângulos perspetivos coincide com o ponto perspetivo, verificamos que a reta perspetiva contém um dos lados do outro triângulo perspetivo.

Proposição 3.4.1 *Sejam $[ABC]$ e $[A'B'C']$ dois triângulos, sem lados comuns, perspetivos de um ponto P . O ponto P coincide com um dos vértices de um dos triângulos se, e só se, a reta perspetiva p contiver um dos lados do outro triângulo não determinado pelo respetivo vértice homólogo.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, visto que de forma análoga demonstramos todos os seis casos possíveis, consideremos $P \equiv B$. Então $AB \cap A'B' \equiv A'$ e $BC \cap B'C' \equiv C'$. Logo, a reta perspectiva é a reta $p \equiv A'C'$. Por outro lado, se os dois triângulos são perspetivos de uma reta p , pelo teorema de Desargues, são perspetivos de um ponto, ou seja, AA' , BB' e CC' são concorrentes num único ponto P . Consideremos a reta perspectiva $p \equiv A'C'$. Temos que $A' \equiv AB \cap A'B'$ e $C' \equiv BC \cap B'C'$, logo $A' \in AB$ e $C' \in BC$. Como as retas AB e BC são concorrentes no ponto B , e $AB \equiv AA'$ e $BC \equiv BB'$ segue que $AA' \cap BB' \equiv B$. Como os triângulos não têm lados comuns, concluímos que o ponto perspetivo é o vértice B . ■

Vértices Homólogos Pertencem à Mesma Semirreta

Para estudar o caso em que os vértices homólogos dos triângulos pertencem à mesma semirreta definida pelo ponto perspetivo, vamos subdividi-lo consoante a posição relativa dos triângulos perspetivos.

Caso 3.4.2 Triângulos em Posição Invertida Negativa

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida negativa, em que os vértices homólogos pertencem à mesma semirreta definida pelo ponto P e os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Nestas condições, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{R}_l , como podemos observar na figura 3.20. Considerando no plano hiperbólico dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas condições descritas, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{G}_l , como podemos observar na figura 3.21.

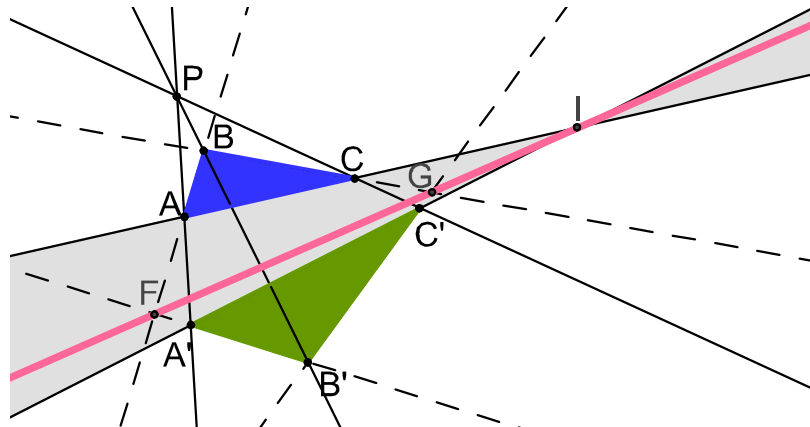


Figura 3.20: Triângulos em posição invertida negativa no plano projetivo: reta perspectiva na região \mathcal{R}_l .

Caso 3.4.3 Triângulos em Posição Invertida Positiva

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida positiva, em que os vértices homólogos pertencem à mesma semirreta definida pelo ponto P e os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Seja $I \equiv AC \cap A'C'$. Nestas condições, verificamos que a reta

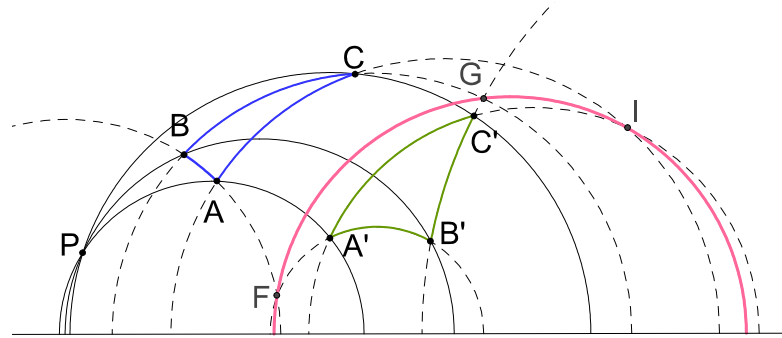


Figura 3.21: Triângulos em posição invertida negativa no plano hiperbólico: reta perspectiva na região \mathcal{G}_l .

perspetiva se situa na região \mathcal{R}_v , como podemos observar na figura 3.22. Considerando no plano hiperbólico dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas condições descritas, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{G}_v , como podemos observar na figura 3.23.

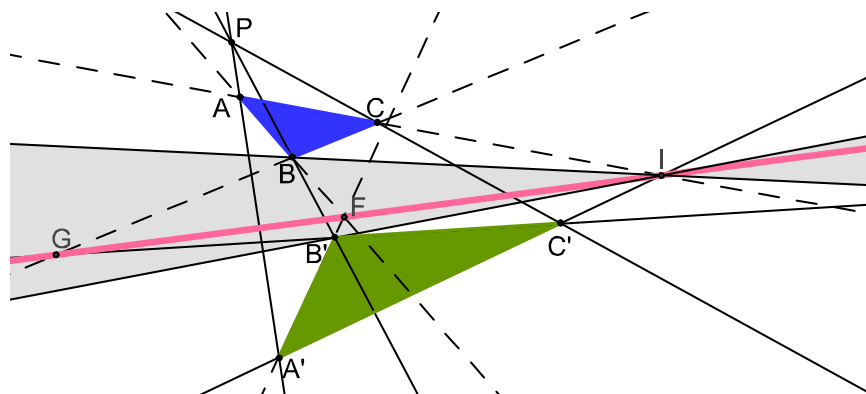


Figura 3.22: Triângulos em posição invertida positiva no plano projetivo: reta perspectiva na região \mathcal{R}_v .

Caso 3.4.4 Triângulos em Posição Direta

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição direta, em que os vértices homólogos pertencem à mesma semirreta definida pelo ponto P e os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Nestas condições, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{E}_{lv} , como observamos na figura 3.24. Considerando no plano hiperbólico dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas mesmas condições que no plano projetivo, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{F}_{lv} como nos mostra a figura 3.25.

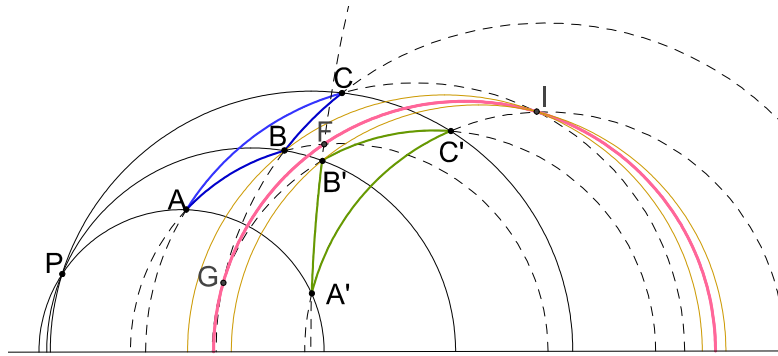


Figura 3.23: Triângulos em posição invertida positiva no plano hiperbólico: reta perspectiva na região \mathcal{G}_v .

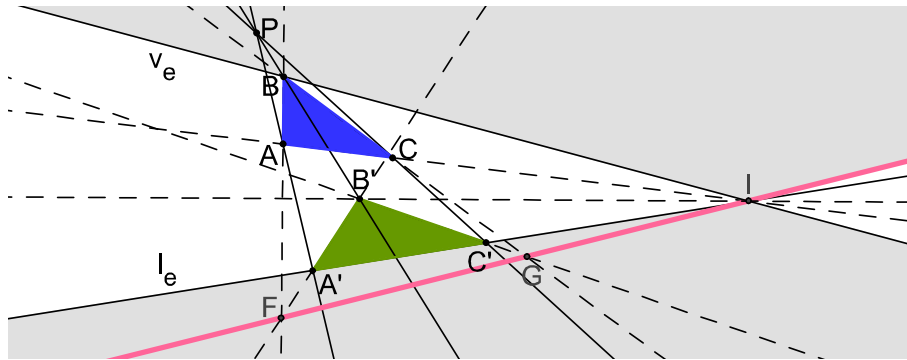


Figura 3.24: Triângulos em posição direta no plano projetivo: reta perspectiva na região \mathcal{E}_{lv} .

Vértices Homólogos Pertencem a Semirretas Distintas

À semelhança do efetuado anteriormente, para estudar o caso em que os vértices homólogos dos triângulos pertencem a semirretas distintas definidas pelo ponto perspectivo, vamos subdividi-lo consoante a posição relativa dos triângulos perspectivos.

Caso 3.4.5 *Triângulos em Posição Invertida Negativa*

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspectivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida negativa, em que os vértices homólogos pertencem a semirretas distintas definidas pelo ponto P e os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Verificamos, nas condições descritas, que a reta perspectiva situa-se na região \mathcal{R}_v , como podemos observar na figura 3.26. Considerando no plano hiperbólico dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas mesmas condições que no plano projetivo, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{G}_v , de acordo com a figura 3.27.

Caso 3.4.6 *Triângulos em Posição Invertida Positiva*

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspectivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida positiva, em que os vértices homólogos pertencem a semirretas

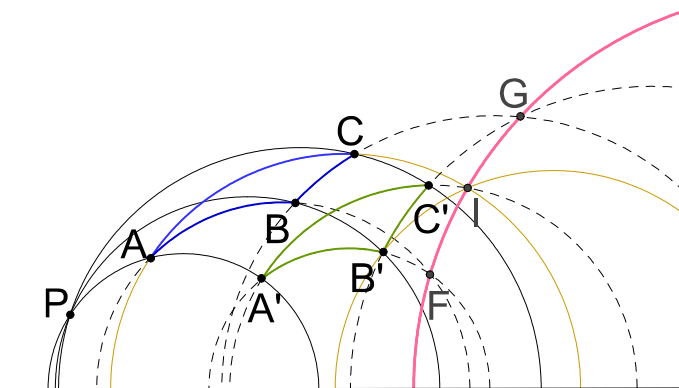


Figura 3.25: Triângulos em posição direta no plano hiperbólico: reta perspectiva na região \mathcal{F}_{lv} .

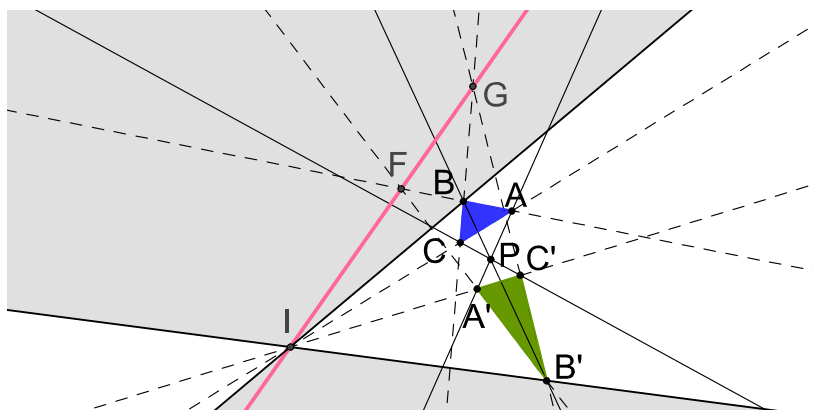


Figura 3.26: Reta perspectiva na região \mathcal{R}_v .

distintas definidas pelo ponto P e os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Verificamos, nas condições descritas, que a reta perspectiva situa-se na região \mathcal{R}_l , de acordo com a figura 3.28. No plano hiperbólico, considerando dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas mesmas condições que no plano projetivo, verificamos que a reta perspectiva situa-se na região \mathcal{G}_l , como observamos na figura 3.29.

Caso 3.4.7 Triângulos em Posição Direta

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto P , $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição direta, em que os vértices homólogos pertencem a semirretas distintas definidas pelo ponto P e os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta PB . Nestas condições, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{I}_{lv} , como observamos na figura 3.30. Considerando, no plano hiperbólico, dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas mesmas condições que no plano projetivo, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{D}_{lv} como nos mostra a figura 3.31.

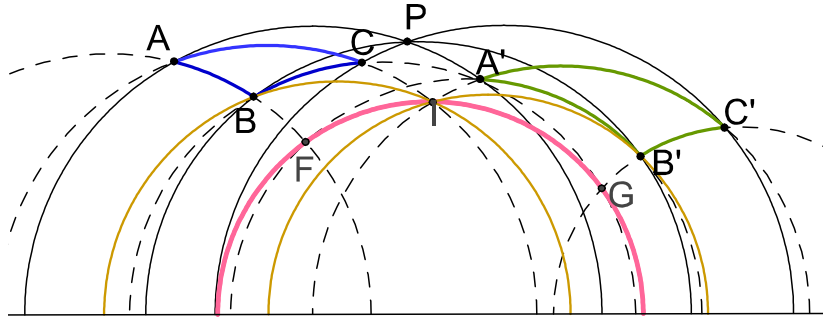


Figura 3.27: Reta perspectiva na região \mathcal{G}_v .

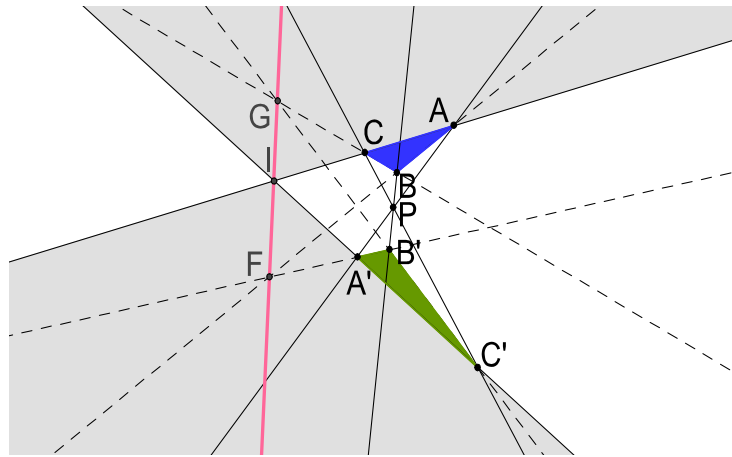


Figura 3.28: Reta perspectiva na região \mathcal{R}_l .

3.4.4 Ponto Perspetivo Impróprio

Como vimos na secção 3.2, quando o ponto perspetivo P , no plano projetivo, é impróprio, as retas suporte dos vértices homólogos dos triângulos perspetivos interseam-se num ponto impróprio. Sendo o plano hiperbólico isomorfo do plano projetivo, verifica-se o mesmo resultado.

À semelhança dos casos anteriores, para complementar o estudo feito no plano projetivo, vamos recorrer ao modelo do semiplano superior, como representação do plano hiperbólico. Como as geodésicas suporte dos vértices homólogos são paralelas, vamos recorrer ao caso em que são perpendiculares ao eixo do infinito. Desta forma, o comprimento de um segmento de reta pertencente a uma geodésica perpendicular ao eixo do infinito é igual ao comprimento de um segmento de reta no plano projetivo.

Caso 3.4.8 Triângulos em Posição Invertida Negativa

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto impróprio, $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida negativa, em que os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta BB' . Verificamos que a reta perspetiva situa-se na

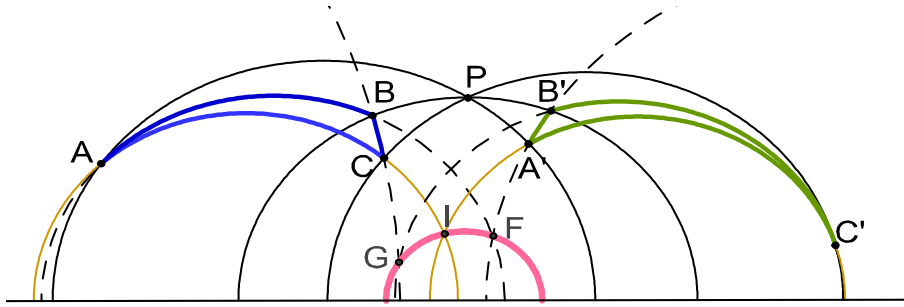


Figura 3.29: Reta perspectiva na região \mathcal{G}_l .

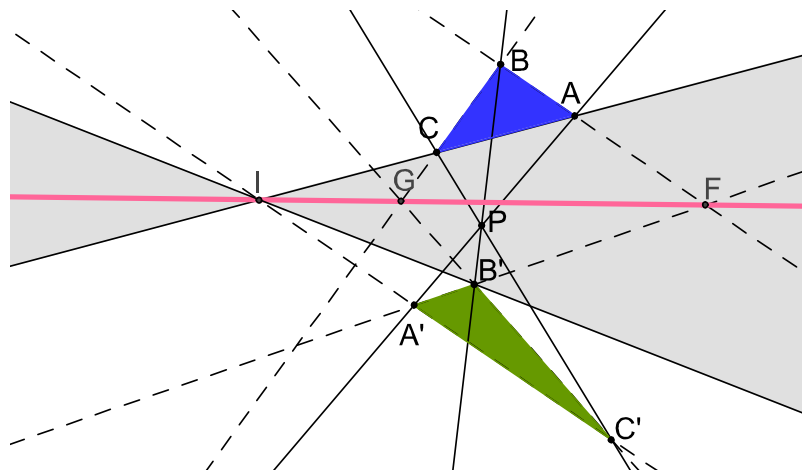


Figura 3.30: Reta perspectiva na região \mathcal{I}_{lv} .

região \mathcal{R}_l , de acordo com a figura 3.32. Considerando dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em iguais condições no plano hiperbólico, verificamos que a reta perspectiva se situa na região \mathcal{G}_l , conforme a figura 3.33 mostra.

Caso 3.4.9 *Triângulos em Posição Invertida Positiva*

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto impróprio, $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição invertida positiva, em que os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta BB' . Verificamos, nas condições descritas, que a reta perspectiva situa-se na região \mathcal{R}_v , de acordo com a figura 3.34. No plano hiperbólico, considerando dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas mesmas condições que no plano projetivo, verificamos que a reta perspectiva situa-se na região \mathcal{G}_v , como observamos na figura 3.35.

Caso 3.4.10 *Triângulos em Posição Direta*

Consideremos no plano projetivo dois triângulos perspetivos de um ponto impróprio, $[ABC]$ e $[A'B'C']$ em posição direta, em que os vértices A, A' e C, C' pertencem a semiplanos distintos definidos pela reta BB' . Verificamos, nas condições descritas, que a reta

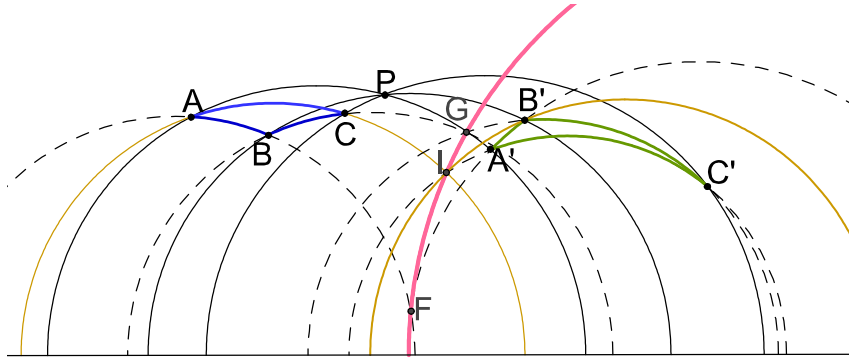


Figura 3.31: Reta perspectiva na região \mathcal{D}_{lv} .

perspetiva situa-se na região \mathcal{E}_{lv} , de acordo com a figura 3.36. No plano hiperbólico, considerando dois triângulos $[ABC]$ e $[A'B'C']$ nas mesmas condições que no plano projetivo, verificamos que a reta perspectiva situa-se na região \mathcal{F}_{lv} , como observamos na figura 3.37.

3.4.5 Resultado no Plano Hiperbólico

De acordo com os resultados experimentais efetuados no plano hiperbólico, podemos enunciar o lema 3.4.1.

Lema 3.4.1 *Consideremos no plano hiperbólico dois triângulos perspetivos de um ponto impróprio ou próprio. Se todos os pontos de interseção das geodésicas que contêm os lados homólogos dos triângulos são pontos no infinito, então a reta perspectiva é uma geodésica no infinito.*

Demonstração: Se três pontos impróprios pertencem à mesma geodésica, a reta perspectiva só pode estar no infinito, devido à métrica do espaço hiperbólico e à própria construção da reta. ■

De acordo com estudo feito e as experimentações efetuadas com o programa informático, verificamos que podem ser feitas explorações a outros níveis.

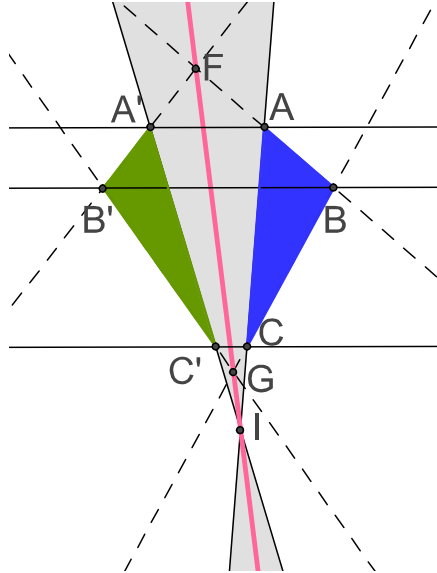


Figura 3.32: Reta perspectiva na região \mathcal{R}_l , com ponto perspectivo impróprio.

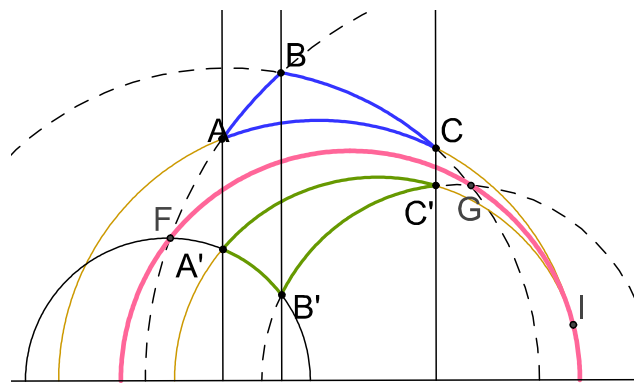


Figura 3.33: Reta perspectiva na região \mathcal{G}_l , com ponto perspectivo impróprio.

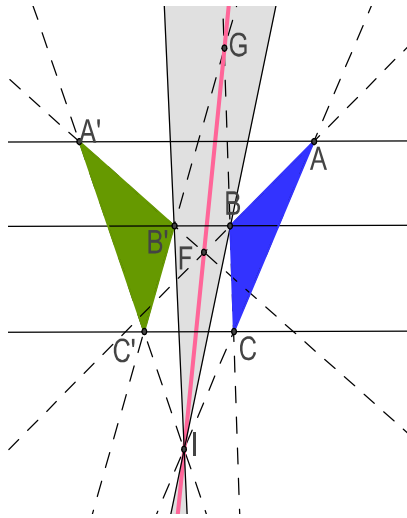


Figura 3.34: Reta perspectiva na região \mathcal{R}_v , com o ponto perspectivo impróprio.

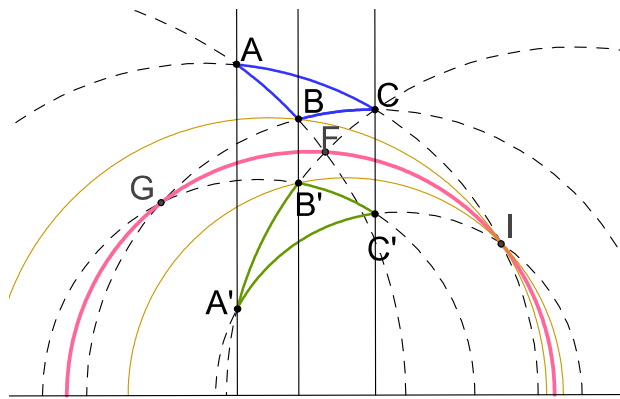


Figura 3.35: Reta perspectiva na região \mathcal{G}_v , com o ponto perspectivo impróprio.

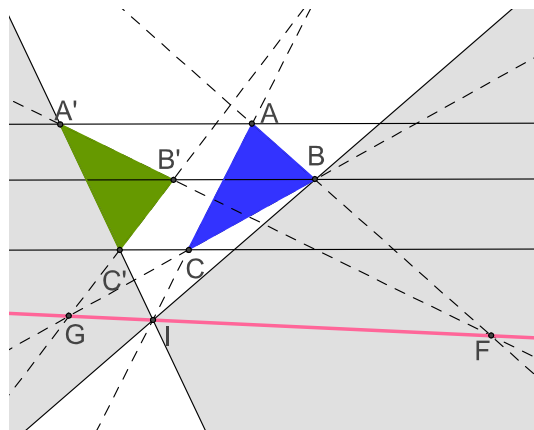


Figura 3.36: Reta perspectiva na região \mathcal{E}_{lv} , com o ponto perspectivo impróprio.

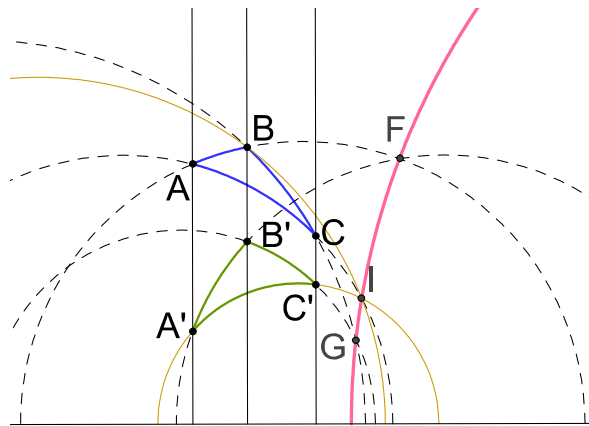


Figura 3.37: Reta perspectiva na região \mathcal{F}_{lv} , com o ponto perspectivo impróprio.

Capítulo 4

Problema de Fagnano

4.1 Vida e Obra do Autor

Giovanni Francesco Fagnano Dei Toschi nasceu a 31 de janeiro de 1715, na cidade italiana de Sinigaglia (atual Senigallia), e morreu, no mesmo local, a 14 de maio de 1797. Nasceu numa das principais famílias da cidade, sendo seu pai Giulio Carlo Fagnano (1682-1766), conhecido pelo seu contributo na área da Matemática, como é exemplo o seu trabalho relacionado com a lemniscata de Bernoulli. Giovanni Fagnano não era filho único, mas foi o único filho que herdou do pai o gosto pela Matemática [5] [24].

Fagnano seguiu a vida do sacerdócio, tendo desempenhado cargos de relevante importância na catedral de Sinigaglia. Para além da sua dedicação à Igreja, deu continuidade ao trabalho de seu pai, escrevendo um tratado sobre a geometria do triângulo, contribuindo, assim, com vários resultados sobre o assunto [24].

O problema associado ao seu nome foi proposto em 1775 e por ele próprio resolvido através de cálculos [17] [11]:

Problema 4.1.1 *Inscrever num triângulo acutângulo dado, um triângulo de perímetro mínimo.*

Das diferentes resoluções do problema, destacam-se, como as mais conhecidas, a do matemático Lipót Fejér (1880-1958) que, em 1900, enquanto estudante em Berlim, encontrou a solução do problema, recorrendo apenas à reflexão em reta, e a de Hermann A. Schwarz (1843-1921) [21] [11].

Entre os resultados importantes demonstrados por Fagnano, encontramos o teorema que afirma que, considerando num triângulo, o triângulo cujos vértices coincidem com os pés das alturas do triângulo dado, as alturas do triângulo inicial são bissetrizes dos ângulos do triângulo formado [24].

Muitos dos resultados encontrados por Fagnano foram registados na *Nova acta eruditorum*, em 1774. Para além do trabalho desenvolvido no âmbito da Geometria, Fagnano também deixou resultados importantes na área do cálculo integral [24].

4.2 Estudo do Problema de Fagnano

Como já foi referido, uma das demonstrações da solução do problema de Fagnano deve-se a Fejér, que começou por concluir, através da reflexão em reta, que os dois lados do triângulo

de perímetro mínimo têm de formar o mesmo ângulo com o lado do triângulo inicial que os intersecta [21]. Conforme veremos, a solução do problema de Fagnano é o *triângulo órtico*.

Definição 4.2.1 Chamamos *triângulo órtico* ao triângulo cujos vértices são os pés das alturas de um triângulo dado.

A seguir apresentamos o resultado obtido por Fejér e os resultados que se podem obter a partir dele e que serão úteis no estudo do problema de Fagnano.

Teorema 4.2.1 Consideremos um triângulo acutângulo e o respectivo triângulo órtico. Os dois lados concorrentes em cada vértice do respectivo triângulo órtico formam com o lado do triângulo dado ângulos congruentes entre si que, por sua vez, são congruentes com o ângulo do vértice do triângulo dado oposto ao respectivo lado desse triângulo.

Demonstração: Seguindo a demonstração apresentada por R. Courant e H. Robbins em [10] (pp. 347), seja $[DEF]$ o triângulo órtico do triângulo $[ABC]$. Observando a figura 4.1, temos que $\angle OEB$ e $\angle BDO$ são ângulos retos e, portanto, o quadrilátero $[ODBE]$ pode ser inscrito numa circunferência de diâmetro $[OB]$. Como consequência, temos que $\angle OBD$ e $\angle OED$ são ângulos congruentes por serem inscritíveis no mesmo arco de circunferência. Considerando o triângulo retângulo $[ABF]$, verificamos que o $\angle OBD$ é complementar do $\angle BAC$ e, pela definição da altura de um triângulo, temos que o $\angle OED$ é complementar do $\angle DEB$. Assim, concluímos que o $\angle DEB$ é congruente com o $\angle BAC$. Considerando o quadrilátero $[OECF]$ e aplicando o mesmo raciocínio, demonstramos que o $\angle CEF$ é congruente com o $\angle BAC$. Da mesma forma chegamos ao mesmo resultado para os outros dois pares de ângulos formados pelos lados do triângulo $[DEF]$ e cada um dos lados do triângulo $[ABC]$. ■

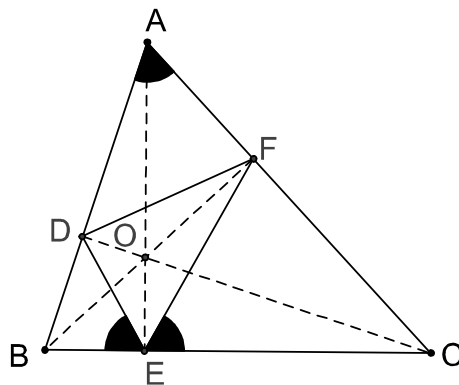


Figura 4.1: $[DEF]$ é o triângulo órtico do triângulo $[ABC]$.

Este resultado permite-nos enunciar a propriedade 4.2.1.

Propriedade 4.2.1 Dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, e o respectivo triângulo órtico $[DEF]$, os triângulos $[ADF]$, $[DBE]$ e $[FEC]$ são semelhantes entre si e ao triângulo $[ABC]$ (figura 4.1).

Demonstração: Atendendo ao teorema 4.2.1, a demonstração é imediata, pois os triângulos considerados têm, de uns para os outros, dois ângulos congruentes. ■

A partir do teorema 4.2.1, podemos enunciar o corolário 4.2.1.

Corolário 4.2.1 *O triângulo órtico de um triângulo acutângulo é retângulo se e só se um dos ângulos internos do triângulo acutângulo tem amplitude igual a 45° .*

Demonstração: Consideremos $[ABC]$ um triângulo acutângulo e o respetivo triângulo órtico $[DEF]$. Vamos considerar como hipótese que o triângulo órtico $[DEF]$ é retângulo em D (ver figura 4.2). Pelo teorema 4.2.1, temos que

$$\angle FDA = \angle BDE = \angle ACB. \quad (4.1)$$

Como $\angle EDF = 90^\circ$, segue que $\angle FDA = \angle BDE = 45^\circ$ e, conseqüentemente, $\angle ACB = 45^\circ$. Para a demonstração da segunda implicação, consideremos como hipótese que um dos ângulos internos do triângulo acutângulo dado, $\angle ACB$, por exemplo, tem amplitude igual a 45° (figura 4.2). Pelo teorema 4.2.1, temos que

$$\angle FDA = \angle BDE = \angle ACB = 45^\circ. \quad (4.2)$$

Logo,

$$\angle EDF = 180^\circ - 2 \times 45^\circ = 90^\circ, \quad (4.3)$$

ou seja, o triângulo órtico é retângulo. ■

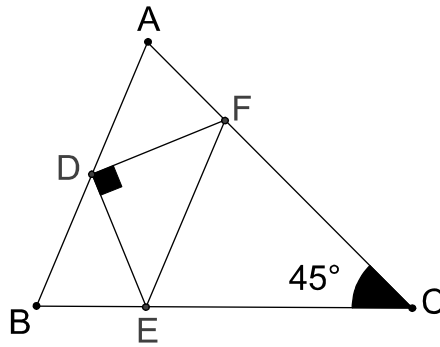


Figura 4.2: O triângulo órtico $[DEF]$ é retângulo.

Como consequência do teorema 4.2.1, seguem o teorema 4.2.2 e a propriedade 4.2.2, citada em [10], cujas demonstrações apresentamos.

Teorema 4.2.2 *Dado um triângulo acutângulo e o respetivo triângulo órtico, as alturas do triângulo dado coincidem com as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo órtico.*

Demonstração: Atendendo à figura 4.1, pelo teorema 4.2.1 temos $\angle CEF = \angle DEB$. Como $\angle CEA = 90^\circ$, concluímos que $\angle FEA = \angle AED$, ou seja, a semirreta que contém a altura $[AE]$ é a bissetriz do $\angle FED$. ■

Propriedade 4.2.2 Consideremos a reflexão em reta de cada lado do triângulo órtico segundo um eixo que contenha o lado do triângulo dado que o intersecta. A imagem obtida está contida na reta suporte que contém o outro lado do triângulo órtico que intersecta o eixo de reflexão.

Demonstração: Observando a figura 4.1, consideremos F' o ponto de reflexão do ponto F segundo a reta BC . Pelo teorema 4.2.1 e pelas propriedades da reflexão em reta, temos que $\angle DEB = \angle CEF = \angle F'EC$, concluindo que $\angle F'EC$ e $\angle DEB$ são ângulos verticalmente opostos. Assim, temos que o ponto F' pertence à reta DE , reta suporte do lado $[DE]$ do triângulo órtico. De forma análoga, verificamos o mesmo resultado para os outros lados. ■

Nas secções seguintes, apresentamos as resoluções de Fejér e Schwarz, uma resolução com base no teorema de Heron e outra através do produto escalar para o problema de Fagnano.

4.2.1 Resolução de Fejér

Como já referimos na primeira secção deste capítulo, a resolução para o problema de Fagnano efetuada pelo matemático Fejér é uma das mais conhecidas. A mesma pode ser encontrada em [12] (pp. 360), [16] (pp. 404) e [21] (pp. 76), e torna-se muito interessante, atendendo à sua grande simplicidade, conforme podemos observar a seguir.

A resolução é composta por duas partes. Na primeira parte, consideramos um ponto qualquer sobre um dos lados do triângulo dado, com o objetivo de encontrar, de entre todos os triângulos inscritos no triângulo inicial com vértice nesse ponto, aquele que tem o menor perímetro. A segunda parte da resolução consiste em definir a posição exata do referido ponto, de modo a determinar, de entre todos os triângulos inscritos no triângulo dado, o que tem perímetro mínimo.

Sendo $[ABC]$ um triângulo acutângulo, devemos ter em conta um ponto E qualquer do lado $[BC]$. Para determinar o triângulo inscrito de perímetro mínimo, consideremos a imagem do ponto E segundo a reflexão de eixo AB e segundo o eixo AC , obtendo os pontos E' e E'' , respetivamente (ver figura 4.3).

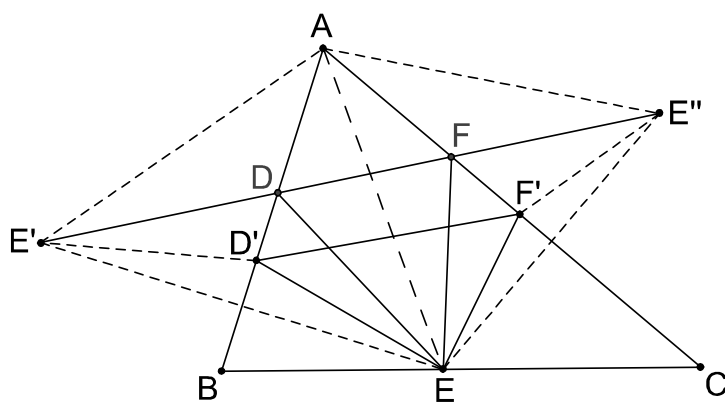


Figura 4.3: Resolução de Fejér.

Consideremos um triângulo qualquer, $[D'EF']$, inscrito no triângulo $[ABC]$. O seu perímetro é dado pela expressão $\overline{D'E} + \overline{D'F'} + \overline{EF'}$. Pela reflexão do ponto E nas retas AB e AC ,

obtemos respetivamente os pontos E' e E'' , assim, o mesmo perímetro pode ser escrito na forma $\overline{E'D'} + \overline{D'F'} + \overline{F'E''}$. Como na geometria euclidiana a distância mais curta entre dois pontos é igual ao comprimento do segmento de reta por eles definido e, considerando as propriedades da reflexão em reta, podemos encontrar o triângulo inscrito no triângulo $[ABC]$, tendo um vértice no ponto E , de perímetro mínimo. Este triângulo terá como perímetro o comprimento $\overline{E'E''}$, e como vértices os pontos E , D e F , onde D e F são, respetivamente, os pontos de interseção do segmento de reta $[E'E'']$ com os lados $[AB]$ e $[AC]$. Assim,

$$\overline{E'D} + \overline{DF} + \overline{FE''} < \overline{E'D'} + \overline{D'F'} + \overline{F'E''}, \quad (4.4)$$

ou seja, o perímetro do triângulo $[DEF]$ é menor do que o perímetro de qualquer outro triângulo, com um dos vértices em E , inscrito no triângulo $[ABC]$. Deste modo, obtemos o triângulo inscrito com vértice em E , de triângulo mínimo.

Vamos, agora, determinar a posição exata do ponto E , de modo a encontrar, de entre todos os triângulos inscritos em $[ABC]$, o que tem perímetro mínimo.

Considerando a reflexão do segmento de reta $[AE]$ segundo o eixo AB e o eixo AC , obtemos, respetivamente, as imagens $[AE']$ e $[AE'']$. O triângulo $[AE'E'']$ é isósceles, onde $\overline{E'E''}$ é igual ao perímetro do triângulo $[DEF]$. Como $\angle E'AE'' = 2\angle BAC$, temos que $\angle E'AE''$ é invariante. Sendo assim, a base $[E'E'']$ do triângulo $[AE'E'']$ é mínima quando os outros dois lados, $[AE']$ e $[AE'']$, tiverem comprimento mínimo.

Como os segmentos de reta $[AE']$ e $[AE'']$ são congruentes com o segmento de reta $[AE]$, o comprimento é mínimo quando o comprimento do segmento de reta $[AE]$ for mínimo, ou seja, quando o segmento de reta $[AE]$ é perpendicular ao segmento de reta $[BC]$. Logo, $[AE]$ é uma altura do triângulo $[ABC]$. O facto de $[ABC]$ ser um triângulo acutângulo, garante que o ponto E pertence ao segmento de reta $[BC]$. O raciocínio feito para o ponto E pode ser feito para os pontos D e F , podendo concluir-se que o triângulo inscrito de perímetro mínimo é aquele cujos vértices coincidem com os pés das alturas do triângulo dado.

4.2.2 Resolução de Schwarz

Em [10] (pp. 347), [11] (pp. 88) e [25] (pp. 69) encontramos a resolução do problema de Fagnano, segundo Schwarz, com base na propriedade 4.2.2.

Dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, seja $[DEF]$ o respetivo triângulo órtico (figura 4.4). Consideremos $[UVW]$ outro triângulo qualquer inscrito no triângulo $[ABC]$. Após a reflexão destes pontos segundo a reta AC , refletimos a imagem obtida segundo a reta $B'C$. Efetuando reflexões sucessivas segundo as retas $A'B'$, $A'C'$ e $B''C'$, obtemos seis triângulos congruentes, cada qual, ao triângulo órtico e ao triângulo inscrito $[UVW]$.

Considerando o lado $[AB]$ e as imagens pelas sucessivas reflexões, obtemos $[AB']$, $[A'B']$, $[A'B'']$ e $[A''B'']$. Por outro lado, $[AB']$ é imagem de $[AB]$ também pela rotação de centro em A e amplitude $2\angle BAC$ no sentido anti-horário, $[A'B']$ é imagem de $[AB']$ por uma rotação de centro B' e amplitude $2\angle CBA$ no sentido anti-horário, $[A'B'']$ é imagem de $[A'B']$ por uma rotação de centro A' e amplitude $2\angle BAC$ no sentido horário e $[A''B'']$ é imagem de $[A'B'']$ por uma rotação de centro B'' e amplitude $2\angle CBA$ no sentido horário. Como a soma das amplitudes dos ângulos de rotação é igual a zero, concluímos que o segmento de reta $[A''B'']$ pode ser obtido a partir do segmento de reta $[AB]$ por uma translação. Como consequência, o quadrilátero $[DD\bar{U}U]$ é um paralelogramo. Pela propriedade 4.2.2, relativa ao triângulo órtico, obtemos o segmento de reta $[D\bar{D}]$ de comprimento igual ao dobro do perímetro do triângulo órtico. Da mesma forma, temos a linha poligonal aberta $(UWV'U''W'''V'''\bar{U})$, de

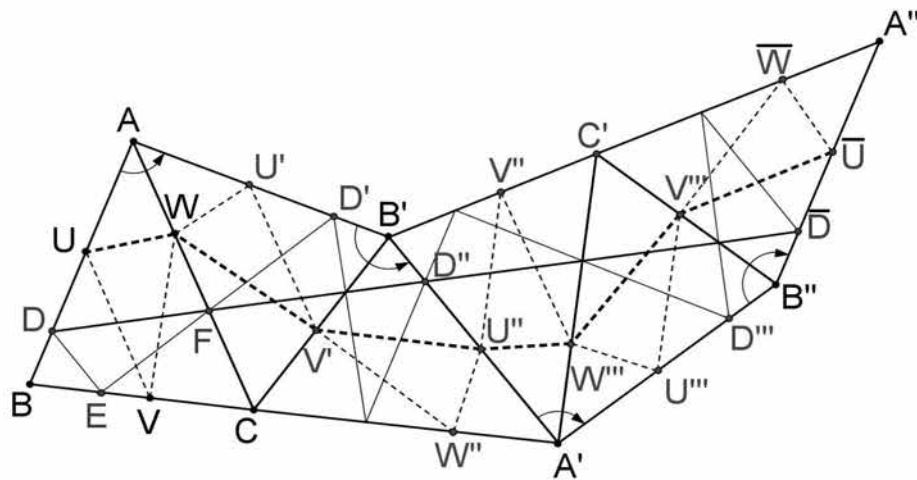


Figura 4.4: Resolução de Schwarz.

comprimento igual ao dobro do perímetro do triângulo inscrito $[UVW]$. Como $[D\bar{D}\bar{U}U]$ é um paralelogramo, temos que o comprimento do segmento de reta $[D\bar{D}]$ é menor do que o comprimento da linha poligonal aberta $(UWV'U''W'''V''''U)$. Com esta demonstração, Schwarz provou que, num triângulo acutângulo, existe um triângulo inscrito de perímetro mínimo, sendo este o triângulo órtico.

4.2.3 Solução com Base no Teorema de Heron

A solução do problema de Fagnano também pode ser encontrada com recurso ao teorema de Heron.

Segundo o teorema de Heron, dada uma reta r e dois pontos P e Q , não pertencentes a r e do mesmo semiplano em relação a r , e sendo R um ponto de r , então temos que o comprimento $\overline{PR} + \overline{QR}$ é mínimo quando $[PR]$ e $[RQ]$ fazem o mesmo ângulo com r (ver figura 4.5).

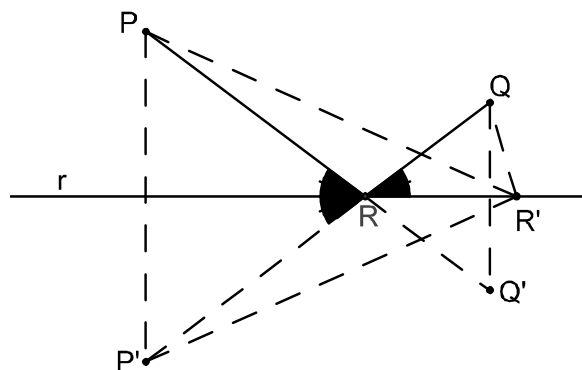


Figura 4.5: Teorema de Heron.

A demonstração do teorema baseia-se nas propriedades da reflexão em reta, em que, refletindo os pontos P ou Q em relação à reta r , obtemos o ponto R , pela interseção de r com a reta que passa por P ou Q e pela imagem de Q ou P , respetivamente (ver figura 4.5). Uma das demonstrações do teorema de Heron, bem como a resolução do problema de Fagnano que apresentamos a seguir, podem ser encontradas em [10] (pp. 330 e pp. 349, respetivamente).

Consideremos $[ABC]$ um triângulo acutângulo e um triângulo qualquer inscrito $[DEF]$ (ver figura 4.1).

Assumindo que o triângulo $[DEF]$ é a solução do problema de Fagnano, o ponto D pertence ao lado $[AB]$ em que $\overline{DE} + \overline{DF}$ tem valor mínimo. Pelo teorema de Heron, se o triângulo inscrito de perímetro mínimo existir, este deve verificar as condições do teorema 4.2.1. Assim, vamos provar que

$$\begin{aligned}\angle DEB &= \angle CEF = \angle BAC \\ \angle AFD &= \angle EFC = \angle CBA \\ \angle FDA &= \angle BDE = \angle ACB\end{aligned}\tag{4.5}$$

Vamos assumir, por exemplo, que $\angle FDA = \angle ACB + \delta$. Sabemos que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, na geometria euclidiana, é igual a 180° , ou seja,

$$\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ.\tag{4.6}$$

Considerando o triângulo $[ADF]$, temos que

$$\angle DAF + \angle FDA + \angle AFD = 180^\circ,\tag{4.7}$$

ou seja,

$$\angle BAC + \angle ACB + \delta + \angle AFD = 180^\circ,\tag{4.8}$$

de onde concluímos que

$$\delta + \angle AFD = \angle CBA.\tag{4.9}$$

Obtemos, portanto, $\angle AFD = \angle CBA - \delta$. Considerando o triângulo $[DBE]$, concluímos, de modo análogo, que $\angle DEB = \angle BAC - \delta$. Desta forma, a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[FEC]$ é igual a

$$\angle CBA - \delta + \angle BAC - \delta + \angle ACB,\tag{4.10}$$

podendo ser reescrita na forma

$$(\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB) - 2\delta\tag{4.11}$$

sendo igual à expressão

$$180^\circ - 2\delta.\tag{4.12}$$

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, na geometria euclidiana, é 180° , temos que $\delta = 0$, de onde concluímos que o triângulo inscrito pretendido verifica as igualdades (4.5). O triângulo órtico verifica as mesmas igualdades, como verificamos no teorema 4.2.1.

Constatamos que um outro triângulo inscrito que verifique as referidas igualdades tem de ter os seus lados paralelos aos do triângulo órtico. Considerando um ponto qualquer sobre um dos lados do triângulo e traçando, a partir dele, retas paralelas aos lados do triângulo órtico,

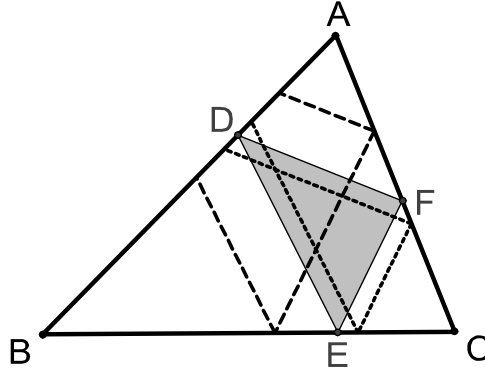


Figura 4.6: O triângulo órtico é o único que satisfaz as condições (4.5).

verificamos que não é possível obter um triângulo inscrito (ver figura 4.6). Assim, concluímos que o triângulo órtico é o único triângulo inscrito que verifica as condições (4.5).

Se um dos pontos D , E ou F for um dos vértices do triângulo $[ABC]$, não podemos aplicar o teorema de Heron pois, neste caso, o triângulo inscrito fica reduzido a duas alturas do triângulo.

Consideremos a proposição 4.2.1.

Proposição 4.2.1 *Num triângulo acutângulo, o perímetro do triângulo órtico é menor do que o dobro do comprimento de qualquer altura.*

Demonstração: Vamos seguir a demonstração apresentada em [10] (pp. 350).

Sejam $[ABC]$ um triângulo acutângulo e $[DEF]$ o respectivo triângulo órtico. Consideremos a reta suporte de cada um dos lados $[DF]$ e $[DE]$ (ver figura 4.7). Traçando por C uma reta perpendicular a DF , uma reta perpendicular a DE e outra perpendicular ao segmento de reta $[EF]$, determinamos os respectivos pontos de interseção L , M e N . Temos que

$$\overline{DL} + \overline{DM} < 2\overline{DC}, \quad (4.13)$$

pois $[DL]$ e $[DM]$ são projeções da altura $[DC]$ sobre as retas DF e DE , respectivamente. Por outro lado, verificamos que, relativamente aos triângulos $[EMC]$ e $[NEC]$, $\angle MEC = \angle CEN$, pela propriedade 4.2.2, e $\angle CME = \angle ENC = 90^\circ$. Assim, observamos que $\angle ECM = \angle NCE$, concluindo que os referidos triângulos são congruentes, por terem dois ângulos congruentes ($\angle ECM \cong \angle NCE$ e $\angle CEN \cong \angle MEC$) e o lado adjacente $[EC]$ em comum. Da mesma forma, concluímos que os triângulos $[FNC]$ e $[FCL]$ são congruentes. Assim, $\overline{FL} = \overline{FN}$ e $\overline{EM} = \overline{EN}$, pelo que podemos escrever

$$\begin{aligned} \overline{DL} + \overline{DM} &= \overline{DF} + \overline{FL} + \overline{DE} + \overline{EM} \\ &= \overline{DF} + \overline{FN} + \overline{DE} + \overline{EN} \\ &= \overline{DF} + \overline{DE} + (\overline{FN} + \overline{EN}) \\ &= \overline{DF} + \overline{DE} + \overline{EF} \\ &= p, \end{aligned} \quad (4.14)$$

sendo p o perímetro do triângulo órtico. Mas já verificamos que

$$\overline{DL} + \overline{DM} < 2\overline{DC}, \quad (4.15)$$

ou seja, o perímetro do triângulo órtico é menor do que o dobro do comprimento da altura $[DC]$. Considerando cada uma das restantes alturas, concluímos, de modo análogo, que o perímetro do triângulo órtico é menor do que o dobro do seu comprimento. ■

Sendo assim, está demonstrado que num triângulo acutângulo, o triângulo órtico é o triângulo inscrito que tem menor perímetro.

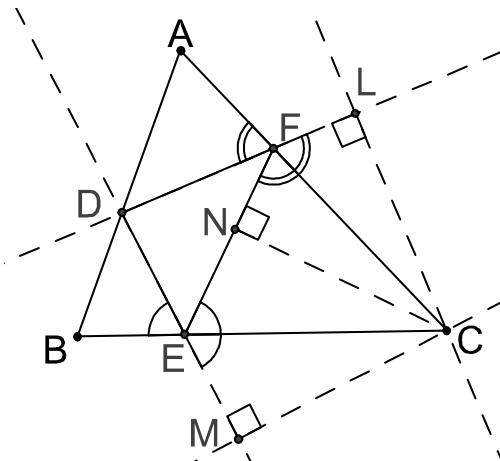


Figura 4.7: O perímetro do triângulo órtico é menor do que o dobro de qualquer altura.

4.2.4 Solução Através do Produto Escalar

Em [17], podemos encontrar uma resolução do problema de Fagnano com recurso ao produto escalar de dois vetores, a qual passamos a apresentar.

Consideremos $[ABC]$ um triângulo acutângulo, $[DEF]$ o respetivo triângulo órtico e X , Y e Z três pontos quaisquer pertencentes aos segmentos de reta $[BC]$, $[AC]$ e $[AB]$, respetivamente (figura 4.8).

Podemos escrever

$$\overline{YZ} + \overline{ZX} + \overline{XY} = \frac{\overline{YZ} \cdot \overline{FD}}{\overline{FD}} + \frac{\overline{ZX} \cdot \overline{DE}}{\overline{DE}} + \frac{\overline{XY} \cdot \overline{EF}}{\overline{EF}} \quad (4.16)$$

A partir da expressão (4.16) vamos trabalhar com vetores em vez de comprimentos de segmentos de reta. Como o produto escalar entre dois vetores é dado pelo produto entre as normas de cada um dos vetores e o valor do cosseno do ângulo formado pelos mesmos, podemos escrever

$$\frac{\overline{YZ} \cdot \overline{FD}}{\overline{FD}} + \frac{\overline{ZX} \cdot \overline{DE}}{\overline{DE}} + \frac{\overline{XY} \cdot \overline{EF}}{\overline{EF}} \geq \frac{\overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{FD}}{\overline{FD}} + \frac{\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{DE}}{\overline{DE}} + \frac{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{EF}}{\overline{EF}}. \quad (4.17)$$

Pela adição de vetores, podemos considerar que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{YZ} &= \overrightarrow{YF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DZ} \\ \overrightarrow{ZX} &= \overrightarrow{ZD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EX} \\ \overrightarrow{XY} &= \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FY}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

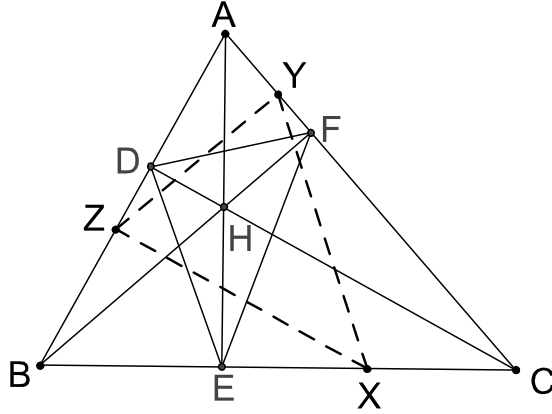


Figura 4.8: Solução através do produto escalar de vetores.

Logo

$$\frac{\overrightarrow{YZ} \cdot \overrightarrow{FD}}{\overline{FD}} + \frac{\overrightarrow{ZX} \cdot \overrightarrow{DE}}{\overline{DE}} + \frac{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{EF}}{\overline{EF}} = \quad (4.19)$$

$$= \frac{(\overrightarrow{YF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DZ}) \cdot \overrightarrow{FD}}{\overline{FD}} + \frac{(\overrightarrow{ZD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EX}) \cdot \overrightarrow{DE}}{\overline{DE}} + \frac{(\overrightarrow{XE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FY}) \cdot \overrightarrow{EF}}{\overline{EF}} \quad (4.20)$$

Desenvolvendo a expressão obtida de acordo com as propriedades do produto escalar, obtemos a expressão

$$\begin{aligned} & \overline{FD} + \overline{DE} + \overline{EF} + \overrightarrow{XE} \left(\frac{\overrightarrow{EF}}{\overline{EF}} + \frac{\overrightarrow{ED}}{\overline{ED}} \right) + \\ & + \overrightarrow{YF} \left(\frac{\overrightarrow{FD}}{\overline{FD}} + \frac{\overrightarrow{FE}}{\overline{FE}} \right) + \overrightarrow{ZD} \left(\frac{\overrightarrow{DE}}{\overline{DE}} + \frac{\overrightarrow{DF}}{\overline{DF}} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Pelo teorema 4.2.2, temos que o vetor $\frac{\overrightarrow{EF}}{\overline{EF}} + \frac{\overrightarrow{ED}}{\overline{ED}}$ tem a direção da reta EA , o vetor $\frac{\overrightarrow{FD}}{\overline{FD}} + \frac{\overrightarrow{FE}}{\overline{FE}}$ tem a direção da reta BF e o vetor $\frac{\overrightarrow{DE}}{\overline{DE}} + \frac{\overrightarrow{DF}}{\overline{DF}}$ tem a direção da reta CD . Consequentemente, cada um destes vetores é, respetivamente, perpendicular aos vetores \overrightarrow{XE} , \overrightarrow{YF} e \overrightarrow{ZD} , sendo o respetivo produto escalar igual a zero. Assim, a expressão (4.21) resume-se à expressão $\overline{FD} + \overline{DE} + \overline{EF}$.

A partir da igualdade (4.16) e da desigualdade (4.17), temos que

$$\overline{YZ} + \overline{ZX} + \overline{XY} \geq \overline{FD} + \overline{DE} + \overline{EF} \quad (4.22)$$

Se a expressão (4.22) for uma igualdade, verificamos que os vetores de cada um dos pares $\overrightarrow{YZ}, \overrightarrow{FD}$; $\overrightarrow{ZX}, \overrightarrow{DE}$ e $\overrightarrow{XY}, \overrightarrow{EF}$ são colineares. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \overrightarrow{YZ} &= \alpha \overrightarrow{FD} \\ \overrightarrow{ZX} &= \beta \overrightarrow{DE} , \\ \overrightarrow{XY} &= \gamma \overrightarrow{EF} \end{aligned} \quad (4.23)$$

com α , β e γ números positivos. Como

$$\overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} + \overrightarrow{XY} = \vec{0}, \quad (4.24)$$

temos que

$$\alpha\overrightarrow{FD} + \beta\overrightarrow{DE} + \gamma\overrightarrow{EF} = \vec{0} \quad (4.25)$$

e como

$$\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0} \quad (4.26)$$

concluimos que $\alpha = \beta = \gamma$. Podemos, então, escrever

$$\begin{aligned} \overrightarrow{YZ} &= \alpha\overrightarrow{FD} \\ \overrightarrow{ZX} &= \alpha\overrightarrow{DE} \\ \overrightarrow{XY} &= \alpha\overrightarrow{EF}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Isto implica que

$$\begin{aligned} \overline{YZ} &= \alpha\overline{FD} \\ \overline{ZX} &= \alpha\overline{DE}, \\ \overline{XY} &= \alpha\overline{EF} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ou seja,

$$\overline{YZ} + \overline{ZX} + \overline{XY} = \alpha(\overline{FD} + \overline{DE} + \overline{EF}) \quad (4.29)$$

Substituindo a igualdade (4.29) na desigualdade (4.22), temos a desigualdade

$$\alpha(\overline{FD} + \overline{DE} + \overline{EF}) \geq \overline{FD} + \overline{DE} + \overline{EF} \quad (4.30)$$

Verificamos que a expressão obtida é uma igualdade quando

$$\alpha = \beta = \gamma = 1. \quad (4.31)$$

Desta forma, temos que $\overline{YZ} = \overline{FD}$, $\overline{ZX} = \overline{DE}$, $\overline{XY} = \overline{EF}$, o que significa que os pontos X , Y e Z coincidem, respectivamente, com os pontos E , F e D .

Reciprocamente, se os pontos X , Y e Z coincidem, respectivamente, com os pontos E , F e D , a expressão (4.22) é uma igualdade. Assim, concluimos que o triângulo $[XYZ]$ tem perímetro mínimo quando os pontos X , Y e Z coincidem, respectivamente, com os pontos E , F e D , ou seja, com os pés das alturas do triângulo $[ABC]$.

4.2.5 Perímetro do Triângulo Órtico

Sendo o triângulo órtico a solução do problema de Fagnano, consideramos interessante explorar diferentes formas de se obter o valor do respectivo perímetro. Para além disso, cada uma delas pode constituir um exercício para alunos do ensino secundário, especialmente aquelas que recorrem à aplicação da trigonometria.

Caso 4.2.1 *Cálculo com Base nas Alturas e Ângulos do Triângulo Dado*

Consideremos $[ABC]$ um triângulo acutângulo qualquer onde $[DEF]$ é o respetivo triângulo órtico (ver figura 4.7).

Pelo teorema 4.2.1, temos que $\angle FDA = \angle BDE = \angle ACB$. Assim,

$$\angle CDF = \angle EDC = 90^\circ - \angle ACB. \quad (4.32)$$

Então,

$$\cos(\angle CDF) = \cos(\angle EDC) = \cos(90^\circ - \angle ACB) = \text{sen}(\angle ACB). \quad (4.33)$$

Mas

$$\cos(\angle CDF) = \frac{\overline{DL}}{\overline{DC}} \iff \overline{DL} = \overline{DC} \cos(\angle CDF) \quad (4.34)$$

ou seja

$$\overline{DL} = \overline{DC} \text{sen}(\angle ACB). \quad (4.35)$$

Por outro lado,

$$\cos(\angle EDC) = \frac{\overline{DM}}{\overline{DC}} \iff \overline{DM} = \overline{DC} \cos(\angle EDC) \quad (4.36)$$

ou seja

$$\overline{DM} = \overline{DC} \text{sen}(\angle ACB). \quad (4.37)$$

Mas, na secção 4.2.3, verificamos que $\overline{DM} + \overline{DL} = p$, onde p representa o perímetro do triângulo órtico. Sendo assim, obtemos a expressão

$$p = 2\overline{DC} \text{sen}(\angle ACB). \quad (4.38)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos as outras duas expressões do perímetro do triângulo órtico em função dos outros dois ângulos. Podemos obter o perímetro do triângulo órtico em função de qualquer um dos ângulos do triângulo inicial e da respetiva altura [10]:

$$\begin{aligned} p &= 2\overline{DC} \text{sen}(\angle ACB) \\ p &= 2\overline{AE} \text{sen}(\angle BAC) \\ p &= 2\overline{BF} \text{sen}(\angle CBA) \end{aligned} \quad (4.39)$$

Caso 4.2.2 *Cálculo com Base nos Ângulos e um Lado do Triângulo Dado*

Observando a figura 4.7, temos

$$\begin{aligned} \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} &= \text{sen}(\angle CBA) \iff \overline{DC} = \overline{BC} \text{sen}(\angle CBA) \\ \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}} &= \text{sen}(\angle ACB) \iff \overline{AE} = \overline{AC} \text{sen}(\angle ACB) \\ \frac{\overline{BF}}{\overline{BA}} &= \text{sen}(\angle BAC) \iff \overline{BF} = \overline{BA} \text{sen}(\angle BAC) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Substituindo estas expressões nas expressões (4.39), obtemos [10]:

$$\begin{aligned} p &= 2\overline{BC} \text{sen}(\angle CBA) \text{sen}(\angle ACB) \\ p &= 2\overline{AC} \text{sen}(\angle ACB) \text{sen}(\angle BAC) \\ p &= 2\overline{BA} \text{sen}(\angle BAC) \text{sen}(\angle CBA) \end{aligned} \quad (4.41)$$

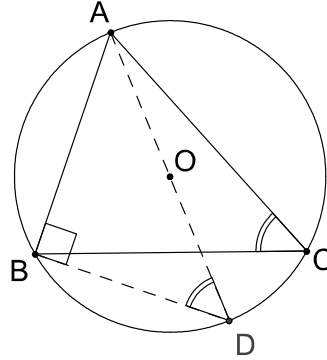


Figura 4.9: Circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$.

Caso 4.2.3 *Cálculo com Base nos Ângulos do Triângulo Dado e no Raio da Circunferência Circunscrita*

Consideremos $[ABC]$ um triângulo acutângulo qualquer, cuja circunferência circunscrita tem centro O e raio r_c , de acordo com a figura 4.9.

Observamos que $\angle ACB = \angle ADB$, porque $\angle ACB$ e $\angle ADB$ são ângulos inscritos no mesmo arco de circunferência. Mas,

$$\text{sen}(\angle ADB) = \frac{\overline{AB}}{2r_c} \iff \overline{AB} = 2r_c \text{sen}(\angle ADB), \quad (4.42)$$

ou seja, $\overline{AB} = 2r_c \text{sen}(\angle ACB)$. De forma análoga, obtemos

$$\overline{BC} = 2r_c \text{sen}(\angle BAC) \quad (4.43)$$

e

$$\overline{AC} = 2r_c \text{sen}(\angle CBA). \quad (4.44)$$

A substituição destas igualdades nas expressões (4.41) dão origem à expressão do perímetro do triângulo órtico em função dos ângulos do triângulo inicial e do raio da respectiva circunferência circunscrita [10]:

$$p = 4r_c \text{sen}(\angle BAC) \text{sen}(\angle CBA) \text{sen}(\angle ACB) \quad (4.45)$$

Caso 4.2.4 *Cálculo com Base na Área do Triângulo Inicial e no Raio da Circunferência Circunscrita*

Dado um triângulo acutângulo $[ABC]$, consideremos $[DEF]$ o respectivo triângulo órtico. O perímetro do triângulo órtico $[DEF]$ é igual ao quociente entre o dobro da área do triângulo $[ABC]$ e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$, ou seja,

$$p = \frac{2A_{[ABC]}}{r_c} \quad (4.46)$$

onde r_c representa o raio da circunferência circunscrita ao triângulo dado.

Em [15] (pp. 13), podemos encontrar uma demonstração desta relação com base noutras propriedades do triângulo órtico.

Caso 4.2.5 Cálculo com Base no Semiperímetro do Triângulo Inicial e Respetivos Lados

Consideremos um triângulo acutângulo $[ABC]$ e a respetiva circunferência circunscrita de raio r_c , com

$$r_c = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}{4A_{[ABC]}} \quad (4.47)$$

Substituindo, na expressão (4.46), r_c pela expressão (4.47) obtemos a expressão

$$p = \frac{8A_{[ABC]}^2}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}}. \quad (4.48)$$

Pela fórmula de Heron, $A_{[ABC]} = \sqrt{s(s - \overline{AB})(s - \overline{BC})(s - \overline{AC})}$, onde s representa o semiperímetro do triângulo $[ABC]$. Atendendo que

$$s(s - \overline{AB})(s - \overline{BC})(s - \overline{AC}) > 0, \quad (4.49)$$

o perímetro do triângulo órtico pode ser obtido através da expressão

$$\frac{8s(s - \overline{AB})(s - \overline{BC})(s - \overline{AC})}{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AC}} \quad (4.50)$$

A utilização de cada uma das expressões apresentadas para o cálculo do perímetro do triângulo órtico depende dos dados que se conhecem relativamente ao triângulo acutângulo dado. Conhecendo os comprimentos dos lados deste triângulo, a forma mais prática de se obter o perímetro do triângulo órtico será através da expressão (4.50). Por outro lado, se apenas for dado o comprimento de só um dos lados do triângulo inicial e a amplitude dos ângulos a ele adjacentes, é muito mais eficaz utilizar uma das igualdades (4.41). É claro que a utilização das expressões (4.45) e (4.46) só é vantajosa se o raio da circunferência circunscrita ao triângulo dado for conhecido. O recurso às igualdades (4.39) não parece muito vantajoso, uma vez que cada uma delas relaciona a amplitude de um ângulo com a altura referente ao lado oposto a esse mesmo ângulo.

Veamos alguns exemplos, de acordo com a figura 4.8. Se forem conhecidos apenas o comprimento \overline{AB} e o valor de $\angle BAC$, é possível determinar o valor de \overline{AE} se for conhecido o valor de $\angle BAE$. Mas, neste caso, conseguiríamos determinar o valor de $\angle ABE$ e seria muito mais prático obter o valor do perímetro do triângulo órtico através de uma das igualdades (4.41) em vez de recorrer ao valor de \overline{AE} .

No caso de se ter o comprimento \overline{AB} e se conhecer $\angle CBA$, é possível determinar o valor de \overline{AE} e o valor de $\angle BAE$. Contudo, para calcular o valor de $\angle BAC$, é necessário conhecer o valor de $\angle EAC$ ou o valor de $\angle BCA$ e, conhecidos estes valores, é mais prático recorrer às igualdades (4.41). Concluimos, portanto, que a utilização das expressões (4.39) apenas é vantajosa quando forem conhecidos um ângulo do triângulo inicial e a altura referente ao lado oposto a esse mesmo ângulo.

4.2.6 Uma Aplicação no Ensino Secundário

Dos três problemas estudados neste trabalho, o problema de Fagnano é o que melhor se enquadra nos currículos de Matemática dos ensinos básico e secundário. O mesmo pode ser adaptado de forma a ser trabalhado por alunos de ambos os níveis de ensino. No ensino

básico, a utilização de um software de geometria pode proporcionar a descoberta da solução do problema por experimentação. No ensino secundário, já é possível ir mais além. Sendo esse um problema de otimização, a sua resolução permite relacionar a geometria com as funções.

A título de exemplo, apresentamos uma sugestão de aplicação do problema que pode ser trabalhada no décimo primeiro ano do ensino secundário.

Consideremos a figura 4.10, onde temos o triângulo acutângulo escaleno $[ABC]$ e o triângulo $[DEF]$ nele inscrito. Consideremos os pontos F' e F'' simétricos do ponto $F(x, y)$, móvel sobre o segmento de reta $[AC]$, em relação às retas AB e BC , respetivamente.

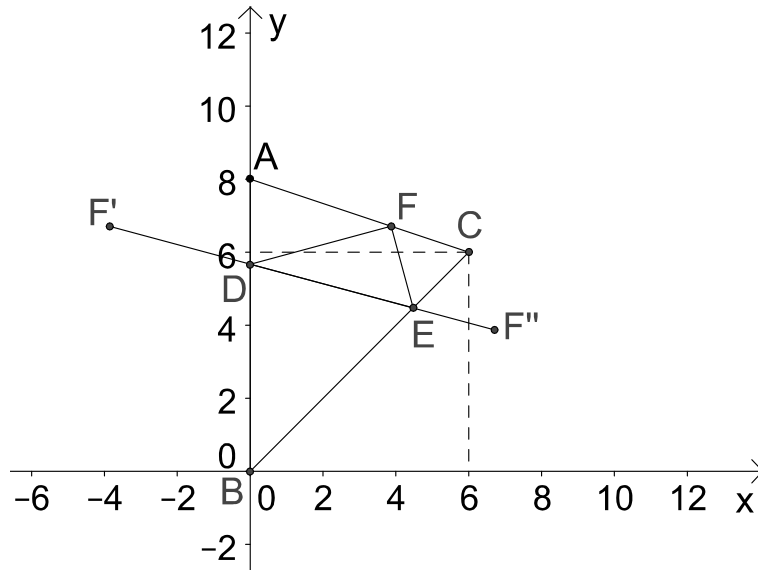


Figura 4.10: Exemplo de uma aplicação no ensino secundário.

A partir das condições da figura 4.10, os alunos poderão determinar as coordenadas do ponto F de modo que o perímetro do triângulo $[DEF]$ seja mínimo.

De acordo com as propriedades da reflexão em reta, estudadas desde o ensino básico, e atendendo aos conteúdos de geometria analítica estudados no décimo ano, os alunos do décimo primeiro ano são capazes de determinar a equação reduzida de cada uma das retas AC e BC , as coordenadas dos pontos simétricos F' e F'' e determinar o comprimento do segmento de reta $[F'F'']$. Desta forma, o perímetro do triângulo $[DEF]$, em função das coordenadas do ponto F , é dado pela expressão

$$P = \sqrt{2x^2 + 2y^2} \quad (4.51)$$

Como

$$y = -\frac{1}{3}x + 8, \quad (4.52)$$

substituindo a expressão (4.52) na expressão (4.51), ficamos com a expressão do perímetro do triângulo $[DEF]$ apenas em função de x :

$$P = \sqrt{\frac{20}{9}x^2 - \frac{32}{3}x + 128}. \quad (4.53)$$

Através do estudo do sinal da derivada da expressão obtida, podemos determinar as coordenadas do ponto F para as quais o perímetro do triângulo $[DEF]$ é mínimo. Dada a natureza

da expressão obtida, o aluno pode recorrer, por exemplo, à calculadora gráfica para efetuar o estudo do sinal da derivada, indo de encontro às indicações metodológicas do programa de Matemática A.

A partir das coordenadas do ponto F , os alunos podem verificar que o triângulo $[DEF]$ é o triângulo órtico. Para tal, poderão recorrer, por exemplo, à comparação de declives de retas.

Recorrendo à resolução de sistemas, é possível verificar que o incentro do triângulo órtico coincide com o ortocentro do triângulo dado.

Com recurso à geometria analítica ou à trigonometria, pode-se comprovar que as bissetrizes do triângulo $[DEF]$ coincidem com as alturas do triângulo $[ABC]$.

Outra possibilidade de aplicação consiste na comparação de áreas dos dois triângulos, aplicando, por exemplo, a distância do ponto a uma reta.

Com o exemplo apresentado, julgamos ter mostrado as potencialidades que o problema de Fagnano pode ter no ensino secundário.

Capítulo 5

Problema de Malfatti

5.1 Origem e Evolução do Problema

Gianfrancesco Malfatti foi um brilhante matemático italiano que nasceu em 1731 numa pequena localidade perto de Trento, nos Alpes Italianos, e morreu em Ferrara em 1807. Estudou na escola jesuíta de Verona e na Universidade de Bolonha [2].

Foi um intelectual ativo e dedicado à promoção de novas ideias, deixando um importante contributo em diferentes áreas da Matemática como Álgebra, Análise, Geometria e Teoria das Probabilidades. Além disso, destaca-se, ainda, o desempenho importante que teve na criação da *Nuova Enciclopedia Italiana* (1779) e o facto de ter sido um dos fundadores do departamento de Matemática da Universidade de Ferrara [2].

O nome de Malfatti está associado a um problema que foi por ele descrito e discutido em 1803, com o seguinte enunciado:

Problema 5.1.1 *Dado um prisma triangular reto de qualquer material como, por exemplo, mármore, escavar nesse prisma três cilindros, com a mesma altura do prisma, com o máximo volume total possível, ou seja, deixando a menor quantidade possível de material do prisma.*

Malfatti observou que o problema podia ser equivalente ao problema da geometria plana com a seguinte formulação:

Problema 5.1.2 *Dado um triângulo, encontrar, no seu interior, três círculos, não sobrepostos, de área total máxima.*

Este problema ficou conhecido, na literatura, como o problema de mármore de Malfatti [2] [22].

Malfatti assumiu que, dado um triângulo, a solução dos dois problemas apresentados consistia em inscrever no triângulo três círculos de modo que cada um fosse tangente aos outros dois e, simultaneamente, tangente a dois lados do triângulo [2] [22]. Como consequência desse resultado, atualmente, o designado problema de Malfatti tem o seguinte enunciado [22]:

Problema 5.1.3 *Inscrever, num triângulo dado, três círculos, de modo que cada um seja tangente, externamente, com os outros dois e tangente a dois lados do triângulo.*

Estes círculos foram designados *círculos de Malfatti*.

Por mais de um século, a solução de Malfatti foi considerada correta. Contudo, em 1930, com H. Lob e Herbert W. Richmond, surge a primeira evidência, através do seu estudo num triângulo equilátero, de que a solução de Malfatti não é correta. Nesse caso, na configuração proposta por Malfatti (ver figura 5.1), a fração da área do triângulo ocupada pelos círculos é igual a

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2} \approx 0,729. \quad (5.1)$$

No entanto, conseguimos arranjar três círculos cuja área total ocupe a fração

$$\frac{11\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,739, \quad (5.2)$$

utilizando o círculo inscrito no triângulo e outros dois tangentes a ele e a dois lados do triângulo (ver figura 5.2) [1] [20] [22].

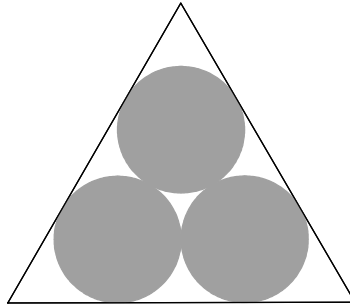


Figura 5.1: Configuração de Malfatti num triângulo equilátero.

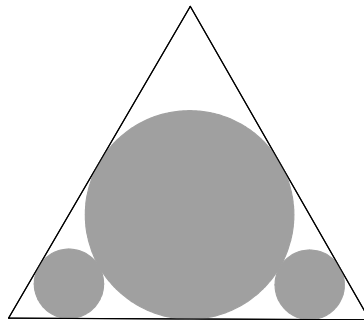


Figura 5.2: Melhor solução num triângulo equilátero.

Em 1965, Howard Eves (1911-2004) observou que num triângulo longo e fino a solução de Malfatti não é a correta, facto que constatamos por pura observação de um exemplo, sem ser necessário recorrer a cálculos (ver figuras 5.3 e 5.4) [1].

Em 1967, Michael Goldberg demonstrou que a solução dada por Malfatti para o problema por ele levantado nunca está certa, independentemente do triângulo que se considere. A

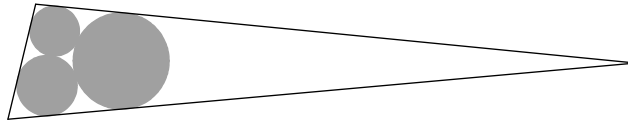


Figura 5.3: Solução proposta por Malfatti.

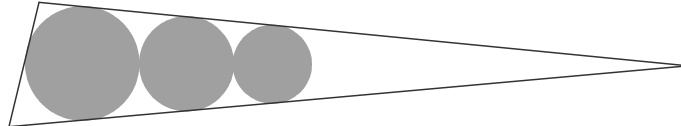


Figura 5.4: Melhor solução.

solução correta contempla sempre o círculo inscrito no triângulo, em que os três círculos formam uma das configurações apresentadas nas figuras 5.5 e 5.6 [1].

O estudo das condições analíticas da solução do problema foi apresentado em 1994 por Zalgaller e Los [22].

A solução para o problema de mármore é de fácil construção, ao contrário da construção para a suposta solução apresentada por Malfatti. Assim, atualmente, o problema de Malfatti consiste em determinar os três círculos de Malfatti, cada um deles tangente aos outros dois círculos e tangente a dois lados de um dado triângulo.

Malfatti encontrou uma solução analítico-geométrica para o problema, determinando os raios dos círculos pretendidos. Este foi o ponto de partida para a exploração do problema [20].

Em 1826, Jacob Steiner, professor da Universidade de Berlim e grande geômetra, publicou uma solução geométrica simples, mas sem demonstração, o que contribuiu para aumentar o interesse pelo problema. Para além da solução apresentada, Steiner estendeu o problema para o caso de circunferências [2] [20], obtendo o seguinte problema:

Problema 5.1.4 *Dadas três circunferências quaisquer, determinar três círculos, cada um tangente com os outros dois e tangente com duas das três circunferências dadas.*

Existem evidências de que o problema da construção dos círculos de Malfatti já tenha sido considerado anteriormente. Acreditamos que Jacob Bernoulli (1654-1705) colocou o problema para triângulos isósceles, um século antes de Malfatti. [2].

O problema de Malfatti encerra vários processos de resolução bem como adaptações, estudadas por diferentes autores.

5.2 Malfatti e a Geometria Euclidiana

5.2.1 Resolução Analítica

Como já foi referido, existem várias resoluções para o problema de Malfatti. Recorrendo à resolução apresentada em [22] (pp. 94), começamos por explorar uma solução analítica.

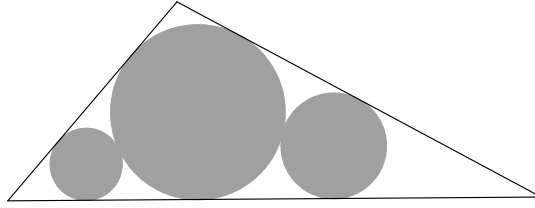


Figura 5.5: Solução do problema proposto por Malfatti.

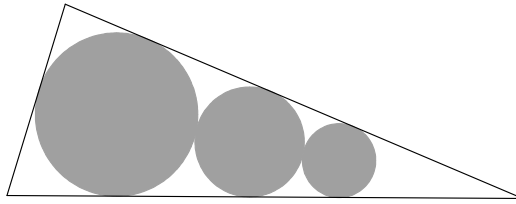


Figura 5.6: A solução do problema proposto por Malfatti contempla o círculo inscrito no triângulo dado.

A mesma assenta no facto de duas retas concorrentes num ponto exterior a um círculo e tangentes ao círculo definirem dois segmentos de reta congruentes (cada segmento de reta tendo como extremos o ponto de interseção das duas retas e um dos pontos de tangência), bem como no facto de toda a reta tangente a um círculo ser perpendicular ao raio que contém o ponto de tangência.

Consideremos o problema resolvido num triângulo $[ABC]$, onde D , E e F são os centros dos círculos de Malfatti de raio r_1 , r_2 e r_3 respetivamente, de acordo com a figura 5.7. Os pontos M , K e L são os pontos de tangência entre os lados do triângulo $[ABC]$ e a circunferência, de centro I e raio r , inscrita no mesmo triângulo. Seja $t = \overline{AK} = \overline{AM}$, $u = \overline{BK} = \overline{BL}$ e $v = \overline{CL} = \overline{CM}$. Sejam a , b e c os comprimentos dos segmentos de reta definidos por cada um dos vértices do triângulo $[ABC]$ e pelos pontos de tangência dos círculos de Malfatti adjacentes. Assim, $\overline{AP} = a$, $\overline{BQ} = b$ e $\overline{CR} = c$.

Considerando o triângulo retângulo $[DGE]$, temos, pelo teorema de Pitágoras, que

$$\overline{PQ} = \overline{GE} = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_1 r_2}. \quad (5.3)$$

Então podemos escrever

$$\overline{AB} = a + 2\sqrt{r_1 r_2} + b \quad (5.4)$$

Mas os triângulos $[APD]$ e $[AKI]$ são semelhantes e, portanto,

$$\frac{r_1}{r} = \frac{a}{t} \quad (5.5)$$

que é equivalente a

$$r_1 = r \frac{a}{t}. \quad (5.6)$$

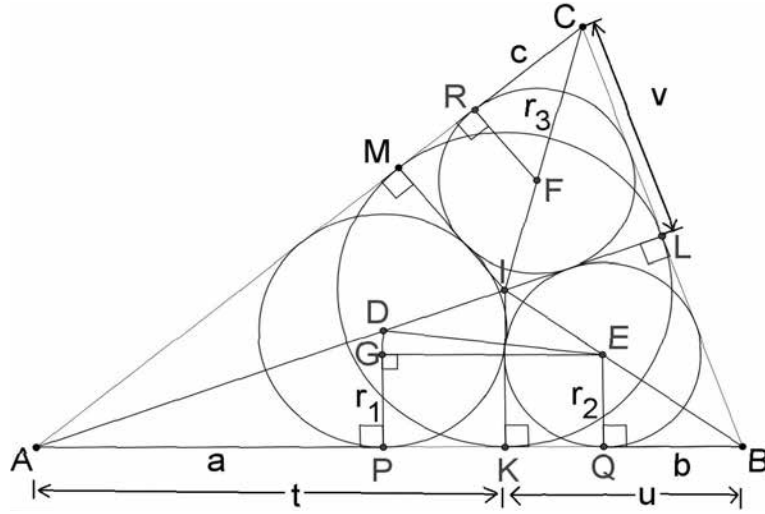


Figura 5.7: Solução do problema de Malfatti.

Seguindo o mesmo raciocínio para os triângulos $[EQB]$ e $[IKB]$, temos

$$\frac{r_2}{r} = \frac{b}{u} \iff r_2 = r \frac{b}{u}. \quad (5.7)$$

Sendo assim, temos

$$r_1 r_2 = r^2 \frac{ab}{tu} \quad (5.8)$$

Então, como $r > 0$, podemos escrever a igualdade (5.4) como

$$\overline{AB} = a + 2r\sqrt{\frac{ab}{tu}} + b. \quad (5.9)$$

Mas também se observa que $\overline{AB} = t + u$. Logo, podemos escrever a equação

$$t + u = a + 2r\sqrt{\frac{ab}{tu}} + b \quad (5.10)$$

Com raciocínio análogo para os restantes lados do triângulo $[ABC]$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} t + u = a + 2r\sqrt{\frac{ab}{tu}} + b \\ u + v = b + 2r\sqrt{\frac{bc}{uv}} + c \\ t + v = a + 2r\sqrt{\frac{ac}{tv}} + c \end{cases} \quad (5.11)$$

No sistema (5.11) os valores de r , t , u e v são conhecidos, através da circunferência inscrita no triângulo $[ABC]$. As incógnitas são a , b e c , cujo valor permite resolver o problema. O sistema foi resolvido por Malfatti, sendo a sua solução

$$\begin{cases} 2a = s - r + \overline{IA} - \overline{IB} - \overline{IC} \\ 2b = s - r - \overline{IA} + \overline{IB} - \overline{IC} \\ 2c = s - r - \overline{IA} - \overline{IB} + \overline{IC} \end{cases} \quad (5.12)$$

onde s é o semiperímetro do triângulo $[ABC]$.

A partir das equações obtidas podemos, ainda, deduzir os valores dos raios dos círculos de Malfatti [31]. Da igualdade (5.5), temos que

$$a = \frac{r_1 t}{r}. \quad (5.13)$$

Considerando esta igualdade na primeira equação do sistema (5.12), temos

$$r_1 = \frac{r}{2t}(s - r + \overline{IA} - \overline{IB} - \overline{IC}). \quad (5.14)$$

Como o perímetro do triângulo $[ABC]$ pode ser representado pela expressão

$$P = 2t + 2u + 2v, \quad (5.15)$$

temos que $t = s - \overline{BC}$. Assim, da primeira equação do sistema (5.12) obtemos a equação

$$r_1 = \frac{r}{2(s - \overline{BC})}(s - r + \overline{IA} - \overline{IB} - \overline{IC}). \quad (5.16)$$

De modo análogo são obtidas as outras duas equações para determinar os valores de r_2 e r_3 :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{r}{2(s - \overline{BC})}(s - r + \overline{IA} - \overline{IB} - \overline{IC}) \\ r_2 = \frac{r}{2(s - \overline{AC})}(s - r - \overline{IA} + \overline{IB} - \overline{IC}) \\ r_3 = \frac{r}{2(s - \overline{AB})}(s - r - \overline{IA} - \overline{IB} + \overline{IC}) \end{cases}. \quad (5.17)$$

Segundo se refere em [31], estes resultados foram obtidos por Malfatti.

Conhecidos os raios dos círculos de Malfatti, facilmente se determinam os respectivos centros através da sua distância ao vértice correspondente do triângulo dado, uma vez que pertencem a cada uma das bissetrizes dos ângulos internos desse triângulo.

Atendendo à semelhança entre os triângulos $[APD]$ e $[AKI]$ (figura 5.7), determinamos a distância do ponto D ao vértice A em função de r_1 [9]. Temos,

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\overline{IA}}{\overline{AD}} \iff \overline{AD} = \frac{\overline{IA}.r_1}{r}. \quad (5.18)$$

Considerando a semelhança entre os triângulos $[EQB]$ e $[IKB]$ e os triângulos $[CRF]$ e $[CMI]$, determinamos \overline{BE} e \overline{CF} , respetivamente, em função de r_2 e r_3 . Temos então

$$\overline{BE} = \frac{\overline{IB}.r_2}{r} \quad (5.19)$$

e

$$\overline{CF} = \frac{\overline{IC}.r_3}{r} \quad (5.20)$$

5.2.2 Resolução Geométrica

O problema de Malfatti também pode ser resolvido apenas com recurso a régua e compasso. Passamos a apresentar as soluções de Schellbach e de Steiner.

Solução de Schellbach

Em [12] (pp. 148), encontramos uma resolução geométrica do problema de Malfatti, atribuída a Schellbach, que passamos a mostrar.

Tendo em conta a figura 5.7, o sistema (5.11) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \overline{AB} = a + 2\sqrt{\frac{r^2}{tu}}\sqrt{ab} + b \\ \overline{BC} = b + 2\sqrt{\frac{r^2}{uv}}\sqrt{bc} + c \\ \overline{AC} = a + 2\sqrt{\frac{r^2}{tv}}\sqrt{ac} + c \end{cases} \quad (5.21)$$

Sabemos que $r = \frac{A_{[ABC]}}{s}$, onde $s = t + u + v$ é o semiperímetro do triângulo $[ABC]$. Aplicando a fórmula de Heron, podemos escrever

$$r^2 = \frac{s(s - (u + v))(s - (t + v))(s - (t + u))}{s^2}, \quad (5.22)$$

ou seja,

$$r^2 = \frac{tuv}{s}. \quad (5.23)$$

Atendendo à igualdade (5.23) e considerando como unidade de comprimento o semiperímetro, obtemos o sistema (5.21) escrito de forma mais simples:

$$\begin{cases} \overline{AB} = a + 2\sqrt{v}\sqrt{ab} + b \\ \overline{BC} = b + 2\sqrt{t}\sqrt{bc} + c \\ \overline{AC} = a + 2\sqrt{u}\sqrt{ac} + c \end{cases} \quad (5.24)$$

Consideremos, agora, seis ângulos agudos α , β , γ , δ , θ e λ de tal forma que

$$\begin{aligned} \text{sen}^2(\alpha) = \overline{AB}, \quad \text{sen}^2(\beta) = \overline{BC}, \quad \text{sen}^2(\gamma) = \overline{AC}, \\ \text{sen}^2(\delta) = a, \quad \text{sen}^2(\theta) = b, \quad \text{sen}^2(\lambda) = c. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Sendo $s = t + u + v = 1$, temos que

$$\begin{aligned} v + \overline{AB} = 1 &\iff v = 1 - \overline{AB} \\ t + \overline{BC} = 1 &\iff t = 1 - \overline{BC} \\ u + \overline{AC} = 1 &\iff u = 1 - \overline{AC} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Aplicando as igualdades 5.25, obtemos

$$\begin{aligned} v = 1 - \text{sen}^2(\alpha) &= \cos^2(\alpha) \\ t = 1 - \text{sen}^2(\beta) &= \cos^2(\beta) \\ u = 1 - \text{sen}^2(\gamma) &= \cos^2(\gamma) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Assim, o sistema (5.24) equivale a:

$$\begin{cases} \text{sen}^2(\alpha) = \text{sen}^2(\delta) + 2\cos(\alpha).\text{sen}(\delta).\text{sen}(\theta) + \text{sen}^2(\theta) \\ \text{sen}^2(\beta) = \text{sen}^2(\theta) + 2\cos(\beta).\text{sen}(\theta).\text{sen}(\lambda) + \text{sen}^2(\lambda) \\ \text{sen}^2(\gamma) = \text{sen}^2(\delta) + 2\cos(\gamma).\text{sen}(\delta).\text{sen}(\lambda) + \text{sen}^2(\lambda) \end{cases} \quad (5.28)$$

Sabemos que, se $\varepsilon = \psi + \varphi$, temos

$$\text{sen}^2(\psi + \varphi) = \text{sen}^2(\psi) + 2\text{sen}(\psi).\text{sen}(\varphi).\cos(\varepsilon) + \text{sen}^2(\varphi). \quad (5.29)$$

De acordo com a igualdade (5.29), as equações do sistema (5.28) equivalem a termos

$$\alpha = \delta + \theta, \beta = \lambda + \theta \text{ e } \gamma = \delta + \lambda. \quad (5.30)$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} \alpha = \delta + \theta \\ \beta = \lambda + \theta \\ \gamma = \delta + \lambda \end{cases}$, considerando como incógnitas δ , θ e λ , obtemos a solução

$$\begin{cases} \delta = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \\ \theta = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \\ \lambda = \frac{-\alpha + \gamma + \beta}{2} \end{cases}. \quad (5.31)$$

Se considerarmos

$$\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}, \quad (5.32)$$

obtemos a solução na forma simplificada,

$$\begin{cases} \delta = \sigma - \beta \\ \theta = \sigma - \gamma \\ \lambda = \sigma - \alpha \end{cases}. \quad (5.33)$$

A partir daqui, obtemos uma construção que permite resolver geometricamente o problema Malfatti, para a qual passamos a apresentar o respetivo roteiro [12] (pp. 150).

Roteiro de construção da solução de Schellbach Dado um triângulo $[ABC]$, para determinar os círculos de Malfatti, seguimos os passos de 1 a 3.

1. Traçar três ângulos α , β e γ cujos quadrados dos respetivos senos são iguais aos lados do triângulo dado, considerando como unidade de comprimento o semiperímetro do triângulo.

Para determinar o ângulo α , dado o segmento de reta de comprimento \overline{AB} fazemos (figura 5.8):

1.1. Determinar o ponto K , pertencente à semirreta \dot{AB} , de tal forma que $\overline{AK} = s$, onde s representa o semiperímetro do triângulo $[ABC]$.

1.2. Traçar uma semicircunferência Φ de diâmetro $[AK]$, com $\overline{AK} = s$, pois consideramos s como a unidade de comprimento.

1.3. A partir de B , traçar a perpendicular relativamente a $[AK]$, cuja interseção com a semicircunferência Φ define o ponto L . Desta forma, $\angle AKL = \alpha$.

Seguindo o mesmo procedimento para os lados $[BC]$ e $[AC]$, determinamos os ângulos β e γ .

2. Determinar $\sigma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ e os novos três ângulos $\delta = \sigma - \beta$, $\theta = \sigma - \gamma$ e $\lambda = \sigma - \alpha$.

3. Traçar os quadrados dos senos dos três ângulos δ , θ e λ . Os segmentos de reta obtidos são, respetivamente, $[AP]$, $[BQ]$ e $[CR]$ (ver figura 5.7).

Para traçar o quadrado do seno do ângulo δ temos o seguinte procedimento:

3.1. Traçar o ângulo δ , com vértice no ponto K , com lado origem coincidente com \dot{AB} .

3.2. Determinar o ponto M , ponto de interseção do lado móvel do ângulo δ com a semicircunferência Φ .

3.3. A partir do ponto M , traçar a perpendicular em relação a $[AK]$, cuja interseção com $[AK]$ define o ponto P e cuja interseção com a bissetriz de $\angle BAC$ define o ponto D (ver figura 5.7). Assim, $\text{sen}^2(\delta) = \overline{AP}$.

de Malfatti, isto é, são o lugar geométrico dos pontos de onde podemos traçar, relativamente às circunferências, tangentes iguais.

Sendo HJ o eixo radical das circunferências correspondentes a c_B e c_C , temos

$$\overline{OH} = \overline{HP}. \quad (5.34)$$

Assim,

$$\overline{FH} - \overline{HD} = \overline{FO} - \overline{DP}. \quad (5.35)$$

Mas

$$\overline{FO} = \overline{FM} \text{ e } \overline{DP} = \overline{DL}, \quad (5.36)$$

pois os segmentos de reta são tangentes relativas aos círculos c_B e c_C , respetivamente, com origem num ponto exterior aos mesmos e, portanto,

$$\overline{FO} - \overline{DP} = \overline{FM} - \overline{DL}. \quad (5.37)$$

Da mesma forma temos $\overline{KM} = \overline{KL}$, pelo que concluímos que

$$\overline{FM} - \overline{DL} = \overline{FK} - \overline{DK}. \quad (5.38)$$

Então,

$$\overline{FH} - \overline{HD} = \overline{FK} - \overline{DK}, \quad (5.39)$$

pelo que concluímos que o ponto H é o ponto de interseção de $[BC]$ com o círculo inscrito no triângulo $[DFK]$ (o círculo c_H). Da mesma forma concluímos que E é o ponto de interseção do círculo inscrito que intersesta $[JK]$, $[KF]$ e $[AC]$ com $[AC]$ (o círculo c_E) e G é o ponto de interseção do círculo inscrito que intersesta $[JK]$, $[KD]$ e $[AB]$ com $[AB]$ (o círculo c_G).

Consideremos Q o ponto de interseção de $[DE]$ com o círculo inscrito c_H e S o ponto de interseção de $[HJ]$ com o círculo inscrito c_E .

Temos que $\overline{DP} = \overline{DL}$ e $\overline{DQ} = \overline{DH}$ de onde concluímos que $\overline{HP} = \overline{QL}$. Mas

$$\overline{HP} = \overline{HN}, \quad (5.40)$$

logo

$$\overline{HN} = \overline{HP} = \overline{QL} \quad (5.41)$$

Do mesmo modo temos

$$\overline{NS} = \overline{ER} = \overline{EL} \quad (5.42)$$

Das igualdades (5.41) e (5.42) temos que $\overline{HS} = \overline{EQ}$, de onde concluímos que as cordas dos círculos c_H e c_E que têm como suporte o segmento de reta $[HE]$ são congruentes.

Na sua demonstração, Hart recorre aos lemas 5.2.1 e 5.2.2.

Lema 5.2.1 *Se dois círculos definem, numa reta, dois segmentos de reta $[AB]$ e $[CD]$ congruentes, e se as retas tangentes nos pontos extremos A e D se intersestam num ponto P , os círculos formam ângulos iguais em P .*

Demonstração: Em [19] (pp. 220) Hart apresenta uma demonstração. ■

Lema 5.2.2 *Se a soma ou diferença de duas tangentes AB e AC traçadas de um ponto A relativamente a dois círculos é igual a uma tangente comum DE aos dois círculos, o ponto A pertence a uma reta tangente comum.*

Demonstração: Hart apresenta uma demonstração em [19]. ■

Pelo lema 5.2.1, podemos afirmar que os círculos c_H e c_E formam ângulos iguais em C . Por outro lado, as retas QL , NS e KF são retas tangentes comuns aos círculos c_H e c_C , c_E e c_C e c_H e c_E , respectivamente, e concorrentes no ponto K .

Mas

$$\begin{aligned} \overline{CH} - \overline{CR} &= \overline{HP} \stackrel{(5.41)}{=} \overline{QL} \\ &\text{e} \\ \overline{CE} - \overline{CP} &= \overline{ER} \stackrel{(5.42)}{=} \overline{NS} \end{aligned} \tag{5.43}$$

Pelo lema 5.2.2 temos que o ponto C pertence a uma reta tangente comum aos círculos c_E e c_C e c_H e c_C . Como as retas QL , NS e KF são concorrentes no ponto K , o ponto C tem de pertencer à outra reta tangente comum aos círculos c_H e c_E , ou seja, pertence à bissetriz de $\angle ACB$.

Da mesma forma se prova que a reta que contém a bissetriz de $\angle BAC$ é tangente comum a c_E e c_G e que a reta que contém a bissetriz de $\angle CBA$ é tangente comum aos círculos c_G e c_H . Assim, provamos que a construção feita por Steiner é válida para a resolução do problema de Malfatti.

Em [20] (pp. 3), podemos encontrar um roteiro da construção geométrica apresentada por Steiner para resolver o problema de Malfatti, a qual foi publicada sem demonstração, como já foi referido na primeira secção deste capítulo.

Roteiro de construção da solução de Steiner Consideremos um dado triângulo $[ABC]$. A construção de Steiner segue os passos de 1 a 6 (figura 5.9):

1. Traçar as três bissetrizes dos ângulos internos, sendo I o respetivo ponto de interseção.
2. Em cada um dos triângulos $[IAB]$, $[IBC]$ e $[ICA]$ traçar as respetivas circunferências inscritas.
3. Para cada par de circunferências inscritas, traçar a reta tangente comum interna, diferente da que contém a bissetriz.
4. Determinar o ponto de interseção das três retas tangentes traçadas, o ponto K .
5. Determinar os pontos de interseção das três retas tangentes com os lados do triângulo dado, os pontos H , J , D , E e F , G .
6. Traçar um círculo inscrito em cada um dos quadriláteros $[KHCE]$, $[KGBH]$ e $[KEAG]$. Os círculos inscritos são a solução do problema de Malfatti.

Comparação das Soluções

Atendendo às duas soluções geométricas apresentadas, de Schellbach e de Steiner, é bastante evidente a diferença existente entre elas em termos de roteiro de construção.

Na construção de Steiner, é necessário considerarmos os triângulos definidos por dois vértices do triângulo dado e pelo respetivo incentro onde, em cada um desses triângulos, inscrevemos a respetiva circunferência. As tangentes internas comuns a cada par dessas circunferências são concorrentes e definem seis pontos de interseção com os lados do triângulo inicial. Dois desses pontos, o centro radical e um vértice do triângulo definem um dos três quadriláteros no qual inscrevemos um círculo, correspondente à solução do problema.

Como as tangentes internas obtidas são distintas das bissetrizes do triângulo inicial, os círculos de Malfatti deixam de ser visíveis quando há coincidência entre as tangentes e as bissetrizes. Apesar de esta construção ser menos trabalhosa, verificamos que não é a melhor

opção para utilizarmos na resolução do problema de Malfatti, recorrendo a um software de geometria com as características do Geogebra.

Na construção de Schellbach, temos de considerar os quadrados de senos de ângulos que dependem apenas dos lados do triângulo inicial. Embora essa construção seja muito elaborada, parece-nos a melhor opção para a exploração do problema com recurso a um programa informático. Atendendo ao software utilizado em que podemos mover facilmente os pontos, através de comando próprio, observamos que é sempre possível a visualização dos círculos de Malfatti.

Como essa construção é feita com base em ângulos obtidos através do quadrado dos seus senos, tendo em conta os lados do triângulo dado, é mais coesa, sendo preferível à de Steiner aquando da utilização de um software de geometria para a exploração de resultados.

5.3 Malfatti e a Geometria Inversiva

Aqui, podemos pensar em dois caminhos. Utilizar a geometria inversiva para encontrar a solução do problema de Malfatti, considerando um triângulo, ou substituir os lados do triângulo por três circunferências quaisquer, sendo, nesse caso, designado por problema de Malfatti-Steiner. Vamos considerar a segunda opção por ser mais interessante o seu desenvolvimento.

O problema de Malfatti-Steiner pode ter o enunciado que se segue:

Problema 5.3.1 *Dadas três circunferências C_j , com $j \in \{1, 2, 3\}$, determinar três círculos C'_k , com $k \in \{1, 2, 3\}$, de modo que sejam tangentes entre si e que cada círculo C'_k seja tangente a duas circunferências C_j com $j \neq k$.*

Vamos apresentar o caso particular de as circunferências dadas serem tangentes duas a duas e o caso geral, em que as circunferências não apresentam uma posição relativa em particular.

5.3.1 Caso de Tangência Entre as Circunferências

Se as circunferências são tangentes duas a duas, é fácil obter a solução do problema, efetuando uma inversão segundo uma circunferência centrada num dos pontos de tangência. Bottema, em [4], explora este caso particular para circunferências tangentes externa ou internamente, de acordo com as figuras 5.10 e 5.11, respetivamente.

Para cada um dos casos, fazendo uma inversão segundo uma circunferência com centro coincidente com um dos pontos de tangência, temos que as circunferências que contêm o centro de inversão são transformadas em duas retas paralelas, e a terceira circunferência é transformada numa circunferência tangente àquelas.

Se, por exemplo, o centro da circunferência de inversão é o ponto de interseção das circunferências C_2 e C_3 , estas são transformadas em duas retas paralelas, l_2 e l_3 , respetivamente, e a circunferência C_1 transforma-se numa circunferência tangente a l_2 e l_3 , a circunferência K , de acordo com a sua posição. A figura 5.12 ilustra as possíveis inversões.

Sendo assim, a construção das três circunferências K_1 , K_2 e K_3 , correspondentes aos círculos que constituem a solução do problema, é simples, como se pode observar na figura 5.12. Mas o problema tem duas soluções reais possíveis, consoante a posição que as circunferências

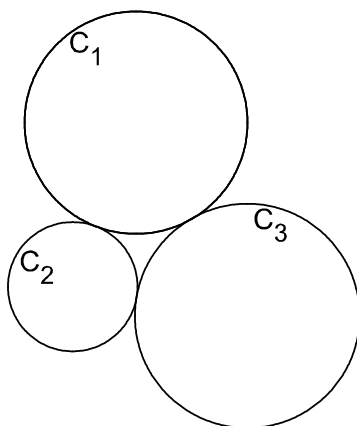


Figura 5.10: Circunferências tangentes externamente.

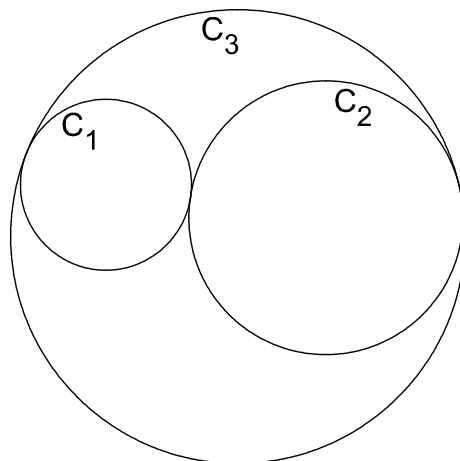


Figura 5.11: Circunferências tangentes internamente.

K_1 , K_2 e K_3 assumem em relação a K (de acordo com a figura 5.12, as circunferências poderiam também ser traçadas à esquerda de K).

As circunferências que se encontrarem mais afastadas do centro de inversão correspondem à solução em que as circunferências correspondentes aos círculos pretendidos ocupam o espaço delimitado pelas circunferências dadas, como na figura 5.13, enquanto que as circunferências determinadas a menor distância do centro de inversão correspondem à solução em que os círculos pretendidos ocupam o espaço não delimitado pelas circunferências dadas, de acordo com as figuras 5.14 e 5.15.

Para além de apresentar a solução do problema, o principal objetivo de Bottema é determinar cada um dos raios dos círculos pretendidos em função dos raios das circunferências dadas. Mais uma vez, recorre à geometria inversiva.

Bottema submete os elementos da figura 5.12 a uma inversão segundo uma circunferência unitária, cujo centro coincide com o centro de um referencial cartesiano onde as retas l_2

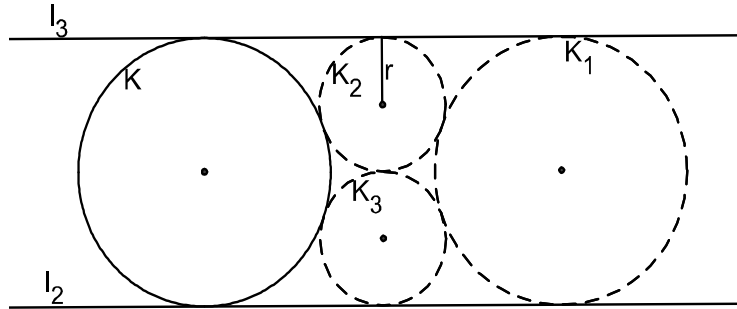


Figura 5.12: Solução do problema de Malfatti-Steiner por inversão.

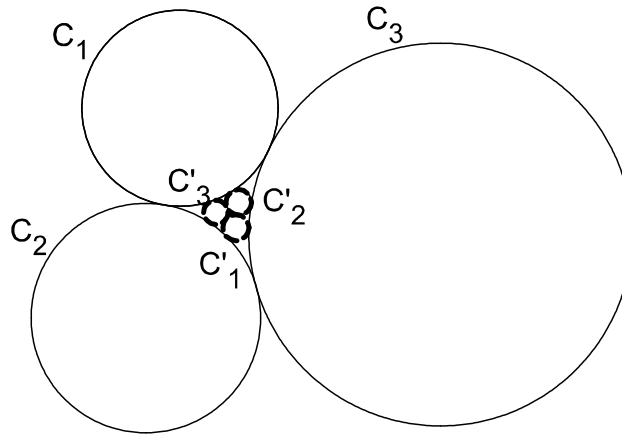


Figura 5.13: Solução composta por círculos tangentes externamente que ocupam o espaço delimitado pelas circunferências dadas.

e l_3 sejam retas paralelas ao eixo das abscissas. Sendo $4r$ a distância entre as retas l_2 e l_3 , as circunferências K_2 e K_3 têm raio r e K_1 tem raio $2r$. Considerando que o centro da circunferência K tem de coordenadas (a, b) , temos que o centro de K_1 é o ponto de coordenadas $(a + 4r\sqrt{2}, b)$ e os centros de K_2 e K_3 são, respectivamente, cada um dos pontos de coordenadas $(a + 2r\sqrt{2}, b + r)$ e $(a + 2r\sqrt{2}, b - r)$.

Fazendo uma inversão da figura 5.12 segundo uma circunferência de centro na origem do referencial e raio um, temos, por uma das consequências do teorema 2.3.2, que a imagem de K é uma circunferência de raio

$$R_1 = \frac{2r}{|a^2 + b^2 - 4r^2|}. \quad (5.44)$$

Pelo teorema 2.3.1, sabemos que a imagem de cada uma das retas l_2 e l_3 é uma circunferência. A reta l_2 é definida pela equação

$$y = b - 2r \quad (5.45)$$

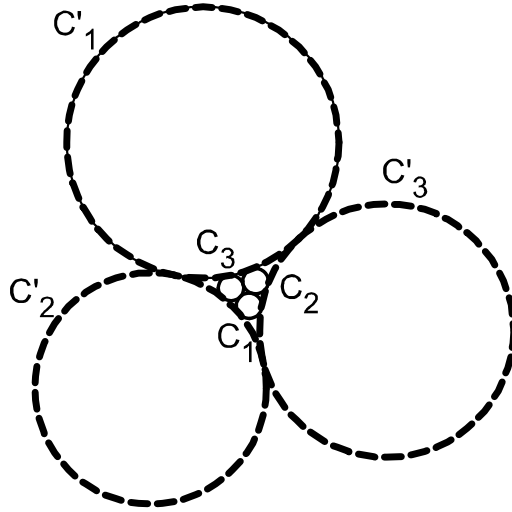


Figura 5.14: Solução composta por círculos tangentes externamente que ocupam o espaço não delimitado pelas circunferências dadas.

e a reta l_3 é definida pela equação

$$y = b + 2r. \quad (5.46)$$

Para determinar os raios das circunferências que são imagem das retas l_2 e l_3 , designando-os por R_2 e R_3 , respetivamente, substituímos, nas equações (5.45) e (5.46), y por $\frac{y}{x^2+y^2}$, de acordo com a regra prática que decorre do teorema 2.3.2. Fazendo os devidos arranjos e simplificações, obtemos as equações das respetivas circunferências, onde verificamos que

$$R_2 = \frac{1}{2|b - 2r|} \quad (5.47)$$

e

$$R_3 = \frac{1}{2|b + 2r|} \quad (5.48)$$

Considerando, sem perda de generalização, que a origem do referencial é exterior a K e se situa entre l_2 e l_3 , verificamos que

$$\begin{aligned} b - 2r &< 0, \\ b + 2r &> 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

e

$$a^2 + b^2 - 4r^2 > 0. \quad (5.50)$$

Assim, podemos considerar o sistema

$$\begin{cases} R_1 = \frac{2r}{a^2 + b^2 - 4r^2} \\ R_2 = \frac{1}{2(2r - b)} \\ R_3 = \frac{1}{2(b + 2r)} \end{cases}. \quad (5.51)$$

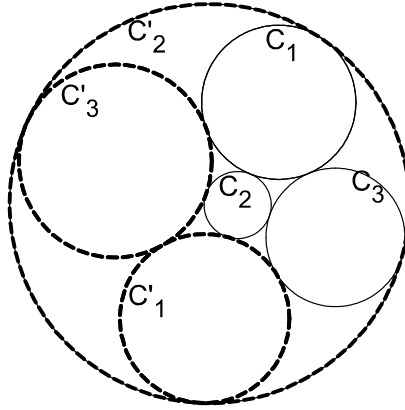


Figura 5.15: Solução composta por círculos tangentes internamente que ocupam o espaço não delimitado pelas circunferências dadas .

Resolvendo o sistema, considerando a , b e r como incógnitas, obtemos:

$$\begin{cases} a = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_3 R_1} + \frac{1}{R_1 R_2}} \\ r_i = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2} \right) \\ b = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right) \end{cases} . \quad (5.52)$$

Por uma das consequências do teorema 2.3.2, a circunferência K_1 é transformada numa circunferência de raio

$$R'_1 = \frac{2r}{|(a + 4r\sqrt{2})^2 + b^2 - 4r^2|}, \quad (5.53)$$

a circunferência K_2 é transformada numa circunferência de raio

$$R'_2 = \frac{r}{|(a + 2r\sqrt{2})^2 + (b + r)^2 - r^2|} \quad (5.54)$$

e a circunferência K_3 é transformada numa circunferência de raio

$$R'_3 = \frac{r}{|(a + 2r\sqrt{2})^2 + (b - r)^2 - r^2|}. \quad (5.55)$$

Substituindo os valores de a , b e r encontrados, determinamos uma das soluções:

$$\frac{1}{R'_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{2}{R_3} + 2\sqrt{2 \left(\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_3 R_1} + \frac{1}{R_1 R_2} \right)} \quad (5.56)$$

$$\frac{1}{R'_2} = \frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{2}{R_3} + 2\sqrt{2 \left(\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_3 R_1} + \frac{1}{R_1 R_2} \right)} \quad (5.57)$$

$$\frac{1}{R'_3} = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_3} + 2\sqrt{2 \left(\frac{1}{R_2 R_3} + \frac{1}{R_3 R_1} + \frac{1}{R_1 R_2} \right)} \quad (5.58)$$

Os resultados apresentados correspondem à solução em que os três círculos pretendidos são tangentes externamente (figura 5.13). Para encontrar a segunda solução, basta substituir os valores das raízes quadradas pelos seus simétricos e considerar o valor absoluto do valor obtido. Para a segunda solução, existem duas possibilidades: ou os três círculos C'_k , com $k \in \{1, 2, 3\}$, são tangentes externamente (figura 5.14) ou dois círculos são tangentes externamente entre si, sendo tangentes internamente com o terceiro círculo (figura 5.15).

No caso de uma das circunferências dadas C_j , com $j \in \{1, 2, 3\}$, ser tangente internamente com as outras duas, devemos substituir o respetivo valor R_j pelo seu valor simétrico, para obter as duas soluções. Qualquer uma destas soluções é composta por círculos tangentes entre si externamente, como se pode observar no exemplo dado na figura 5.16, em que a circunferência C_3 é tangente internamente com C_1 e C_2 e os círculos C'_k e C''_k , com $k \in \{1, 2, 3\}$, constituem as duas soluções possíveis para o problema.

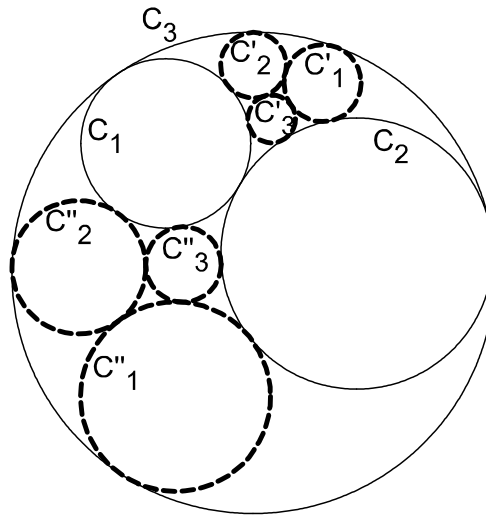


Figura 5.16: Soluções no caso de tangência interior entre as circunferências dadas.

5.3.2 Caso Geral

No caso geral, em que o problema de Malfatti-Steiner tenha solução, as circunferências dadas podem assumir várias posições relativas. J. Hadamard (1865-1963), em [18], apresenta uma construção geométrica para obter os círculos de Malfatti. A mesma baseia-se na construção de Steiner, adaptada para circunferências, ou seja, substituindo os lados do triângulo por circunferências.

Atendendo ao facto de a construção de Steiner já ter sido apresentada na secção 5.2.2, e tendo em conta que a construção para circunferências se baseia naquela, vamos apenas enunciá-la.

Para perceber e realizar a construção apresentada por J. Hadamard, há que definir o conceito de circunferência bissetora de duas circunferências, bem como apresentar um respetivo roteiro de construção.

Definição 5.3.1 *Dadas duas circunferências, C e C' , a circunferência bissetora é a circunferência Γ , através da qual a imagem de C , por inversão, é C' e vice-versa (figura 5.17).*

Verificamos que se duas circunferências são inversas segundo uma circunferência C_i de centro O , então são homotéticas, sendo o ponto O o centro de homotetia (figura 5.17). Assim, se uma reta que contém O interseca uma circunferência C nos pontos M e N e interseca a circunferência C' nos pontos M' e N' , de tal forma que os pares de pontos M e M' e N e N' são homólogos, então os pontos M e N' são inversos em relação à circunferência C_i , bem como os pontos M' e N . Os pontos M e N' são designados por pontos *anti-homólogos*, tais como M' e N .

Os únicos pares de pontos homólogos e anti-homólogos são os pontos de interseção das tangentes comuns às duas circunferências desenhadas a partir do ponto O .

Averiguamos que dois pares de pontos anti-homólogos encontram-se sobre a mesma circunferência Σ , pela propriedade 2.3.4, alínea (ii), e que qualquer circunferência que interseque as duas circunferências C e C' sob o mesmo ângulo interseca as circunferências em dois pares de pontos anti-homólogos (figura 5.17). A circunferência bissetora Γ das circunferências C e C' é a circunferência que é ortogonal a todas as circunferências Σ , ou seja, é ortogonal às circunferências que contêm pontos anti-homólogos.

Como já foi referido, como consequência da propriedade 2.3.3, temos que o inverso da circunferência Σ , segundo a circunferência C_i , é a própria circunferência Σ [18].

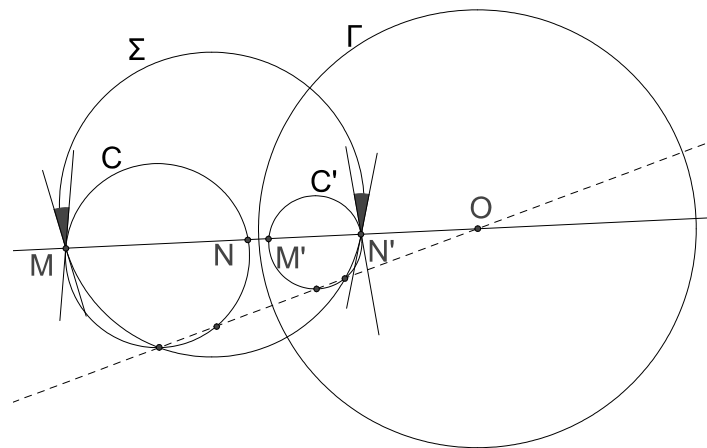


Figura 5.17: A circunferência Γ é a circunferência bissetora de C e C' .

Podemos sugerir um roteiro para a construção da circunferência bissetora Γ de duas circunferências C e C' dadas.

Consideremos duas circunferências C e C' (figura 5.18). Para determinar a respetiva circunferência bissetora, seguimos os passos 1 a 5 a seguir enumerados.

1. Determinar o centro de homotetia direta O das circunferências C e C' .
2. Determinar dois pontos anti-homólogos (pontos N e M' na figura 5.18).
3. Construir uma circunferência Σ que contenha os dois pontos anti-homólogos encontrados.
4. Traçar, a partir do ponto O , uma tangente à circunferência Σ e determinar o respetivo ponto de tangência T .
5. Desenhar a circunferência bissetora Γ , cujo centro é o ponto O e que contém o ponto T .

Podemos, agora, apresentar o roteiro de construção, sugerido por J. Hadamard, para a resolução do problema de Malfatti-Steiner.

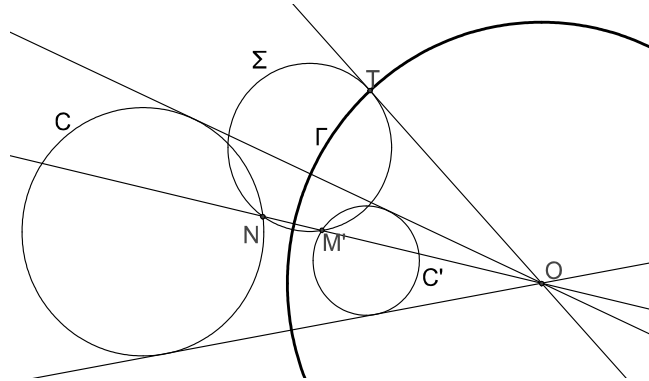


Figura 5.18: Construção da circunferência bisetora Γ .

Roteiro de Construção da Solução

Consideremos C_1 , C_2 e C_3 três circunferências dadas (figura 5.19). Para determinar a solução do problema de Malfatti-Steiner, caso exista para as circunferências dadas, podemos seguir os passos de 1 a 6 apresentados [18] (pp. 330).

1. Determinar as circunferências bisetoras Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 . As circunferências Γ_1 , Γ_2 e Γ_3 têm o mesmo eixo radical.

- 1.1. Determinar a circunferência Γ_1 , circunferência bisetora das circunferências C_2 e C_3 .
- 1.2. Determinar a circunferência Γ_2 , circunferência bisetora das circunferências C_1 e C_3 .
- 1.3. Determinar a circunferência Γ_3 , circunferência bisetora das circunferências C_1 e C_2 .

2. Traçar a circunferência C ortogonal às circunferências dadas. Para tal fazemos:

- 2.1. Traçar, pelo menos, dois eixos radicais das circunferências dadas.
- 2.2. Determinar o ponto de interseção dos eixos radicais traçados, o ponto R .
- 2.3. Traçar, pelo menos, uma tangente em relação a uma circunferência dada a partir do ponto R , e determinar o respectivo ponto de interseção.

2.4. Traçar a circunferência de centro R e que contém o ponto de interseção anteriormente determinado.

3. Determinar as circunferências K'_1 , K'_2 e K'_3 . Cada uma é construída com base na resolução do problema de Apolônio, existindo mais do que uma solução, quando o problema tem resolução.

- 3.1. Determinar a circunferência K'_1 tangente às circunferências C_1 , Γ_2 , Γ_3 .
- 3.2. Determinar a circunferência K'_2 tangente às circunferências C_2 , Γ_1 , Γ_3 .
- 3.3. Determinar a circunferência K'_3 tangente às circunferências C_3 , Γ_1 , Γ_2 .

4. Determinar as circunferências O_1 , O_2 e O_3 . Cada uma é construída seguindo os passos 2.1 a 2.4.

- 4.1. Determinar a circunferência O_1 ortogonal às circunferências C , K'_2 e K'_3 .
- 4.2. Determinar a circunferência O_2 ortogonal às circunferências C , K'_1 e K'_3 .
- 4.3. Determinar a circunferência O_3 ortogonal às circunferências C , K'_1 e K'_2 .

5. Determinar as imagens T_1 , T_2 e T_3 .

- 5.1. Determinar a imagem de Γ_1 , a circunferência T_1 , pela inversão segundo a circunferência O_1 (esta inversão mantém as circunferências C , K'_2 e K'_3 invariantes).
- 5.2. Determinar a imagem de Γ_2 , a circunferência T_2 , pela inversão segundo a circunferência O_2 (esta inversão mantém as circunferências C , K'_1 e K'_3 invariantes).
- 5.3. Determinar a imagem de Γ_3 , a circunferência T_3 , pela inversão segundo a circunferência O_3 (esta inversão mantém as circunferências C , K'_1 e K'_2 invariantes).
6. Traçar círculos tangentes (a construção de cada um dos círculos de Malfatti é feita com base na resolução do problema de Apolônio, bastando construir um círculo tangente a três circunferências, que será tangente à quarta circunferência).
 - 6.1. Traçar o círculo tangente a C_2 , C_3 , T_2 e T_3 .
 - 6.2. Traçar o círculo tangente a C_1 , C_3 , T_1 e T_3 .
 - 6.3. Traçar o círculo tangente a C_1 , C_2 , T_1 e T_2 .

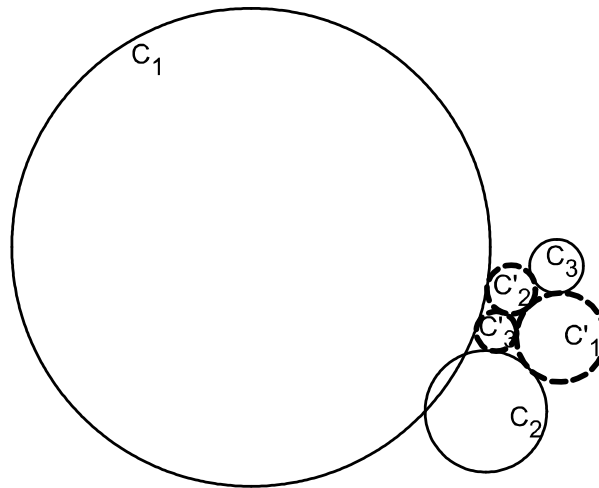


Figura 5.19: Uma solução do problema de Malfatti-Steiner.

Observamos que quando o centro radical é interior às três circunferências dadas, a circunferência C não existe. Neste caso, fazemos algumas adequações, de acordo com o referido em [18]. A circunferência C é substituída por uma circunferência de mesma potência em relação às circunferências C_1 , C_2 e C_3 .

Uma vez que as circunferências hiperbólicas são circunferências euclidianas, o problema de Malfatti-Steiner pode ser estudado no domínio da geometria hiperbólica.

5.3.3 Número de Soluções do Problema de Malfatti-Steiner

A determinação das circunferências K'_1 , K'_2 e K'_3 , fez-nos questionar sobre o número de soluções do problema de Malfatti-Steiner, uma vez que o problema de Apolônio, quando tem solução, tem no máximo oito soluções [18]. Sendo assim, consideramos pertinente estudar o número de soluções do problema de Malfatti-Steiner.

Como é de fácil verificação, pelo roteiro exposto em 5.3.2, a construção apresentada para determinar as soluções do problema é composta por várias construções auxiliares. Sendo assim, dada a sua complexidade, decidimos fazer o estudo recorrendo à inversão, nos casos em que existem pontos de interseção entre as circunferências dadas, e, sempre que possível,

utilizando circunferências congruentes, para facilitar a construção das figuras. Em cada uma das figuras, as circunferências correspondentes às soluções do problema estão representadas a tracejado.

Quando as circunferências dadas não se intersejam, existindo uma circunferências interior a outra, é fácil perceber que o problema não tem solução.

Na figura 5.20, verificamos, no primeiro caso, que um círculo tangente a C_1 e C_3 é secante a C_2 e, no segundo caso, que um círculo tangente a C_1 e C_3 é secante a C_2 .

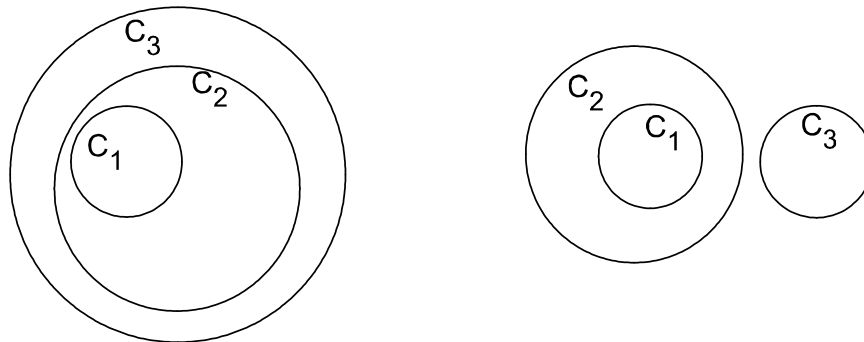


Figura 5.20: O problema de Malfatti-Steiner não tem solução.

No caso de as circunferências não se intersetarem e existirem duas circunferências interiores a uma mesma circunferência, o problema tem duas soluções, como podemos observar na figura 5.21.

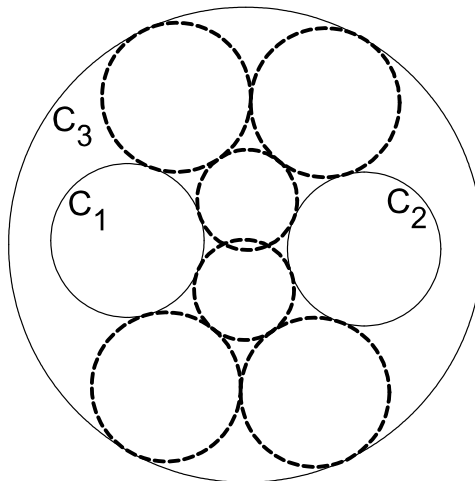


Figura 5.21: Problema de Malfatti-Steiner com duas soluções.

Se as circunferências são exteriores e não se intersejam, o problema tem duas soluções, como observamos na figura 5.22.

Passemos, agora, aos casos em que existem pontos de interseção entre as circunferências. Vamos começar por abordar os casos em que esses pontos são definidos por circunferências

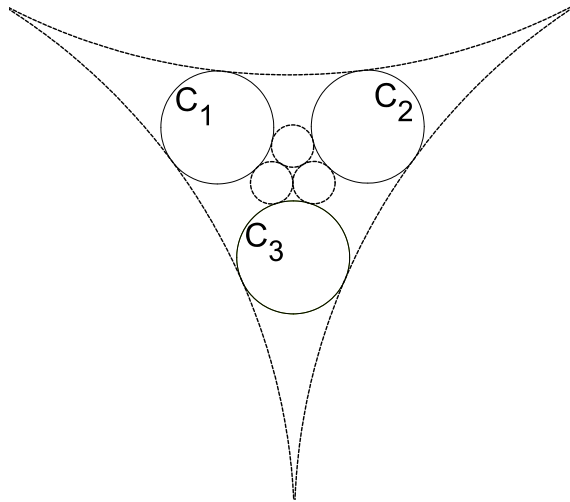


Figura 5.22: Quando as circunferências são exteriores e não se intersectam, o problema de Malfatti-Steiner tem duas soluções.

secantes. Atendendo ao facto de a inversão permitir transformar circunferências em retas, é possível, através da mesma, obter figuras mais simples quando existem pontos de interseção entre as circunferências dadas. Como já referimos, vamos recorrer a esta transformação para estudar o número de soluções do problema de Malfatti-Steiner quando as circunferências não são disjuntas.

Na figura 5.23, podemos observar os casos em que apenas duas circunferências se intersectam.

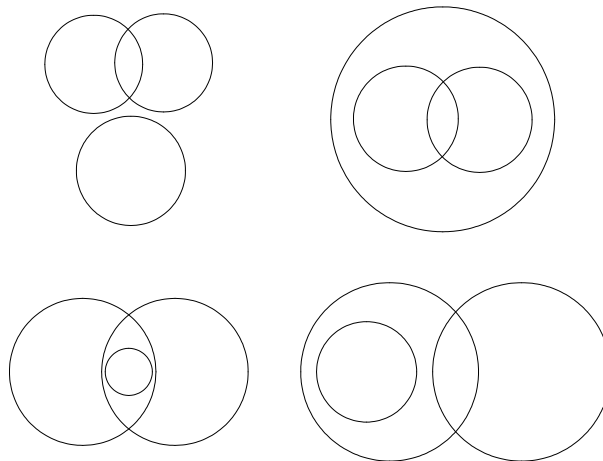


Figura 5.23: Casos em que apenas duas circunferências se intersectam.

Considerando, para cada um dos casos apresentados na figura 5.23, uma circunferência com centro coincidente com um dos pontos de interseção e fazendo uma inversão segundo esta

circunferência, obtemos, para todos os casos, duas retas concorrentes e uma circunferência, que não as intersesta, como se exemplifica na figura 5.24. Desta forma, podemos concluir que, quando apenas duas circunferências dadas são secantes, o problema tem duas soluções.

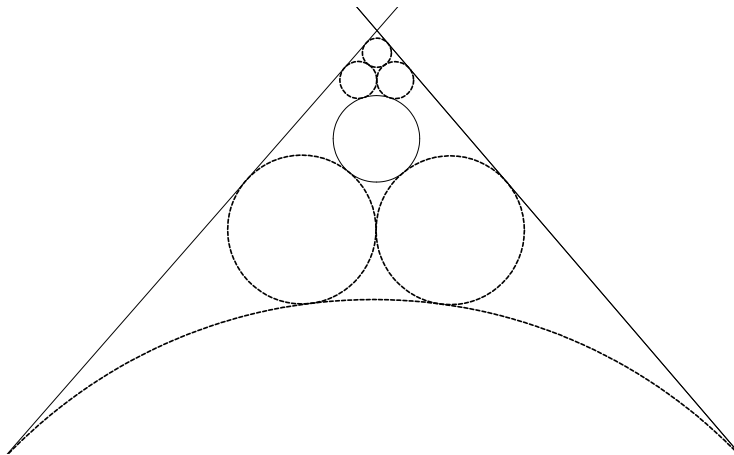


Figura 5.24: Por inversão, podemos ver que o problema de Malfatti-Steiner tem duas soluções quando apenas duas circunferências são secantes.

Quando existem pontos de interseção entre as três circunferências dadas, há que distinguir vários casos.

No caso de as três circunferências terem dois pontos em comum, como podemos observar na figura 5.25, o problema de Malfatti-Steiner não tem solução. De facto, por uma inversão segundo uma circunferência com centro coincidente com um dos pontos de interseção, as três circunferências são transformadas em três retas concorrentes, não sendo possível desenhar três círculos tangentes a elas que satisfaçam as condições do problema.

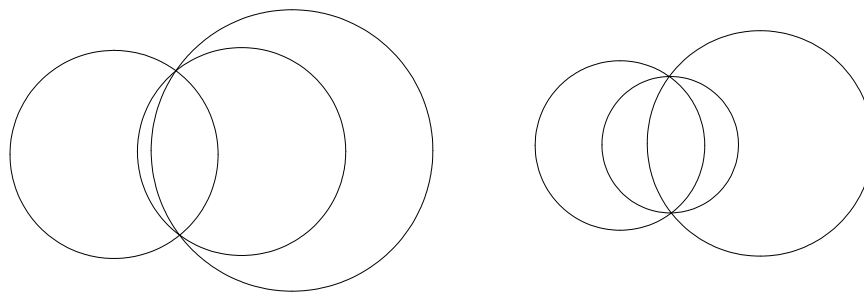


Figura 5.25: Se as três circunferências têm dois pontos em comum, o problema de Malfatti-Steiner não tem solução.

Se as circunferências dadas definirem quatro pontos de interseção (figura 5.26), existindo duas delas que não se intersectam, verificamos que o problema tem solução.

Recorrendo à inversão segundo uma circunferência com centro num dos pontos de interseção, as duas circunferências que contêm o centro de inversão são transformadas em duas retas concorrentes e a terceira circunferência é transformada numa circunferência secante com uma das retas obtidas (figuras 5.27 e 5.28).

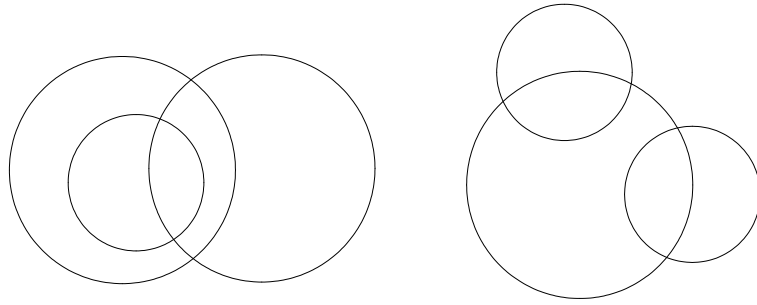


Figura 5.26: As circunferências definem quatro pontos de interseção, em que duas não se intersectam.

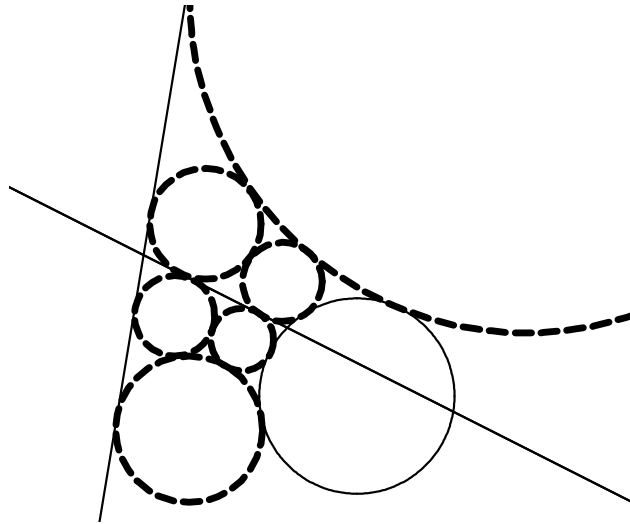


Figura 5.27: Duas das quatro soluções do problema de Malfatti-Steiner, com recurso à inversão.

Através das figuras 5.27 e 5.28, podemos verificar que o problema tem quatro soluções.

Se as circunferências definem quatro pontos de interseção, mas têm um ponto em comum (figura 5.29), o problema continua a ter quatro soluções. A diferença está na figura que é obtida por inversão. Efetuando uma inversão segundo uma circunferência com centro no ponto comum às três circunferências, ficamos com três retas concorrentes duas a duas (figura 5.30).

As circunferências podem ser secantes duas a duas, definindo seis pontos de interseção. Nestas condições, há que distinguir dois casos. Um dos casos caracteriza-se por dois dos pontos de interseção serem interiores ou exteriores a uma das circunferências (ver figura 5.31). No outro caso, cada uma das circunferências tem um ponto de interseção no seu interior (ver figura 5.32).

No primeiro caso, invertendo cada uma das figuras segundo uma circunferência com centro num dos pontos de interseção, obtemos uma figura composta por duas retas concorrentes e

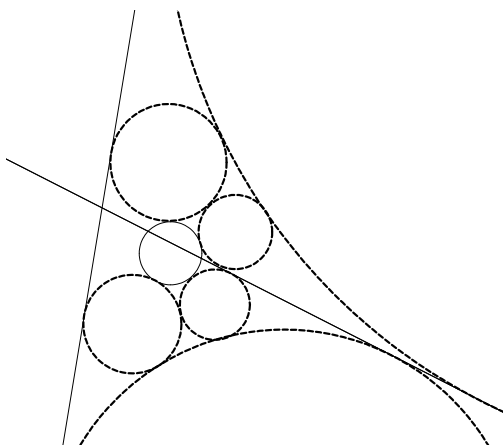


Figura 5.28: Outras duas soluções do problema de Malfatti-Steiner, com recurso à inversão.

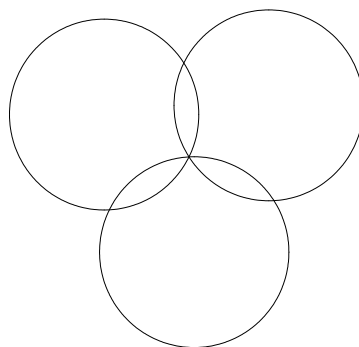


Figura 5.29: As circunferências definem quatro pontos de interseção, sendo secantes duas a duas.

uma circunferência secante com as duas. Verificamos que o problema tem seis soluções (ver figuras 5.33 e 5.34).

Se cada uma das circunferências dadas tem um ponto de interseção no seu interior (figura 5.32), recorrendo à inversão segundo uma circunferência de centro num dos pontos de interseção não interiores às circunferências dadas, verificamos que o problema tem oito soluções (figura 5.35).

Quando, nos casos apresentados, duas ou mais circunferências secantes são substituídas por circunferências tangentes, as figuras obtidas por inversão acabam por coincidir umas com as outras. Verificamos que continuam a existir casos em que o problema não tem solução e que para os casos em que há soluções, apenas ocorrem duas ou quatro soluções.

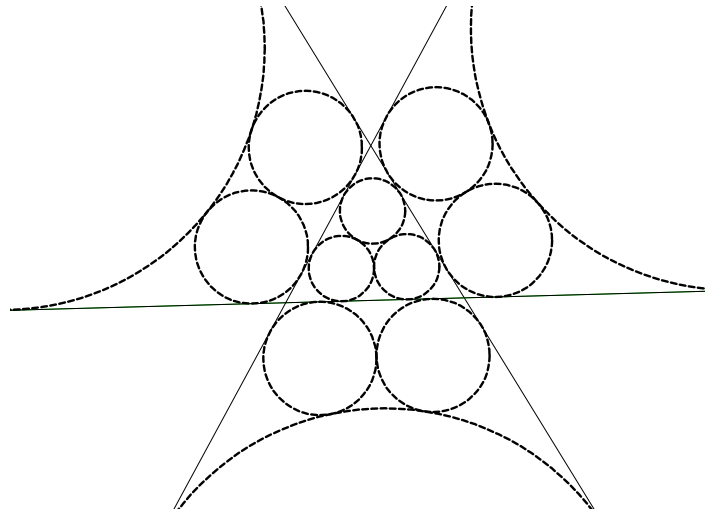


Figura 5.30: O problema de Malfatti-Steiner tem quatro soluções.

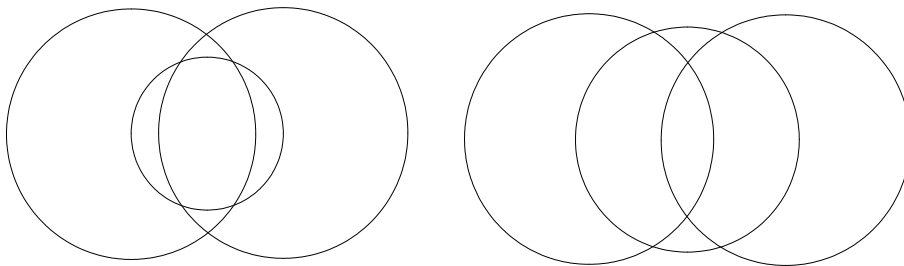


Figura 5.31: Seis pontos de interseção, em que dois se encontram no interior ou no exterior de uma circunferência.

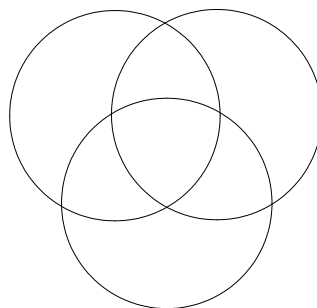


Figura 5.32: As circunferências definem seis pontos de interseção, existindo um ponto interior a cada circunferência.

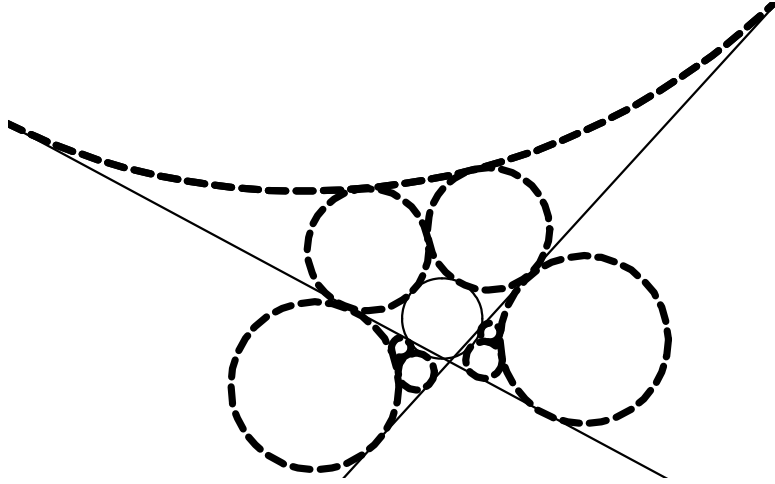


Figura 5.33: Na figura invertida, podemos determinar as soluções do problema de Malfatti-Steiner.

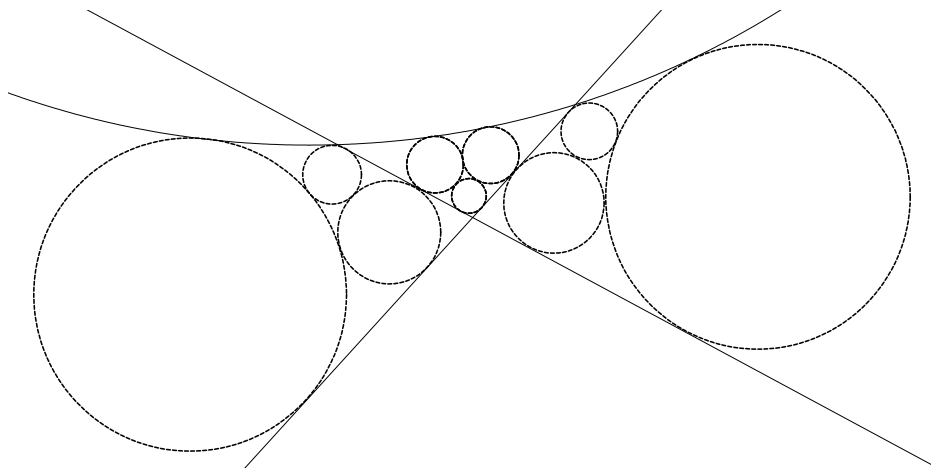


Figura 5.34: Três das seis soluções do problema de Malfatti-Steiner.

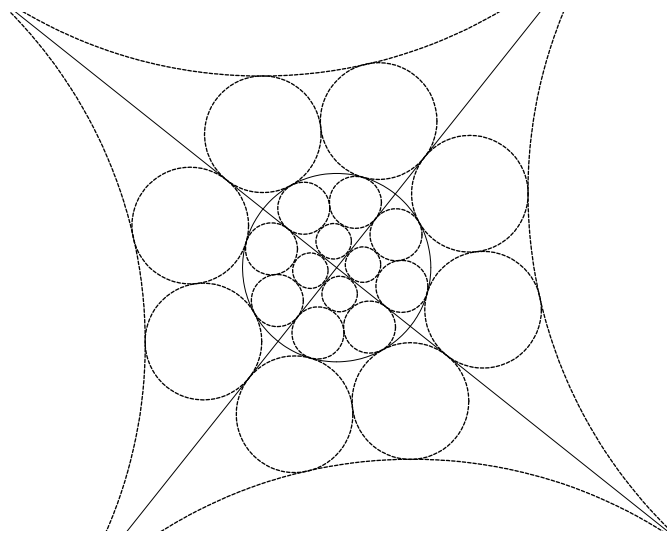


Figura 5.35: Por inversão podemos determinar as oito soluções do problema de Malfatti-Steiner.

Capítulo 6

Uma Aplicação Curricular: O Jogo do Paralelo

Reconhecendo o potencial que o jogo pode ter em contexto de sala de aula e fora dele, a criação de um jogo foi, desde logo, a forma escolhida para, de alguma forma, aplicar os conteúdos explorados no presente trabalho.

O Jogo do Paralelo nasceu da união do elemento geométrico comum aos três problemas estudados, o triângulo, com o conceito que distingue as geometrias abordadas na sua exploração, o conceito de paralelismo, que permite fazer a distinção entre a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas. Neste sentido, as peças principais do jogo são triângulos equiláteros. A sua criação teve inspiração no problema de Fagnano, pois, em cada uma delas, encontra-se inscrito um triângulo órtico. O conceito de paralelismo está presente ao longo do desenvolvimento do jogo, através da construção de segmentos de reta estritamente paralelos.

Um dos propósitos presentes na criação do jogo prendeu-se com o facto de este ter a possibilidade de ser utilizado em contexto de sala. Assim, da combinação entre a experiência de leccionação no terceiro ciclo do ensino básico e a natureza do trabalho aqui desenvolvido, nasceu o Jogo do Paralelo.

6.1 O Jogo e o Currículo

A sociedade reconhece que o jogo desempenha um papel importante no desenvolvimento da criança a nível social, emocional e intelectual. Mesmo nas civilizações mais antigas, o jogo e as brincadeiras estão presentes no desenvolvimento da criança. Como refere Rosamilha em [29], já "Platão concedeu lugar especial ao valor educativo do jogo".

Cada vez mais se reconhece o valor do jogo na escola. O próprio Programa de Matemática do Ensino Básico referencia, nas orientações metodológicas gerais, que "(...) o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando actividades de investigação, desenvolvendo projectos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos". Contudo, existem vários autores que não partilham da mesma opinião.

Consideramos que o jogo pode e deve ser utilizado na escola, podendo constituir uma motivação e mesmo um processo de aprendizagem. Porém, defendemos que a sua utilização deve ser educativa, no sentido de se enquadrar no currículo, ou seja, estar, de alguma forma, relacionada com os conteúdos estudados. Para além disso, o jogo também pode contribuir

para desenvolver uma atitude positiva face à Matemática, contribuindo, assim, para atingir uma das finalidades do ensino da Matemática no ensino básico.

Conforme se apresenta em [30], o jogo educativo deve basear-se em sete critérios:

Critério 1: O jogo pressupõe participação livre.

Critério 2: O jogo é um desafio perante uma tarefa ou um adversário.

Critério 3: O jogo é regulado por um conjunto finito de regras. As regras descrevem todos os procedimentos para jogar o jogo, incluindo objetivos a atingir, e devem ser estruturadas de tal modo que quando um jogador termina a sua vez de jogar, não possa voltar atrás na decisão tomada.

Critério 4: Psicologicamente, o jogo é um situação arbitrária, claramente delimitada no tempo e no espaço de uma situação da vida real.

Critério 5: Socialmente, os acontecimentos que ocorrem no jogo são considerados, em si mesmos, de importância mínima.

Critério 6: O jogo tem uma situação-espaço finita. As situações exatas que se alcançam não são conhecidas antes de se começar o jogo.

Critério 7: O jogo acaba depois de um número finito de jogadas dentro de uma situação-espaço.

Atendendo aos critérios apresentados, verificamos que o Jogo do Paralelo reúne todas as condições para ser utilizado em contexto de sala de aula. Para além disso, e atendendo a esta finalidade, a sua criação foi pensada no sentido de ser inserido no âmbito de conteúdos estudados, como, por exemplo, o estudo da posição relativa de retas no plano.

6.2 Caracterização do Jogo do Paralelo

Passamos a descrever o Jogo do Paralelo.

1. Material

O jogo é constituído pelo seguinte material:

– Sessenta e uma peças triangulares iguais, com a forma de triângulos equiláteros. Cada peça tem inscrito um triângulo equilátero cujos vértices são os pés das alturas do triângulo equilátero original, no qual cada lado tem uma cor diferente (ver figura 6.1);

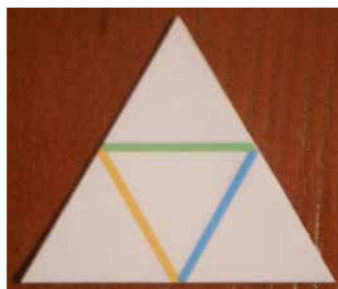


Figura 6.1: Peça triangular.

– Dois cartões (ver figura 6.2);
– Setenta e duas peças redondas coloridas de duas cores, trinta e seis de cada cor (ver figura 6.3). Estas peças servem para assinalar os segmentos de reta construídos por cada jogador e para preencher o respetivo cartão.

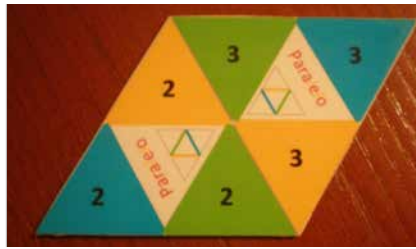


Figura 6.2: Cartão.



Figura 6.3: Peças coloridas.

2. Número de Jogadores

O jogo foi concebido para ser jogado por dois jogadores de forma alternada.

3. Público-Alvo

O jogo foi pensado para alunos do terceiro ciclo do ensino básico.

4. Objetivos

O jogo tem como objetivos gerais:

- Desenvolver a capacidade de concentração;
- Desenvolver a capacidade de observação;
- Desenvolver a visualização e o raciocínio geométrico;
- Aplicar a visualização e o raciocínio geométrico.

O jogo tem como objetivos específicos:

- Construir segmentos de reta estritamente paralelos;
- Preencher o respetivo cartão.

5. Regras

O jogo é constituído pelas seguintes regras:

5.1. Cada jogador fica com um cartão e escolhe as trinta e seis peças, de uma só cor, que vão identificar os pares de segmentos de reta por ele construídos e preencher o seu cartão.

5.2. Os jogadores escolhem o processo para decidir o primeiro a jogar.

5.3. Sobre a mesa, colocam-se as peças triangulares, de onde se tira uma peça para iniciar o jogo.

5.4. Cada jogador joga de forma alternada.

5.5. Cada jogada consiste em pegar numa peça triangular e colocá-la na mesa, de forma a ficar adjacente a pelo menos uma das peças já colocadas. Uma vez colocada uma peça triangular, a mesma não poderá ser trocada de posição.

5.6. As jogadas devem ser efetuadas com o objetivo de obter pares de segmentos de reta estritamente paralelos, em benefício próprio, e de dificultar ao adversário a construção de segmentos de reta em seu benefício.

5.7. Cada jogador deverá formar seis pares de segmentos de reta, sendo dois de cada cor. Para cada cor, um dos pares deve ser composto por segmentos de reta formados, cada um, por duas peças triangulares (figura 6.4) e o outro par deve ser composto por segmentos de reta formados, cada um, por três peças triangulares (figura 6.5).

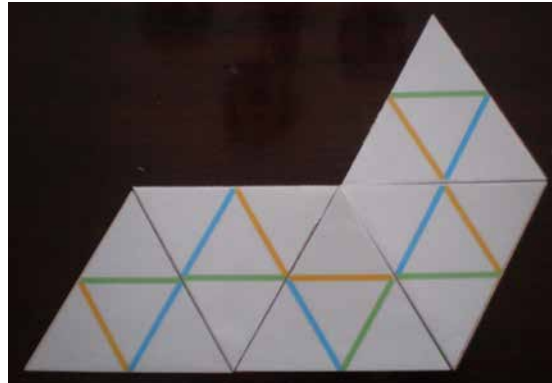


Figura 6.4: Segmentos paralelos de cor azul com duas peças.

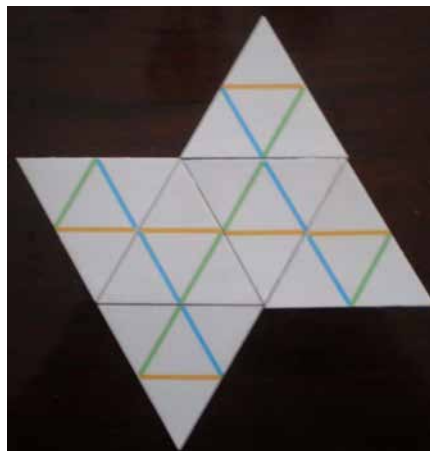


Figura 6.5: Segmentos paralelos de cor azul com três peças.

5.8. Quando um jogador constrói um par de segmentos de reta estritamente paralelos, coloca uma peça colorida sobre todos os segmentos envolvidos (figuras 6.6). No respectivo cartão, coloca uma peça na casa correspondente (figura 6.7). Cada um dos segmentos de reta assinalados só poderá ser considerado uma vez, não podendo qualquer um dos jogadores utilizá-lo para construir novos pares de segmentos de reta.

5.9. O vencedor é o jogador que completar o cartão em primeiro lugar, ou seja, que construir os seis pares de segmentos de reta estritamente paralelos. No caso de terminarem as peças triangulares e nenhum jogador conseguir completar o cartão, adicionam-se os valores

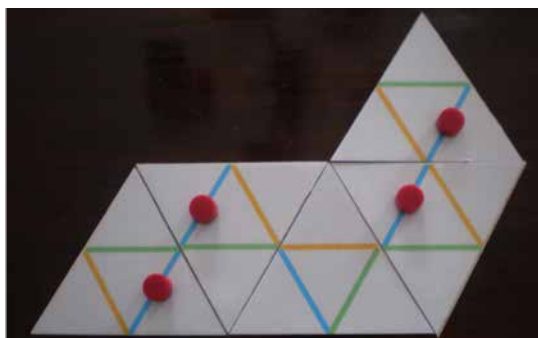


Figura 6.6: Par de segmentos paralelos de cor azul de duas peças assinalado.

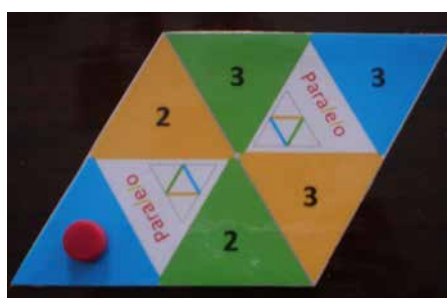


Figura 6.7: Preenchimento do cartão correspondente ao par de segmentos paralelos de cor azul de duas peças.

das casas preenchidas e ganha quem tiver a maior soma.

6. Observações

Devem considerar-se as seguintes observações:

6.1. No caso de, ao colocar-se uma peça, se formar mais do que um par de segmentos paralelos em simultâneo, o jogador marca-os a todos e considera-os para preencher o seu cartão;

6.2. No caso de um jogador formar um ou mais pares de segmentos estritamente paralelos e não os assinalar, o adversário, caso lhe seja útil, pode assinalá-los com as suas peças coloridas e considerá-los no preenchimento do seu cartão.

6.3 Experimentação do Jogo do Paralelo

Depois da conceção do jogo, o passo seguinte consistiu na sua materialização, com o intuito de proceder à experiência de ser jogado por alunos do ensino básico. Esta experiência foi efetuada com alunos do nono ano de escolaridade de três turmas. Em trabalho futuro, iremos enquadrá-lo especificamente nos conteúdos curriculares.

A experimentação foi feita com os objetivos de observar a aceitação do jogo por parte dos alunos, averiguar a formulação das regras, no sentido de estarem perceptíveis ao leitor, e verificar a dinâmica do jogo. Uma vez que eram necessários vários jogos, tivemos de improvisar, sendo as peças triangulares e os cartões feitos de papel e as peças coloridas substituídas por

pequenas pedras coloridas (figuras 6.8 e 6.9).

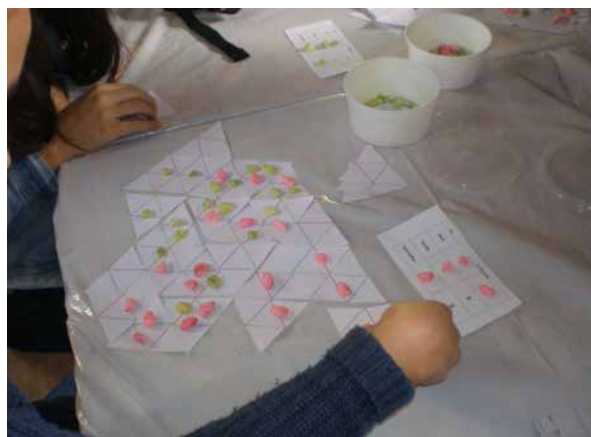


Figura 6.8: Experimentação do jogo.



Figura 6.9: O jogo improvisado.

A experiência realizou-se numa aula de final de período, sendo os alunos informados de que iriam jogar um jogo. A distribuição do material do jogo e das respetivas regras escritas foi feita após os alunos se agruparem em pares à sua escolha. Ao tomarem contato com o material, para eles desconhecido, reagiram de forma defensiva, perguntando de que jogo se tratava. Foi-lhes explicado que era um jogo criado pela professora e que eram os primeiros a jogá-lo, pelo que se mostraram mais recetivos. Os alunos mostraram alguma resistência à leitura das regras. Após uma leitura rápida das mesmas, solicitaram esclarecimentos, que foram dados oralmente. Depois de se considerarem esclarecidos, passaram ao jogo. Durante o desenrolar do mesmo, surgiram algumas dúvidas que foram sendo tiradas pela professora. Com o decorrer das jogadas, os alunos mostraram-se, progressivamente, entusiasmados, acabando por considerar o jogo interessante.

Com a observação da experiência e sugestões dadas pelos alunos, foram feitos alguns reajustes. As regras, que estavam inseridas num único texto, foram subdivididas em tópicos.

Os lados do triângulo órtico das peças triangulares fornecidas aos alunos tinham um traço mais fino do que o atual, pelo que os alunos sugeriram colocá-los com um traço mais grosso, de forma a facilitar a visualização dos segmentos de reta. Os alunos consideraram que o tamanho das pedras não era muito adequado, sendo grandes para o efeito, e que não eram suficientemente estáveis, sendo necessário arranjar peças que se mantivessem fixas. Neste sentido, procuramos encontrar um tamanho mais adequado para as peças coloridas. As peças triangulares, as peças coloridas e os cartões são de material magnético, de forma a permitir a fixação das peças coloridas às peças triangulares e aos cartões.

Da experiência efetuada foi possível tirar alguns resultados. Pudemos constatar que conseguimos atingir os nossos objetivos iniciais de criar um jogo exequível em contexto de sala de aula e de dar mais um pequeno contributo para criar, junto dos alunos, uma atitude positiva face à Matemática. Para além disso, conseguimos melhorar o jogo inicialmente concebido, graças às preciosas sugestões dos alunos.

Deixamos registada a vantagem de o jogo poder ser construído pelos próprios alunos, não sendo estritamente necessário que as peças sejam de material magnético. As peças triangulares podem ser feitas com recurso a material de desenho, podendo ser construídas algumas peças que poderão ser fotocopiadas de modo a perfazer o total. O recurso a um programa informático de geometria pode constituir outro processo de construção das peças triangulares, obtendo-se uma peça que pode ser copiada o número de vezes necessário. Os cartões podem ter a forma apresentada ou a forma de um retângulo dividido em seis retângulos, de forma que a sua construção seja mais fácil. As peças coloridas podem, por exemplo, ser substituídas por pequenas pedras coloridas de decoração com tamanho adaptado ao das peças triangulares construídas.

Capítulo 7

Conclusões Finais

Com o desfecho do processo de pesquisa e estudo para a presente dissertação e a elaboração da mesma, acreditamos ter atingido o principal objetivo de contribuir para um enriquecimento ao nível da prática letiva. De entre os contributos recebidos, podemos referir a perceção consciente da importância da Geometria no desenvolvimento da observação e do poder de síntese e na capacidade de relação de conteúdos. Embora estivéssemos cientes de tal, com o desenvolvimento do presente trabalho pudemos, por experiência própria, perceber melhor a real importância do papel da Geometria no ensino da Matemática, tantas vezes preterido em favor da Álgebra e da Análise. Igualmente inclui-se a aquisição de novos conhecimentos, nomeadamente ao nível das geometrias não euclidianas.

A análise dos problemas permitiu aplicar os conteúdos adquiridos e estudados sobre as geometrias não euclidianas, registados no início deste trabalho, bem como explorar e aprofundar os conteúdos da geometria euclidiana de uma forma diferente daquela que é abordada na sala de aula.

De entre as contribuições recebidas, não relacionadas diretamente com os conteúdos abordados, encontramos o domínio do programa informático Geogebra. Numa era em que a tecnologia impera, o recurso, na sala de aula, aos programas informáticos matemáticos pode constituir, se devidamente utilizados, uma ferramenta de grande utilidade para a transmissão e aquisição dos conteúdos. Uma grande vantagem do Geogebra consiste no facto de a sua utilização ser gratuita, sendo também este um dos motivos de opção de escolha. O recurso ao programa para a construção de figuras e para a exploração e confirmação de resultados permitiu aumentar e aprofundar o domínio do mesmo ao nível das construções geométricas.

Todo o processo começou com a pesquisa e o estudo relacionados com as geometrias não euclidianas. O primeiro contato com estas geometrias verificou-se apenas no primeiro ano do presente mestrado, com o estudo das geometrias hiperbólica e inversiva. Como consequência, a geometria projetiva foi aquela que exigiu mais estudo, uma vez que nunca tínhamos tido contato com a mesma.

A ordem pela qual foi feita a exploração de cada problema coincide com a apresentada no texto, atendendo à ordem cronológica dos respetivos autores. O problema de Desargues foi o que, dada a sua natureza, nos permitiu fazer mais explorações experimentais. Nesta sequência, efetuamos o estudo da posição do ponto perspetivo e da localização da reta perspetiva. Como referimos no final do rol de resultados, verificamos que o estudo da localização da reta perspetiva pode ser complementado com a exploração de vários casos, principalmente com o recurso à geometria hiperbólica, que permite estudar casos aos quais a geometria euclidiana

não dá respostas. Para além de verificar que a utilização de diferentes geometrias permite a resolução de problemas que não têm solução noutras, também pudemos constatar que a utilização de diferentes domínios geométricos pode fazer com que um problema tenha uma resolução mais ou menos simplificada.

Através da abordagem feita ao problema de Fagnano, foi possível aprofundar os conhecimentos ao nível da geometria euclidiana. Dos problemas trabalhados, julgamos ser este o que mais se adequa à exploração no ensino secundário. A apresentação da sugestão de aplicação no referido nível de ensino constitui apenas um exemplo das potencialidades que o problema tem de ser adaptado.

O principal proveito no estudo do problema de Malfatti prendeu-se com o trabalho no âmbito da geometria inversiva, a propósito da resolução do problema de Malfatti-Steiner. No entanto, sentimos algumas dificuldades com as construções geométricas, dada a sua complexidade, como se pode observar pelos roteiros apresentados. A existência de mais do que uma solução para o problema aguçou-nos a curiosidade, sendo esta a responsável pela secção 5.3.3.

A escolha dos problemas a estudar teve por base as geometrias a serem abordadas. Ao longo do desenvolvimento do trabalho, observamos que, para além da evidente constatação de estarem relacionados com o triângulo, os mesmos podem ser observados de uma forma conjunta.

No quarto capítulo, aquando do estudo do problema de Fagnano, sendo as alturas do triângulo dado coincidentes com as bissetrizes do triângulo órtico, notamos que a solução do problema e o triângulo inicial são triângulos perspetivos do ortocentro do primeiro triângulo. A partir desta observação, obtivemos o resultado da proposição 3.2.3 (figura 7.1). À configu-

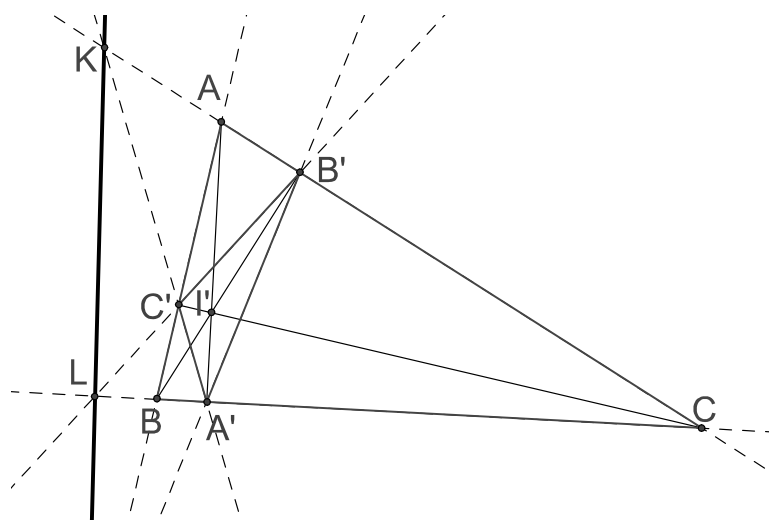


Figura 7.1: O triângulo órtico é perspetivo do triângulo dado.

ração da figura 7.1, podemos acrescentar a solução do problema de Malfatti. Com a inscrição do triângulo órtico $[A'B'C']$, o triângulo $[ABC]$ fica decomposto em quatro triângulos, onde podemos obter a solução do problema de Malfatti para cada um deles (figura 7.2). Pela propriedade 4.2.1, temos que os triângulos $[AC'B']$, $[C'BA']$ e $[B'A'C]$ são semelhantes entre si e ao triângulo $[ABC]$, pelo que os respetivos círculos de Malfatti são facilmente obtidos a partir da solução de qualquer um dos triângulos.

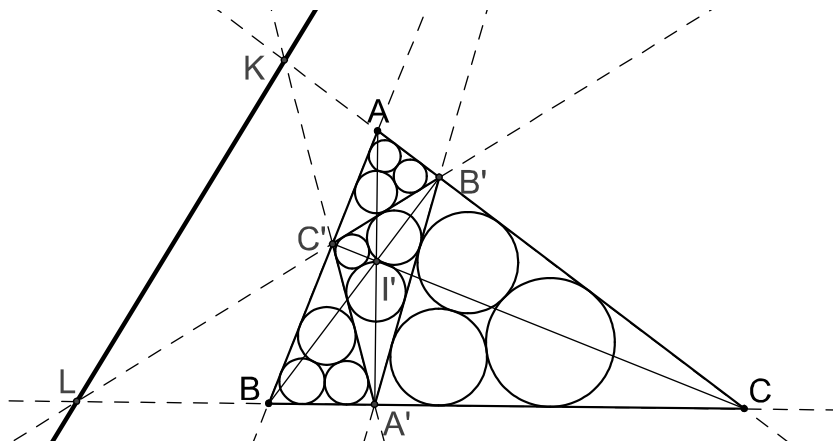


Figura 7.2: Visão conjunta dos três problemas estudados.

Relativamente ao triângulo órtico, a solução já não é tão fácil. Podemos recorrer às soluções analítica e geométricas estudadas no capítulo 5. Contudo, a solução analítica também pode ser obtida a partir do triângulo dado. Aplicando as igualdades 5.12 ao triângulo órtico da figura 7.2, obtemos

$$\begin{aligned} 2a &= s - r + \overline{I'A'} - \overline{I'B'} - \overline{I'C'} \\ 2b &= s - r - \overline{I'A'} + \overline{I'B'} - \overline{I'C'} \\ 2c &= s - r - \overline{I'A'} - \overline{I'B'} + \overline{I'C'} \end{aligned}$$

onde s representa o semiperímetro do triângulo órtico, r representa o raio da circunferência inscrita nesse triângulo e I' o respetivo incentro. Verificamos que todos os comprimentos podem ser obtidos a partir do triângulo $[ABC]$. Como o ponto I' coincide com o ortocentro do triângulo $[ABC]$, temos que os valores de $\overline{I'A'}$, $\overline{I'B'}$ e $\overline{I'C'}$ correspondem à distância do ortocentro a cada um dos lados do triângulo $[ABC]$.

Na secção 4.2.5, observamos que o perímetro do triângulo órtico pode ser obtido a partir do triângulo inicial. O raio da circunferência inscrita no triângulo órtico também pode ser obtido a partir do triângulo inicial. Constatamos que é possível conhecer a solução analítica do problema de Malfatti no triângulo órtico a partir do triângulo dado.

Com a recolha de informação histórica, confirmamos que a evolução de uma ciência não é linear, como muitas vezes parece, quando nos limitamos a estudar os seus resultados sem atendermos à sua origem. Na bibliografia consultada encontramos muito poucas referências a Fagnano e à sua obra, tendo que recorrer a outra fonte de busca. A maior parte da informação apresentada na secção 4.1 foi obtida com recurso à internet, em sites de informação fidedigna.

A pesquisa histórica revelou alguns aspetos que consideramos muito interessantes. Ficou mais aguçada a nossa curiosidade por esta área, na busca de informações que possam mostrar aos alunos que no estudo de uma ciência, tal como na vida em geral, existem avanços e recuos. Pensamos que, desta forma, também é possível contribuir para a sua formação pessoal, apelando à importância da perseverança e aos benefícios que o erro pode ter na aprendizagem, em todas as áreas da vida.

Desde o início do projeto, a escolha para o resultado prático do trabalho desenvolvido recaiu no jogo. Dada a experiência letiva nos ensinamentos básico e secundário, essencialmente no ensino básico, consideramos que a vertente lúdica, devidamente conduzida, pode constituir

uma mais-valia no processo ensino-aprendizagem. Com o Jogo do Paralelo pensamos ter dado um contributo neste sentido, uma vez que o jogo aplica o conceito de paralelismo entre outros fundamentos, podendo ser utilizado em contexto de sala de aula, e teve uma boa aceitação por parte dos alunos. Num trabalho futuro pretendemos explorar o jogo do ponto de vista da teoria dos jogos combinatórios, tema que sai fora do âmbito desta dissertação.

A curto prazo, os benefícios adquiridos com o trabalho desenvolvido para a elaboração desta dissertação terão o seu reflexo na prática letiva, essencialmente ao nível do ensino da geometria euclidiana. Aliás, podemos dizer que já sentimos uma evolução neste sentido com a lecionação do tópico de geometria no nono ano, no presente ano letivo. Todavia, toda a informação adquirida ao nível das restantes geometrias serviu para consolidar conceitos, para abrir horizontes e ter conhecimentos necessários para dar respostas a questões muitas vezes colocadas pelos alunos. Para além disso, apercebemo-nos de que, ao contrário do que possa parecer, as geometrias não euclidianas têm a sua aplicação prática nas mais diversas áreas como na Arte, na Biologia, na Cristalografia, na Física, entre outras. A título de curiosidade, deixamos a nota de que a razão cruzada tem aplicação no cálculo de distâncias em fotografias aéreas, como se pode verificar em [6] (pp. 145) e que a geometria hiperbólica tem relação com a teoria da relatividade.

Para além dos contributos e benefícios adquiridos a nível da lecionação, podemos dizer que adquirimos ferramentas para desenvolver projetos na área da geometria. Fica a convicção de que é possível, de uma forma simples, apresentar as geometrias não euclidianas aos alunos do ensino secundário.

Bibliografia

- [1] ACHESON, David – 1089 e Tudo o Resto: Uma Viagem pela Matemática. Lisboa: Relógio D'Água Editores, 2002. ISBN 978-989-641-278-4
- [2] ANDREATTA, Marco, BEZDEK, András e BORONSKI, Jan P. – *The Problem of Malfatti: Two Centuries of Debate*, Springer Science+Business Media, LLC (2010) [Consult. a 24.07.2012]. Disponível em <http://alpha.science.unitn.it/~andreatt/Malfatti.pdf>.
- [3] AYRES JR., Frank – *Theory and Problems of Projective Geometry*. New York: Schaum Publishing Company, 1967.
- [4] BOTTEMA, Oene – "The Malfatti Problem". *Forum Geometricorum*. Volume 1, 43-50 (2001) [Consult. a 06.07.2012]. Disponível em <http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200107.pdf>.
- [5] BOYER, Carl B. – *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blucher LTDA, 1974.
- [6] BRANNAN, David A., ESPLEN, Matthew F. e GRAY, Jeremy J. – *Geometry*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-59787-0
- [7] CABRAL, João M. G. – *As Transformações de Mobius e as Isometrias do Plano Hiperbólico: Tese apresentada no âmbito da prestação de provas A.P.C.C.* Ponta Delgada: Universidade dos Açores, 2002.
- [8] CASSE, Rey – *Projective Geometry: An Introduction*. New York: Oxford University Press, 2006. ISBN 978-0-19-929886-0
- [9] CHIANG, Ching-Shoei, HOFFMANN, Cristoph M. e ROSEN, Paul – *A Generalized Malfatti Problem*. [Consult. 24.07.2012]. Disponível em <http://www.cs.purdue.edu/homes/.../Malfatti.pdf>.
- [10] COURANT, Richard e ROBBINS, Herbert – *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford: Oxford University Press, 1978. ISBN 0-19-502517-2
- [11] COXETER, H. S. M. e GREITZER, S. L. – *Geometry Revisited*. Volume 19. Washington, DC: The Mathematical Association Of America, 1967. ISBN 0-88385-619-0
- [12] DÖRRIE, Heinrich – *100 Great Problems of Elementary Mathematics: Their History and Solution*. New York: Dover Publications Inc., 1965. SBN 486-61348-8

- [13] EVES, Howard – *An Introduction to the History of Mathematics*. Philadelphia: Saunders College, 1983. ISBN 0-03-062064-3
- [14] FURTADO, Maria I. – *Curvas Planas e Geometria Inversiva: Dissertação de Mestrado*. Ponta Delgada: Universidade dos Açores, 2005.
- [15] GARCÍA Capitán, Francisco J. G. – *El Triángulo Órtico en el Court* (2009) [Consult. a 07.11.2012]. Disponível em <http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero37/ortico.pdf>.
- [16] GREENBERG, Marvin J. – *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: development and history*. New York: W. H. Freeman and Company, 2008. ISBN 978-0-7167-9948-1
- [17] HA, Nguyen M. – "Another Proof of Fagnano's Inequality". *Forum Geometricorum*. Volume 4, 199-201 (2004) [Consult. a 06.05.2012]. Disponível em <http://forumgeom.fau.edu>.
- [18] HADAMARD, Jacques – *Lessons in Geometry: Plane Geometry*. EUA: American Mathematical Society, 2008. ISBN 978-0-8218-4367-3
- [19] HART, Andrew S. – "Geometrical Investigation of Steiner's Construction for Malfatti's Problem", *The Quarterly Journal*. Volume 1, 219-221 (1857) [Consult. a 24.07.2012]. Disponível em <http://books.google.pt>.
- [20] HORVÁTH, Ákos G. – *Malfatti's Problem on the Hiperbolic Plane*. Arxiv (2012) [2012arXiv1204.5014H].
- [21] KAZARINOFF, Nicholas D. – *Geometric Inequalities*. New York: Random House, 1961.
- [22] MARTIN, George E. – *Geometric Constructions*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [23] MELO, Helena – *Planos Projetivos e Estruturas Algébricas: Dissertação de Mestrado em Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo*. São Paulo, 1987.
- [24] O'CONNOR J. J. e ROBERTSON E. F. – *Giovanni Francesco Fagnano dei Tochi*. [Consult. a 03.12.2012]. Disponível em http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Printonly/Fagnano_Giovanni.html.
- [25] PEDOE, D. – *A Course of Geometry For Colleges and Universities*. Cambridge: University Press, 1970.
- [26] POSTNIKOV, M. – *Lições de Geometria Primeiro Semestre Geometria Analítica*. Moscovo: Editora Mir Moscovo, 1988. ISBN 5-03-000509-9
- [27] RINO, João – *O Jogo, Interações e Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2004. ISBN 972-8768-12-5
- [28] ROSA, A. – *Geometrias Não Euclidianas: Dissertação de Mestrado*. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2008.
- [29] ROSAMILHA, Nelson – *Psicologia do Jogo e Aprendizagem Infantil*. São Paulo: Biblioteca Pioneira das Ciências Sociais, 1979.
- [30] SÁ, António – *A Aprendizagem da Matemática e o Jogo*. 2.^a edição. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1997. ISBN 972-9053-49-9

- [31] STEVANOVIĆ, Milorad R. – "*Triangle Centers Associated With Malfatti Circles*". *Forum Geometricorum*. Volume 3, 83-93 (2003) [Consult. a 17.07.2012]. Disponível em <http://forumgeom.fau.edu>.
- [32] STEVENSON, Frederick W. – *Projective Planes*. University of Arizona: W. H. Freeman and Company, 1972. ISBN 0-7167-0443-9
- [33] <http://www.cut-the-Knot.org> [Consult. a 21.01.2013].
- [34] <http://mathworld.wolfram.com> [Consult. a 13.08.2012].

