Limite: uma noção (real) fundamental!

Por: Maria do Carmo Martins
mika@uac.pt
Professora do Departamento
de Matemática da Universidade dos Açores

Hoje é o meu penúltimo dia de trabalho antes de ir para férias e véspera nostálgica do meu aniversário! Estou assim no *limite* das minhas forças e da minha idade atual! Como todo o comum mortal anseio pelo sol e pelo lazer! Contudo, antes de começar a boa vida e despertar alguma “inveja” ao leitor, ainda vamos abordar um tópico fundamental da matemática: a noção de limite.

Para exemplificar o conceito de limite, vamos considerar um círculo com 15 centímetros de raio. Matematicamente, um círculo é o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao centro é menor ou igual que um dado valor, ao qual chamamos raio. Um exemplo quotidiano de círculo é uma bolacha “redonda” e sem buracos. (1) Desenhemos no interior deste círculo um triângulo equilátero (um triângulo cujos lados têm o mesmo comprimento) de modo a que os vértices do triângulo sejam pontos da circunferência (ver figura). Agora, dentro deste triângulo equilátero, (2) construamos um círculo que toque num só ponto de cada lado do triângulo. (3) Dentro deste segundo círculo, desenhemos um quadrado cujos vértices sejam pontos da circunferência. (4) No interior do quadrado desenhemos um círculo, ainda mais pequeno, que toque num só ponto de cada lado do quadrado. (5) No interior deste círculo desenhemos um pentágono regular. Continuemos a encaixar alternadamente um círculo e um polígono regular cujo número de lados aumente uma unidade em cada passo da construção (ver figura).

Indubitavelmente, a área das figuras vai diminuindo em cada construção. Assim sendo, qual é a última área definida por esta sequência de figuras? A nossa intuição leva-nos a responder que deveria ser zero, pois continuando este processo iríamos obter um ponto isolado. Bom, mais uma vez somos traídos pela nossa intuição. E porquê? Porque à medida que o número de lados de um polígono aumenta, este torna-se “mais circular”, e a dada altura o processo quase que consiste em colocar um círculo dentro de outro com uma perda muito pequena de área de um passo de construção para o seguinte. O limite deste processo é um círculo com o mesmo centro do original, cujo raio tem aproximadamente 1,25 centímetros. O leitor deve estar a pensar - Fenomenal! Ou então, o que tem isso de interessante? Hum... ora vamos lá. O importante é que conseguimos deduzir e prever analiticamente o que vai acontecer, quando fisicamente já não conseguimos manipular a figura. Aí entra o raciocínio e as relações matemáticas existentes entre a medida do lado do polígono regular (triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, etc.) e o raio do círculo que está circunscrito ao polígono.

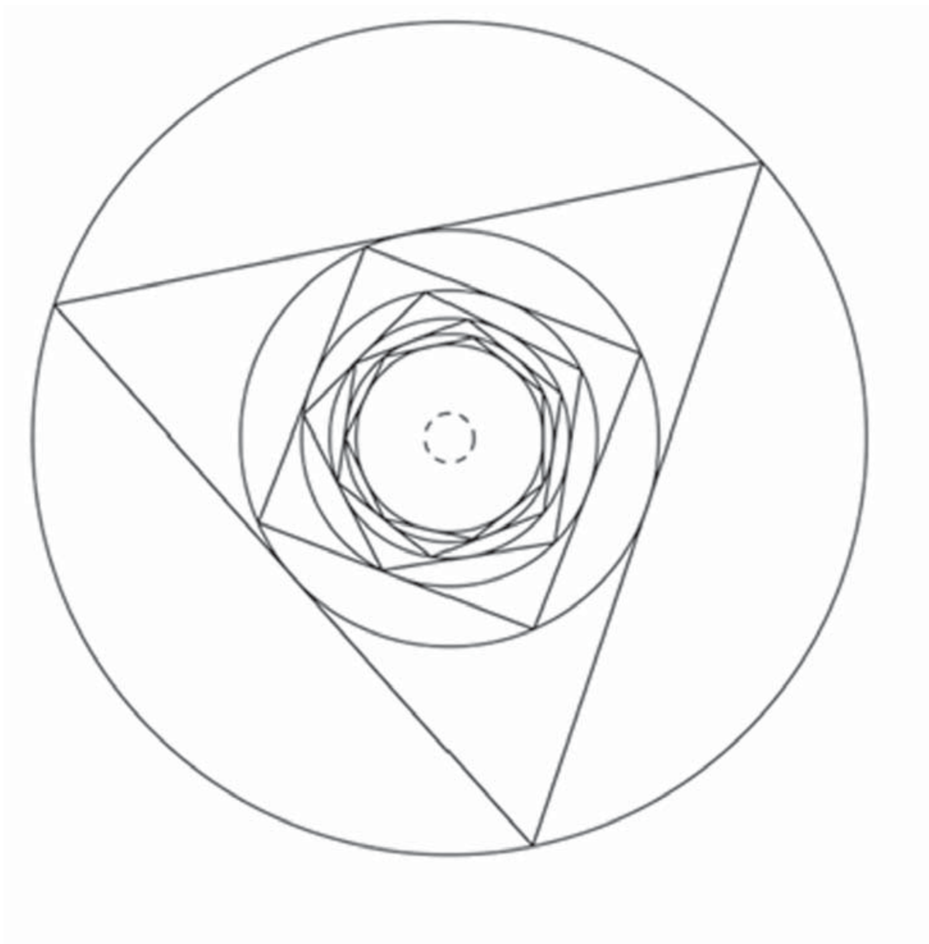
Muitos outros problemas do dia-a-dia conduzem a limites, que são igualmente contraintuitivos. Tomemos como exemplo o ordenado anual do Cristiano Ronaldo: 18 000 000€ (segundo alguns jornais). Para se ter uma noção desta quantia exorbitante vamos dividir este valor por períodos de tempo mais curtos. Ora, isto significa que ele ganha 1 500 000€ por mês; 346 153€ por semana; 49 315€ por dia; 2 054€ por hora; 34€ por minuto; 0,57€ por segundo e 0,0057€, ou seja *nada,* por centésimo de segundo. No limite, CR7 ganha tanto como qualquer um de nós!

A noção de limite é frequentemente considerada como o conceito fundamental do Cálculo - ramo da matemática, desenvolvido a partir da álgebra e da geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Sem tal noção somos forçados a basearmo-nos em aproximações e médias. Os limites capturam formalmente a nossa intuição de algo *a tender para*, ou *a aproximar-se de* um valor final e esclarecem a ligação entre figuras ideais e infinidade.

Contudo, é preciso sermos cautelosos com a importância dada aos limites nas disciplinas iniciais de cálculo. O desconhecimento das definições exatas de limite e das suas noções associadas não dificultou a árdua tarefa de Isaac Newton (1642-1727) (ver imagem) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), os inventores do Cálculo. A salientar que estes dois notáveis matemáticos trabalharam com bastante sucesso apenas no domínio intuitivo dos limites. Efetivamente, Newton utilizou o cálculo e as suas outras ideias embrionárias acerca do movimento e da gravitação para ajudar a orientar os desenvolvimentos mais revolucionários de sempre na nossa conceção do mundo físico. Contudo, o desconhecimento de tais definições não atrasou o trabalho notável de Leonard Euler (1707-1783) nem o da prestigiosa família Bernoulli, no século XVIII.

O problema inicial das áreas encaixadas explora a ingenuidade de quem não está familiarizado com este tipo de problemas, mas a compreensão da noção de limite ajuda a resolvê-lo. A noção de limite foi estabelecida no século XIX pelos matemáticos Augustin Louis Cauchy (1789-1857), Richard Dedekind (1831-1916) e Karl Weierstrass (1815-1897). Uma parte desse fundamento assenta no limite de uma sequência de números. Seja então L o limite de uma dada sequência. O que significa dizer que “L é o limite”? Quer dizer que para qualquer distância D, não importando quão pequena seja, a diferença entre os termos da sequência e o número L torna-se e permanece inferior a D, à medida que avançamos na sequência.

Vejamos alguns exemplos: (I) a sequência de números 1/2; 2/3; 3/4; 4/5; 5/6; ... (ou seja, 0,5; 0,666...; 0,75; 0,8; 0,8333...; ...) aproxima-se de 1, uma vez que para qualquer distância D se pode mostrar que a diferença entre os termos desta sequência e o número 1 se torna (e permanece) inferior a D. Matematicamente isto significa dizer que a distância entre cada um dos termos da sucessão e o número 1 é sempre menor que D, isto é, que $|1/2 - 1| < D$; $|2/3 - 1| < D$ ... (II) A sequência 1, 1/2; 1/3; 1/4; 1/5; 1/6; ... aproxima-se de 0, pois para qualquer distância D mostra-se que a diferença entre os termos desta sequência e o número 0 torna-se e permanece inferior a D. Neste caso, dizemos que a sequência é um infinitésimo.



Isaac!Newton!

Gottfried!Leibniz!

Conhecida a definição de limite de uma sequência, podemos definir o limite de uma função $y=f(x)$ quando x se aproxima de um número b. Intuitivamente, y aproxima-se de L tanto quanto queiramos sempre que x esteja suficientemente próximo de b. Com esta definição podemos caraterizar a noção fundamental do Cálculo Diferencial: a derivada de uma função. Ao defini-la como um limite de uma certa função quociente associada, evitamos muitas das críticas feitas a Sir Newton. Estas queixas centravam-se na descrição feita por Newton da velocidade instantânea de um objeto como o limite informal de quocientes, distâncias percorridas divididas por tempos decorridos, e a sua necessidade imediata de explicar como é que estas quantidades podiam ser ao mesmo tempo iguais a zero e diferentes de zero (recorde-se o vencimento de CR7, que é simultaneamente igual a zero, pois o dinheiro que ele ganha por centésimo de segundo é aproximadamente zero, mas a quantia anual não é).

Não é fácil perceber a noção de limite, mas a sua definição exata é necessária e imprescindível para esclarecer o que significa, por exemplo, a velocidade com que o CR7 ganha dinheiro, a área de uma região curva e uma miríade de construções matemáticas.