Trabalhando com números fracionários

João Cabral*

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$$
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$
$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$
$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$
$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$$
$$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$$
$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$$
$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$$
$$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$$
$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$$

Figura 1

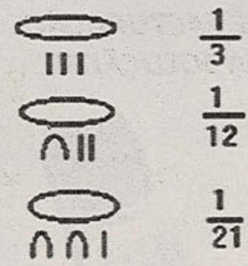

Figura 2

Hoje vamos falar sobre números fracionários. Um conjunto de números que provocam sempre alguma resistência na aprendizagem quando começam a ser trabalhados no 2º ciclo do ensino básico em Portugal. Mas, pela sua extrema utilidade e eficácia na representação de certas quantidades, não podem cair no esquecimento, surgindo com muita frequência em processos de cálculo numérico. Assim, o que é um número fracionário?

Em primeiro lugar convém esclarecer primeiro o conceito de fração. Uma fração é uma forma de representação numérica de quantidades que usa números inteiros na sua construção e um símbolo que normalmente se designa de traço. Este traço pode ser escrito na horizontal "__" ou na diagonal "/". O número inteiro que colocamos acima do traço é designado de numerador e o que é colocado abaixo do traço é designado de denominador. Em processos de cálculo o traço representa a divisão numérica habitual. Por exemplo, 2/5 é uma fração. Lê-se dois quintos. Esta fração 2/5 representa um número, mas também uma quantidade quando admitimos que o traço representa a operação divisão. Assim é muito comum escrever 2/5 = 0,4. Isso quer dizer que a quantidade representada por 2/5 é a mesma do que a quantidade representada no sistema decimal 0,4. Esta igualdade entre quantidades nos dois sistemas de escrita faz com que se estabeleça algumas relações que já fazem parte da nossa linguagem do dia-a-dia. Por exemplo dizer que "dois elementos em cinco" de um conjunto é o mesmo do que "quatro décimas" de um conjunto. Aqui reside a importância das frações, pois sem grandes raciocínios, com as frações podemos ter uma ideia clara da ordem de grandeza da quantidade que estamos a falar em relação ao conjunto, em contraste com as quatro décimas de um conjunto que obriga a um pequeno cálculo. Para clarificar, imaginemos que queremos escolher 231 elementos de um conjunto de 725 elementos. Muito rapidamente podemos dizer que estamos a escolher 231/725 partes desse conjunto. Quando escolhemos 15 elementos deste conjunto de 725 elementos, podemos dizer que escolhemos 15/725 partes desse conjunto. Além do mais, a escrita fracionária permite-nos rapidamente verificar a relação de ordem existente entre as quantidades representadas, e dizer claramente sem fazer cálculo algum que 231/725>15/725. Até as quantidades que os números naturais representam podem ser escritas sob a forma de fração, como por exemplo, 3=6/2, admitindo outras representações como 12/4 ou 24/8.

Um número fracionário é um número que é escrito em forma de fração, mas que em termos de quantidade não é número inteiro. Deduz-se assim que uma fração nem sempre é um número fracionário. Temos o exemplo de 10/5, que é uma fração, mas é um número inteiro, o dois. Então como podemos identificar um número fracionário de uma forma prática? Usamos para o efeito a quantidade que o número fracionário representa na forma decimal, à qual chamamos de dízima. Assim, quando dizemos que 2/5=0,4 estamos a dizer que 0,4 é a dízima de 2/5. Existem dois tipos de dízima nas quantidades representadas por números fracionários: as dízimas finitas e as dízimas infinitas periódicas. As dízimas finitas são números cuja componente decimal é finita na sua escrita, como por exemplo 0,234. As dizimas infinitas periódicas são números cuja componente decimal é infinita em termos de escrita, onde encontramos um padrão de repetição, como por exemplo 0,234234234234234234... = 0,(234).

Atualmente, com o surgimento das calculadoras, e com a possibilidade de adquirir por valores quase irrisórios esta peça de tecnologia, trabalhar com quantidades representadas por números fracionários tornou-se uma tarefa bastante simples. O cálculo limita-se à identificação da dízima do respetivo número e a operar consoante a operação envolvida, usando aproximações dos valores quando as dízimas são infinitas periódicas. Com isso o peso que as frações tinham no passado, em termos de cálculo mental, e a sua extrema utilidade, foi-se desvanecendo com o tempo. O problema de delegar o cálculo mental nas calculadoras, tal como aconteceu com as antigas tabuadas, fez com que as novas gerações perdessem inúmeros raciocínios lógico-dedutivos de construção matemática na resolução de vários problemas.

Os egípcios e os babilónios foram os primeiros povos a trabalhar com frações. Para os egípcios, uma fração era uma parte da unidade pelo que, apenas trabalhavam com frações cujo numerador era a unidade, como por exemplo 1/3, 1/4 e 1/8. Neste caso estas frações tomam o nome de frações unitárias.

"Com o surgimento das calculadoras, e com a possibilidade de adquirir por valores quase irrisórios esta peça de tecnologia, trabalhar com quantidades representadas por números fracionários tornou-se uma tarefa bastante simples. O cálculo limita-se à identificação da dízima do respetivo número e a operar consoante a operação envolvida..."

Para representar outras frações como por exemplo a quantidade 2/5 os egípcios escreviam 1/3+1/15.

Um dos aspetos a tomar em consideração quando procedemos a algum tipo de cálculo que envolva frações é saber tornar estas irredutíveis. Para tornar uma fração irredutível basta dividir numerador e denominador pelo máximo divisor comum entre ambos. Se o resultado final do processo de tornar irredutível uma fração não for um número inteiro então estamos na presença de um número fracionário. Assim, na presença de dois números fracionários irredutíveis p/q e r/s, temos p/q + r/s =(p x s+r x p)/q x s, sendo fácil de ver que se os denominadores forem iguais, para obter a adição basta manter o denominador e somar os numeradores. Mas, os egípcios não aplicavam este processo, e o processo de adicionar dois números fracionários tornava-se um pouco moroso, embora não constituísse dificuldade alguma pois elas já eram apresentadas na forma de uma soma, sendo ensinadas ao longo das gerações como se de uma tabuada se tratasse. O problema consistia em transformar qualquer fracção do tipo 2/n em somas de frações unitárias, pois as multiplicações e as divisões eram realizadas recorrendo a sucessivas duplicações. Para o efeito, os escribas egípcios elaboraram uma tabela de decomposição de fracções deste tipo em somas de fracções unitárias, que se encontra registada no histórico papiro de Ahmes. Na figura 1 podemos ver alguns exemplos presentes no papiro. Na figura 2 podemos observar três exemplos de como os egípcios representavam as suas frações. Para o povo egípcio um traço vertical representava uma unidade, um osso de calcanhar invertido representava dez unidades, um laço valia cem unidades, uma flor de lótus valia mil unidades, um dedo dobrado valia dez mil unidades, um girino representava cem mil unidades, uma figura ajoelhada, talvez representando um deus, representava um milhão de unidades.

Trabalhar com frações, sem recurso à sua dízima, torna-se bastante prático, tal como os egípcios já tinham notado. Por exemplo, se quisermos dividir 5 sacos de trigo entre 8 pessoas, usando frações unitárias o cálculo é mais prático, do que fazer a mesma divisão pesando 5/8 dos grãos para cada um. Inicialmente podemos dar meio saco para cada um, o que significa que já dividimos 4 sacos, porque 1/2 x 8 = 4. Resta um saco que, se for dividido em 8 partes, dá mais uma parte para cada um. Como dividir um saco em 8 partes é apenas dividir o saco pela metade, estas metades novamente em metades e, finalmente, estas novas metades em metades, ficamos com 5/8 = 1/2 + 1/8. Note-se que este procedimento de raciocínio ainda hoje é usado pelas nossas gentes, especialmente em profissões como o de moleiro. Para quem entrar nos antigos moinhos de água, ainda funcionais, ou então fizer uma visita ao museu de Ponta Delgada, vai notar a existência de pequenas caixas que serviam para medir a quantidade de cereal, umas maiores do que as outras, uma medida, uma meia medida, um quarto de medida, etc.

Uma segunda razão prática para trabalhar com frações, segundo a perspectiva egípcia, reside na facilidade em comparar quantidades. Com uma calculadora disponível podemos dizer que 3/4 é maior do que 4/5, apostando nos valores das dízimas respetivas. Mas se não tivermos calculadora disponível, o que fazer? Usando frações unitárias não é preciso fazer conta alguma. Basta verificar que 3/4 = 1/2 + 1/4 e que 4/5 = 1/2 + 1/4 + 1/20. Agora, se a pergunta fosse: o que é maior, 1/2 + 1/4 ou 1/2 + 1/4 + 1/20? A resposta é imediata. Ainda, como bónus, ficamos a saber que o segundo valor é 1/20 maior do que o primeiro!

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
Diretor do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação
jcabral@uac.pt