A invariância dos números e os sistemas de numeração

Por: Maria do Carmo Martins
Professora do Departamento de Matemática
da Universidade dos Açores
milka@uac.pt

FINGER SYMBOLS
(From a manual published in 1520)

Hoje 6 de novembro é um dia particularmente abundante em acontecimentos e efemérides. Da extensa lista, destacamos os seguintes: em 1817 realizou-se o casamento de D. Pedro I (D. Pedro IV de Portugal) com a imperatriz Leopoldina; em 1913 Gandhi é preso enquanto liderava uma marcha de mineiros indianos que trabalhavam na África do Sul. É ainda o dia em que nasceu James Gregory (1638-1675) um matemático e astrónomo escocês, que ficou conhecido pela primeira demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo (que estabelece a ligação entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral) e pela descoberta das séries de Taylor, tópicos que ainda hoje são lecionados em algumas unidades curriculares do ensino superior.

Começo com uma pequena estória que traduz a inquietação habitual dos pais em quererem proporcionar a melhor educação aos seus filhos. Conta-se que certo dia um mercador alemão do século XV perguntou a um ilustre professor para onde é que deveria enviar o seu filho de modo que este tivesse uma excelente educação comercial que o preparasse devidamente para uma vida profícua e bem sucedida. O professor, homem sábio e eloquente, prontamente retorquiu que as universidades alemãs seriam suficientes para ensinar o rapaz a adicionar e a subtrair, mas para ele aprender a multiplicar e a dividir teria de ir para Itália. Para perceber a moral da história, tente o leitor multiplicar ou dividir os números representados no sistema de numeração romana por CLXIV e MDCVI sem os converter primeiro no nosso sistema de numeração habitual.

Antes de avançar, convém precisar os termos **número, numeral** e **algarismo**. Infelizmente estes três conceitos básicos são, por vezes, usados como tendo o mesmo significado. **Número** é a ideia de uma quantidade, que pode ser expressa de várias maneiras consoante o sistema de numeração usado. **Numeral** é toda e qualquer representação de um número. **Algarismo** é todo o símbolo usado para formar os numerais escritos, representativos dos números.

Um sistema de numeração é um conjunto de símbolos e de regras utilizados para a produção dos numerais. Por exemplo, num relógio, utilizamos o numeral 12 para representar a quantidade de horas correspondentes a meio-dia. No entanto, há relógios que utilizam XII para representar essa mesma quantidade. Neste caso dizemos que são utilizados dois sistemas de numeração diferentes: o hindu-árabe (que usamos) e o romano, respetivamente. No sistema hindu-árabe cada algarismo tem um valor diferente consoante a posição que ocupa no numeral. Por exemplo, 21 na base decimal, que usamos no nosso dia-a-dia, atribui o peso de vinte unidades ao algarismo 2 e de uma unidade ao algarismo 1 (21 = 2 x 10 + 1), enquanto em 12 o mesmo algarismo 1 vale agora 10 unidades, e o algarismo 2 vale somente duas unidades (12 = 1 x 10 + 2). Já no sistema de numeração romano cada símbolo tem sempre o mesmo valor e o numeral representativo do número é construído adicionando o valor dos símbolos que compõem este numeral. Nesse sistema, como sabemos, M representa 1000; D, 500; C, 100; V, 5; e I, 1; pelo que MDCVI corresponde a 1000 + 500 + 100 + 5 + 1 = 1606.

Os números (a ideia de quantidade) são invariantes, mas os numerais, isto é, a forma de os representar, não o são! A estória do mercador brinca com o facto de ser mais fácil usar um ou outro sistema de numeração. Com efeito, no sistema de numeração hindu-árabe efetuamos sem problema a multiplicação 164 x 1606 (= 263 384). Contudo, se nos pedirem o resultado de CLXIV x MDCVI, já é bem mais complicado.

A história dos sistemas de numeração é longa, estendendo-se desde a pré-história até ao Renascimento, altura em que se adotou o nosso sistema atual: o sistema de numeração posicional decimal. Indubitavelmente, é o sistema mais usado pela humanidade e recorre a dez algarismos (0, 1, 2, ..., 9).

Daqui em diante vamos centrar a nossa atenção em sistemas de numeração posicionais, dos quais o sistema de numeração hindu-árabe é um caso particular. Nestes sistemas os números podem ser representados de forma diferente consoante a **base** utilizada. Base designa a quantidade de algarismos disponíveis num sistema de numeração. Há que ter em conta as seguintes regras: (1) em qualquer sistema de numeração não há algarismos iguais ou superiores à base; (2) em cada sistema há tantos algarismos quantas as unidades da base. Concretizando, no sistema hindu-árabe, existem dez algarismos de 0 a 9 e nenhum deles vale mais do que 10. Portanto, o sistema que usamos é um sistema de numeração de base 10 (ou decimal). Como exemplo, o numeral 1606 que anteriormente representamos no sistema de numeração romano, corresponde, em base decimal, a 1000 + 600 + 0 + 6 = (1 x 10^3) + (6 x 10^2) + (0 x 10^1) + (6 x 10^0). Contraste o leitor com o sistema romano e o valor absoluto dos seus dígitos.

Consideremos outro exemplo: 2014, o ano civil corrente. O que significa esse número na base 10? Ora 2014 = 2000 + 10 + 4, pelo que escrevemos 2014 = (2 x 10^3) + (0 x 10^2) + (1 x 10^1) + (4 x 10^0). Nesta representação recorremos às potências de base 10. Construímos o numeral 2014 multiplicando e adicionando; podemos destruí-lo (decompô-lo) recorrendo às operações inversas: divisão e subtração. Se dividirmos 2014 por 10, obtemos 201 e restam 4; consecutivamente, se dividirmos 201 por 10, obtemos 20 e resta 1; ainda, se dividirmos 20 por 10, obtemos 2 e resta 0; por último, se dividirmos 2 por 10, obtemos 0 e resta-nos 2. Note-se que os sucessivos restos correspondem aos dígitos do número 2014, das unidades para os milhares, 4, 1, 0 e 2. Ou seja, se colecionarmos os restos por ordem contrária, obtemos o numeral 2014.

Vamos agora dar exemplos da representação de um número em bases diferentes da base decimal. Para evitar morosidade e complexidade desnecessárias, iremos considerar um número mais pequeno: o correspondente a 40 na base decimal. Comecemos a conversão para o sistema binário, o qual é o mais frequente no mundo da computação digital. Neste sistema de base 2 só dispomos dos algarismos 0 e 1 para representar qualquer número, pelo que o nosso objetivo consiste em escrever 40 usando apenas os algarismos 0 e 1. Há pelo menos dois processos que podemos aplicar. Um deles consiste em fazer divisões sucessivas pela base como ilustrámos acima para a base 10, só que neste caso vamos dividir por 2 (a base). Ora 40/2 = 20 (e resta 0); 20/2 = 10 (e resta 0); 10/2 = 5 (e resta 0); 5/2 = 2 (e resta 1); 2/2 = 1 (e resta 0); 1/2 = 0 (e resta 1). Colecionando os restos pela ordem contrária à sua obtenção tem-se 101000 que corresponde a 40 em base 10. Vamos representar *x_(n)* o numeral *x* na base *n*. Assim, 40_(10) = 101000_(2). Outro modo de proceder à conversão consiste em recorrer às potências de base 2, pelo que 40 = 32 + 8 = 1 x 2^5 + 1 x 2^3 = (1 x 2^5) + (0 x 2^4) + (1 x 2^3) + (0 x 2^2) + (0 x 2^1) + (0 x 2^0) = 101000_(2).

Façamos agora um exercício semelhante de conversão para base ternária que utiliza os algarismos 0, 1 e 2. Para convertermos 40 no sistema de base 3 façamos sucessivas divisões por 3. Ora, 40/3 = 13 (e resta 1); 13/3 = 4 (e resta 1); 4/3 = 1 (e resta 1); 1/3 = 0 (e resta 1). Ou seja, 40_(10) = 1111_(3). Podemos ter um sistema de base qualquer, sendo que os mais frequentes na computação digital são o sistema binário, o octal (base 8) e o hexadecimal (base 16). Nesta última base usam-se os algarismos de 0 a 9 e as letras A, B, C, D, E e F, sendo A=10, B=11, ... e F=15.

Permitam-me uma breve viagem aos problemas abordados na escola primária. Todos nós resolvemos problemas da forma: "Quantos dias são 56 horas?" Ou "quantas horas são 189 minutos?" Estes dois exemplos ilustram uma aplicação direta, no quotidiano, dos sistemas de numeração na base 24 e na base 60, respetivamente. A resolução do primeiro consiste simplesmente em dividir 56 por 24 (um dia tem 24 horas), obtendo-se o quociente 2 e o resto 8. Deste modo, 56 horas são 2 dias e 8 horas, pelo que no sistema de numeração de base 24, escrevemos 56 = (2x24^1)+(8x24^0) = 28_(24). Relativamente ao segundo problema, dividimos 189 por 60 (1 hora tem 60 minutos), tendo-se 3 como quociente e 9 como o resto da divisão. Assim, 189 minutos são 3 horas e 9 minutos, pelo que 189 = (3x60^1)+(9x60^0) = 39_(60).

Ao longo da história, muitos foram os meios utilizados para representar números: novelos com nós nos fios, o ábaco, a tábua de contar e o mais pessoal dos apetrechos: a mão humana. Contar pelos nossos dedos das mãos é um fenómeno nato e quase universal que inevitavelmente acabou por dar origem à base 10 amplamente utilizada.