



UNIVERSIDADE DOS AÇORES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

\vee -CONGRUÊNCIAS E COBERTURAS
DE
SEMIGRUPOS \vee -SEMI-RETICULADOS INVERSOS

Ana Paula de Ornelas Garrão

PONTA DELGADA

2004

\vee -CONGRUÊNCIAS E COBERTURAS
DE
SEMIGRUPOS \vee -SEMI-RETICULADOS INVERSOS

Ana Paula de Ornelas Garrão

Dissertação submetida à Universidade dos Açores para obtenção do grau de Doutor em Matemática na especialidade de Álgebra, co-orientada pelos Professores Doutores Donald Beaton McAlister, da Northern Illinois University, U.S.A, e Gracinda Maria dos Santos Gomes Moreira da Cunha, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.

PONTA DELGADA

2004

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento no âmbito do Projecto de Investigação número 87/99.

Resumo

Nesta dissertação é nosso objectivo estudar questões sobre congruências e coberturas de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

Se G é um l -grupo, o semigrupo $L^\vee(G)$ das classes laterais dos l -ideais de G , e o semigrupo $C^\vee(S)$ constituído pelo conjunto vazio e pelos subconjuntos permissíveis de um semigrupo inverso S , com a relação de inclusão e a sua inversa, respectivamente, constituem exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

Dado um semigrupo \vee -semi-reticulado, não necessariamente inverso, apresentamos um critério que permite verificar se uma dada congruência é ou não uma \vee -congruência. Num semigrupo inverso, se ρ é uma congruência normal definida nos idempotentes são conhecidas as congruências ρ_{\min} e ρ_{\max} , respectivamente, a menor e maior congruência com traço ρ . Se S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso descrevemos as congruências normais que são traço de \vee -congruências em S . Se o semigrupo S é E -unitário, mostramos que a congruência ρ_{\min} , associada a uma dada congruência \vee -normal ρ , é uma \vee -congruência, pelo que é a menor \vee -congruência com esse traço. Este resultado pode não ser verdadeiro se S não é E -unitário. No caso em que o semigrupo S é \vee -acessível, dada uma congruência \vee -normal ρ , a relação ρ_{\max} é a maior \vee -congruência com traço ρ . Descrevemos as \vee -congruências que separam idempotentes através dos respectivos sistemas de núcleo. Em particular, mostramos que o reticulado destas \vee -congruências é distributivo e, como consequência, o reticulado das \vee -congruências com

um dado traço é também distributivo. No entanto, o reticulado de todas as \vee -congruências não é, sequer, modular. Caracterizamos ainda, através dos respectivos núcleos, as congruências de l -grupo e as congruências de l -grupo com zero associadas a um dado ideal primo de S .

Quanto ao estudo de coberturas E^\vee -unitárias de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos, obtemos uma condição necessária e suficiente para a sua existência. Construimos uma cobertura E^\vee -unitária para os semigrupos \vee -semi-reticulados inversos $L^\vee(G)$ e $C^\vee(S)$, quando S é E -unitário.

Estudamos também os semigrupos inversos totalmente ordenados, concluindo que estes possuem uma cobertura E^\vee -unitária totalmente ordenada se e só se são E -unitários. Utilizando este último resultado mostramos que o quociente de um semigrupo inverso E -unitário totalmente ordenado por uma sua \vee -congruência arbitrária é sempre um semigrupo E -unitário.

Abstract

Given an l -group G , the semigroup $L^\vee(G)$ consisting of all the cosets of the l -ideals of G , and the semigroup $C^\vee(S)$ constituted by the empty set together with the permissible subsets of an inverse semigroup S , with the inclusion relation and its reverse, respectively, are important natural examples of \vee -semi-lattice inverse semigroups.

In a \vee -semi-lattice semigroup we present conditions for a congruence to be a \vee -congruence. If S is an inverse semigroup and ρ is a normal congruence on the idempotents of S the congruences ρ_{\min} and ρ_{\max} , respectively the smallest and the largest congruence with trace ρ , are known. In a \vee -semi-lattice inverse semigroup S we describe the normal congruences which are traces of \vee -congruences in S . If the semigroup S is E -unitary, we show that the congruence ρ_{\min} , associated to a given \vee -normal congruence ρ , is also a \vee -congruence, and thus the smallest \vee -congruence with that trace. This result may not be true if S is not E -unitary. In case the semigroup S is \vee -amenable, given a \vee -normal congruence, ρ , the relation ρ_{\max} is the largest \vee -congruence with trace ρ . We describe \vee -congruences which separate idempotents through their kernel systems. In particular, we show that the lattice of these congruences is distributive and, as a consequence, the lattice of \vee -congruences, with a given trace, is also distributive although the lattice of all \vee -congruences need not even to be modular. We also characterize, in terms of their kernels, the l -group congruences and the l -group with zero congruences associated to a given prime ideal of S .

We obtain a necessary and sufficient condition for the existence of E^\vee -unitary covers for \vee -semi-lattice inverse semigroups. Using these conditions we build an E^\vee -unitary cover for the \vee -semi-lattice inverse semigroups $L^\vee(G)$ and $C^\vee(S)$, when S is E -unitary.

We also study the totally ordered inverse semigroups concluding that they have totally ordered E^\vee -unitary covers if and only if they are already E -unitary. Using the latter result, we show that the quotient of an E -unitary totally ordered inverse semigroup by one of its arbitrary \vee -congruences is always an E -unitary inverse semigroup.

Agradecimentos

Aos meus orientadores, Professores Donald Beaton McAlister e Gracinda Gomes Moreira da Cunha, quero manifestar o meu profundo reconhecimento pelo apoio científico e pessoal que me prestaram e sem o qual este trabalho não teria sido possível realizar.

Aos meus pais, à minha irmã e à minha amiga Dr^a Alcina Soares agradeço o permanente estímulo e o apoio prestado aquando das minhas deslocações a Lisboa. Agradeço também ao meu filho que suportou as minhas ausências.

Agradeço ainda a todos os colegas e amigos que, directa ou indirectamente, me apoiaram das mais diversas formas. Quero expressar um agradecimento especial à minha colega Rita Brandão pelo apoio que me prestou na escrita deste trabalho.

À Universidade dos Açores, em particular ao Departamento de Matemática, agradeço o apoio logístico e a dispensa do serviço docente.

Ao Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa agradeço as facilidades concedidas, em parte através dos projectos POCTI/MAT/32440/2000 “Álgebra e Aplicações” e POCTI-ISFL-1-143 “Álgebra Fundamental e Aplicada”.

À Fundação Luso-Americana para o Desenvolvimento agradeço o apoio financeiro, no âmbito do Projecto de Investigação número 87/99.

Conteúdo

| | |
|---|-----------|
| Resumo | iii |
| Abstract | v |
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 5 |
| 1.1 Conjuntos parcialmente ordenados | 5 |
| 1.2 Semigrupos | 8 |
| 1.2.1 Semigrupos inversos | 12 |
| 1.2.2 Semigrupos parcialmente ordenados | 17 |
| 1.2.3 Álgebras livres | 19 |
| 1.3 Grupos parcialmente ordenados | 20 |
| 1.4 Exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos | 23 |
| 1.4.1 O semigrupo $C^\vee(S)$ | 24 |
| 1.4.2 Os semigrupos $K(G)$, $K^\vee(G)$ e $L^\vee(G)$ | 27 |
| 2 \vee-Congruências em semigrupos \vee-semi-reticulados inversos | 39 |
| 2.1 Condições para que uma congruência seja \vee -congruência | 40 |
| 2.2 Maior \vee -congruência contida numa relação de equivalência | 48 |
| 2.3 Traços de \vee -congruências | 50 |
| 2.3.1 A menor \vee -congruência com certo traço, num semi-grupo inverso E -unitário | 55 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.3.2 | A maior \vee -congruência com certo traço, num semi-grupo inverso \vee -acessível | 59 |
| 2.4 | \vee -Congruências que separam idempotentes | 60 |
| 2.5 | Congruências de l -grupo | 67 |
| 2.6 | Congruências de l -grupo com zero | 73 |
| 2.6.1 | Congruências de l -grupo com zero em que zero é o elemento máximo do conjunto quociente | 73 |
| 2.6.2 | Congruências de l -grupo com zero em que zero é o elemento mínimo do conjunto quociente | 77 |
| 3 | Coberturas E^\vee-unitárias de semigrupos inversos | 85 |
| 3.1 | P -semigrupos | 86 |
| 3.2 | Coberturas E^\vee -unitárias | 88 |
| | Problemas | 105 |
| | Bibliografia | 107 |

Introdução

Num semigrupo inverso S as congruências estão intrinsecamente ligadas às suas imagens homomorfas, pelo que a sua descrição é preciosa. De todas as classes de semigrupos nas quais as congruências têm sido estudadas, é na classe dos semigrupos inversos que são conhecidos mais resultados. Em particular, num semigrupo inverso as congruências admitem duas bem conhecidas caracterizações: uma por sistemas de núcleo normais e outra por pares de congruência. A primeira, inicialmente apresentada por Wagner em [Wag53], foi posteriormente completada por Preston em [Pre54] e a segunda deve-se a Petrich [Pet78].

Dada uma congruência θ em S , o seu traço, $tr \theta$, é a sua restrição à banda comutativa $E(S)$, dos idempotentes de S , o seu núcleo, $Ker \theta$, é o conjunto dos elementos de S relacionados com algum idempotente de S e o seu sistema de núcleo, $K(\theta)$, é o conjunto das classes dos idempotentes de S .

As congruências em S com um mesmo traço formam um reticulado completo e modular, mais ainda, formam um intervalo fechado no reticulado de todas as congruências. Reilly e Scheiblich [RS67] descreveram ρ_{\min} e ρ_{\max} , respectivamente, a menor e a maior congruência com traço ρ .

A descrição de coberturas de um semigrupo inverso S é, de certo modo, o problema oposto ao do estudo das congruências, já que, neste caso, se procura encontrar semigrupos dos quais S é agora imagem homomorfa. Nesta área põem-se imediatamente duas questões: saber se existem coberturas de um dado tipo e encontrar métodos de construção. No que respeita à existência

de coberturas E -unitárias, é bem conhecido que todo o semigrupo inverso possui uma cobertura E -unitária [McA74a]; quanto a técnicas de construção existem várias, nomeadamente as de McAlister e Reilly [MR77]. Recordemos ainda que todo o semigrupo E -unitário é isomorfo a um P -semigrupo [McA74b].

Generalizando o conceito de l -grupo, definimos semigrupo \vee -semi-reticulado inverso como sendo um semigrupo parcialmente ordenado que é um \vee -semi-reticulado e em que a multiplicação no semigrupo é distributiva em relação à operação \vee . Sobre a teoria dos l -grupos muito se sabe, mas em relação à teoria dos semigrupos \vee -semi-reticulados inversos há pouca informação disponível.

Esta dissertação tem por objectivo efectuar um estudo de \vee -congruências e coberturas de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos, em paralelo com os resultados conhecidos para semigrupos inversos. Na abordagem de muitas questões fomos bem sucedidos tendo obtido respostas completas. Algumas perguntas postas foram parcialmente respondidas e outras não chegaram a ser consideradas, esperamos, no entanto, vir a obter mais resultados no futuro.

No primeiro capítulo começamos por apresentar conceitos e resultados, de ordem geral, já conhecidos, que julgamos indispensáveis para a compreensão do conteúdo dos capítulos subsequentes. É também neste capítulo que construímos, na secção 1.4, já constituída por material original, exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos, nomeadamente $K(G)$, $K^\vee(G)$, $L^\vee(G)$ e $C^\vee(S)$.

Se G é um grupo, então o conjunto $K(G)$ das classes laterais dos subgrupos de G , com a ordem inclusão, é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. Se, além disso, G é finito, mostramos que $K(G)$ é o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre sobre G .

Dado um l -grupo G , os semigrupos $K^\vee(G)$ e $L^\vee(G)$, formados pelas clas-

ses laterais, respectivamente, dos l -subgrupos convexos de G , e dos l -ideais de G , com a ordem inclusão, são também exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

O semigrupo $C^\vee(S)$ é constituído pelo conjunto vazio e pelos subconjuntos permissíveis de um semigrupo inverso S , com a relação inversa da inclusão.

No segundo capítulo estudamos \vee -congruências num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. Começamos por considerar um semigrupo \vee -semi-reticulado S e apresentamos um critério que permite verificar se uma dada congruência é ou não uma \vee -congruência; aplicando este resultado descrevemos os ideais de S associados às congruências de Rees que são \vee -congruências. Passando ao caso em que S é inverso, com conjunto de idempotentes $E(S)$, provamos que a menor congruência de grupo σ é também a menor congruência de l -grupo; descrevemos a maior \vee -congruência em S contida numa dada equivalência; e apresentamos uma condição necessária e suficiente para que uma congruência normal em $E(S)$ seja o traço de uma \vee -congruência. Se S , além de inverso, é E -unitário, mostramos que a congruência ρ_{\min} , associada a uma dada congruência \vee -normal ρ em $E(S)$ é uma \vee -congruência, pelo que é a menor \vee -congruência com esse traço. Este resultado pode não ser verdadeiro se S não é E -unitário. No caso em que o semigrupo S é inverso e \vee -acessível, dada uma congruência \vee -normal ρ em $E(S)$, a relação ρ_{\max} é a maior \vee -congruência com traço ρ .

Ainda no segundo capítulo, caracterizamos as \vee -congruências que separam idempotentes num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. Inspiramo-nos na descrição das congruências via sistemas de núcleo normais, mostrando que toda a \vee -congruência que separa idempotentes está associada a um sistema de núcleo normal de l -grupos. Neste caso, o reticulado das \vee -congruências com um dado traço é distributivo, o que não sucede com o reticulado de todas as \vee -congruências. Em seguida descrevemos as congruências de l -grupo, através dos respectivos núcleos, à semelhança do que sucede no caso das

congruências de grupo num semigrupo inverso. Terminamos este capítulo considerando as congruências de l -grupo com zero. Neste caso, zero ou é o elemento máximo do conjunto quociente ou é o seu elemento mínimo. Descrevemos estas congruências, bem como os sobre-ideais e sob-ideais primos que lhes estão associados, respectivamente.

No terceiro capítulo abordamos o estudo das coberturas E^\vee -unitárias de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. A primeira questão que se levanta é a de saber se todo o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso admite uma cobertura E^\vee -unitária. Obtemos uma condição necessária e suficiente para a existência de uma tal cobertura, fazendo uso de um resultado de McAlister e Reilly [MR77]. Em seguida, quando na presença de certos pré-homomorfismos, apresentamos um método para construir coberturas. Em particular, construímos uma cobertura E^\vee -unitária para o semigrupo $L^\vee(G)$ e para o semigrupo $C^\vee(S)$, quando S é E -unitário. Estudamos também os semigrupos inversos totalmente ordenados que admitem uma cobertura E^\vee -unitária totalmente ordenada, concluindo que tais semigrupos são exactamente aqueles que à partida já são E -unitários. Utilizando este resultado, provamos que o quociente de um semigrupo inverso E -unitário totalmente ordenado por uma sua \vee -congruência arbitrária é sempre um semigrupo E -unitário.

Capítulo 1

Preliminares

Todas as secções deste capítulo, à excepção da secção 1.4, são dedicadas à apresentação das definições e dos resultados básicos que usaremos ao longo do texto.

Na secção 1.4, já constituída por trabalho original, construímos exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos, nomeadamente os semigrupos $C^\vee(S)$ e $K(G)$ construídos à custa dos semigrupos inversos $C(S)$ e $K(G)$, dos subconjuntos permissíveis de um semigrupo inverso S e das classes laterais de um grupo G , respectivamente. Se G é um l -grupo, apresentamos, ainda, os semigrupos \vee -semi-reticulados inversos $K^\vee(G)$ e $L^\vee(G)$ formados, no primeiro caso, pelas classes laterais dos l -subgrupos convexos de G , e no segundo, pelas classes laterais dos l -ideais de G .

1.1 Conjuntos parcialmente ordenados

Começamos por considerar conjuntos parcialmente ordenados. A maioria dos conceitos aqui apresentados podem ser encontrados em [DP90], [Cal00] e [Gra78].

Um *conjunto parcialmente (totalmente) ordenado* é um par (P, \leq) formado por um conjunto P não vazio e uma relação de ordem parcial (total)

\leq em P . Se (P, \leq) é um conjunto parcialmente ordenado, dizemos que o conjunto P está *ordenado* pela relação \leq .

Dados conjuntos X e Y , uma aplicação f de X em Y e um elemento $x \in X$, denotamos por xf a imagem de x por meio de f .

Se P e Q são conjuntos parcialmente ordenados, dizemos que uma aplicação $\varphi : P \rightarrow Q$ é *isótona* se

$$a \leq b \Rightarrow a\varphi \leq b\varphi,$$

para quaisquer $a, b \in P$. Se φ é bijectiva e

$$a \leq b \Leftrightarrow a\varphi \leq b\varphi,$$

para quaisquer $a, b \in P$, dizemos que φ é um *isomorfismo de ordem*.

Um subconjunto N de um conjunto parcialmente ordenado P diz-se *convexo* se sempre que $s, t \in N$ e $s \leq x \leq t$ em P , então $x \in N$. Um subconjunto I de um conjunto parcialmente ordenado P é um *ideal de ordem* se, para quaisquer $s \in P$ e $x \in I$,

$$s \leq x \Rightarrow s \in I .$$

Num conjunto parcialmente ordenado X dizemos que um elemento a de X é *maximal* se não existe qualquer elemento x de X tal que $a \not\leq x$. Um elemento b de X é *minimal* se não existe qualquer elemento x de X tal que $x \not\leq b$.

Se em X existe um elemento a tal que $a \leq x$ ($x \leq a$), para qualquer $x \in X$, então a diz-se elemento *mínimo* (*máximo*) de X . É claro que estes elementos, se existirem, são únicos.

Seja P um subconjunto de um conjunto parcialmente ordenado X . Dizemos que um elemento a de X é um *majorante* de P se $x \leq a$, para qualquer $x \in P$. Um majorante a de P diz-se *supremo* de P se $a \leq a'$, para qualquer majorante a' de P . Dualmente, dizemos que um elemento a de X é um *minorante* de P se $a \leq x$, para qualquer $x \in P$. Um minorante a de P diz-se

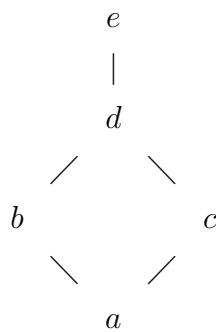
ínfimo de P se $a' \leq a$, para qualquer minorante a' de P . O supremo e o ínfimo de P podem não existir, mas se existem são únicos. O supremo de P é usualmente designado por $\vee P$ e o ínfimo por $\wedge P$. Se $P = \{a, b\}$, então representamos o supremo de P por $a \vee b$ e o ínfimo por $a \wedge b$.

Um conjunto parcialmente ordenado P é um \vee -*semi-reticulado* se, para quaisquer $a, b \in P$, existe $a \vee b$. Analogamente define-se \wedge -*semi-reticulado*. Se P é um \vee -semi-reticulado e um \wedge -semi-reticulado dizemos que P é um *reticulado*.

Num \vee -semi-reticulado P , dizemos que $M \subseteq P$ é um \vee -*subsemi-reticulado* de P se, para quaisquer $a, b \in M$, temos $a \vee b \in M$. Num reticulado L , dizemos que $M \subseteq L$ é um *subreticulado* de L se, para quaisquer $a, b \in M$, temos $a \vee b \in M$ e $a \wedge b \in M$.

Notemos que, um subconjunto de um reticulado L pode ser um reticulado sem ser um subreticulado de L , como mostra o exemplo seguinte.

Consideremos o reticulado $L = \{a, b, c, d, e\}$ com a ordem definida pelo diagrama



Seja $M = \{a, b, c, e\}$. Com a ordem definida em L o conjunto M é um reticulado. No entanto, $b \vee_L c \neq b \vee_M c$, pelo que M não é um subreticulado de L .

Um reticulado L diz-se *completo* se, qualquer subconjunto não vazio de L tem supremo e ínfimo.

Num reticulado L , temos, para quaisquer $a, b, c \in L$,

$$a \leq c \Rightarrow (a \vee b) \wedge c \geq a \vee (b \wedge c).$$

Se num reticulado L , para quaisquer $a, b, c \in L$,

$$a \leq c \Rightarrow (a \vee b) \wedge c \leq a \vee (b \wedge c),$$

dizemos que L é *modular*.

O próximo resultado, pode ser encontrado em [Cal00], Teorema 1.3, e é uma das caracterizações dos reticulados modulares.

Proposição 1.1.1 *Um reticulado L é modular se e só se, para quaisquer $a, b, c \in L$,*

$$a \leq c \text{ e } \begin{cases} a \wedge b = c \wedge b \\ a \vee b = c \vee b \end{cases} \Rightarrow a = c.$$

Dizemos que um reticulado L é *distributivo* se $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$, para quaisquer $a, b, c \in L$.

Todo o reticulado distributivo é modular.

Apresentamos a seguir uma caracterização dos reticulados distributivos (veja-se [Cal00], Teorema 1.6).

Proposição 1.1.2 *Num reticulado L , as seguintes condições são equivalentes:*

i) L é distributivo;

ii) para quaisquer $a, b, c \in L$, $\begin{cases} a \vee b = a \vee c \\ a \wedge b = a \wedge c \end{cases} \Rightarrow b = c.$

Se P e Q são \vee -semi-reticulados, dizemos que uma aplicação $\varphi : P \rightarrow Q$ é um *homomorfismo de \vee -semi-reticulados* se $a\varphi \vee b\varphi = (a \vee b)\varphi$, para quaisquer $a, b \in P$.

1.2 Semigrupos

Nesta secção usamos como referências principais os livros [How95], [Pet84] e [Law98].

Um *semigrupo* é um par (S, \cdot) formado por um conjunto S não vazio (dito o *suporte* do semigrupo) e uma operação binária \cdot em S , a qual é associativa. Não havendo perigo de ambiguidade, não usamos qualquer símbolo para designar a operação e representamos o semigrupo apenas pelo seu suporte.

Dado um semigrupo S , um elemento $e \in S$ diz-se *idempotente* se $e = e^2$. Um idempotente e diz-se *central* se, $ae = ea$, para qualquer $a \in S$. Dizemos que um semigrupo S é *comutativo* se $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in S$. Um semigrupo comutativo formado apenas por idempotentes diz-se um *semi-reticulado*. Esta designação deve-se ao resultado seguinte.

Proposição 1.2.1 *Seja (E, \leq) um \wedge -semi-reticulado. Então (E, \wedge) é um semigrupo comutativo de idempotentes e, para quaisquer $a, b \in E$,*

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Reciprocamente, se E é um semigrupo comutativo de idempotentes, então a relação definida em E por

$$a \leq b \Leftrightarrow ab = a,$$

para quaisquer $a, b \in E$, é uma relação de ordem parcial em relação à qual E é um \wedge -semi-reticulado, tendo-se $a \wedge b = ab$.

Representamos o conjunto dos idempotentes de um semigrupo S por $E(S)$, ou simplesmente, por E . Um elemento $u \in S$ tal que $xu = ux = x$, para qualquer $x \in S$, diz-se uma *identidade* de S . Tal elemento, se existir, é necessariamente único. Chamamos *monóide* a um semigrupo com identidade. Em geral, representamos a identidade de um monóide S por 1_S , ou simplesmente por 1 . Se S é um semigrupo e $1 \notin S$, denotamos por S^1 o “menor” monóide que contém S , isto é, se S é um monóide então, $S^1 = S$, caso contrário $S^1 = S \cup \{1\}$, com a multiplicação de S e onde $s.1 = 1.s = s$, se $s \in S^1$. Dizemos que um elemento $u \in S$ é um *zero* de S se, para qualquer $s \in S$, $su = us = u$. Este elemento, se existir, é único e, usualmente é

denotado por 0 . Definimos o semigrupo com zero S^0 , de modo análogo ao monóide S^1 .

Dizemos que um monóide G é um *grupo* se, para qualquer elemento $g \in G$, existe (também necessariamente único) $g' \in G$ tal que $gg' = g'g = 1$. É evidente que $E(G) = \{1\}$, para qualquer grupo G .

Sejam S um semigrupo e S' um subconjunto não vazio de S . Dizemos que S' é um *subsemigrupo* de S se for fechado para a operação de S , isto é, $ab \in S'$, para quaisquer $a, b \in S'$. Um subsemigrupo de S que é grupo (para a operação induzida pela de S), diz-se um *subgrupo* de S . Se X for um subconjunto não vazio de um semigrupo S , dizemos que um subsemigrupo S' de S é *gerado* por X , e representa-se por $\langle X \rangle$, se S' for o menor (para a relação de inclusão) subsemigrupo de S que contém X .

Sejam S e T semigrupos. Dizemos que uma aplicação $\varphi : S \rightarrow T$ é um *homomorfismo* (de semigrupos) se $a\varphi b\varphi = (ab)\varphi$, para quaisquer $a, b \in S$. Se S e T são monóides, dizemos que $\varphi : S \rightarrow T$ é um *homomorfismo de monóides* se φ é um homomorfismo de semigrupos que preserva a identidade. Um homomorfismo $\varphi : S \rightarrow T$ diz-se um *isomorfismo* se é uma aplicação injectiva e sobrejectiva. Neste caso, dizemos que os semigrupos são *isomorfos* e escrevemos $S \cong T$. Se $\varphi : S \rightarrow T$ é um isomorfismo, então a aplicação inversa $\varphi^{-1} : T \rightarrow S$ é também um isomorfismo.

Dada uma aplicação $\varphi : S \rightarrow T$, designamos por *núcleo* de φ a relação de equivalência $\bar{\varphi}$ definida em S por, para quaisquer $s, t \in S$,

$$(s, t) \in \bar{\varphi} \Leftrightarrow s\varphi = t\varphi.$$

Sejam S um semigrupo e A e B dois subconjuntos de S . Denotamos por AB o subconjunto de S definido por $AB = \{ab \in S \mid a \in A, b \in B\}$.

Dizemos que um subconjunto não vazio I de S é um *ideal* (respectivamente, um *ideal esquerdo*, um *ideal direito*) de S se $S^1IS^1 \subseteq I$ (respectivamente, $S^1I \subseteq I$, $IS^1 \subseteq I$). Um ideal (respectivamente, ideal esquerdo, ideal direito) de S diz-se *gerado* por um subconjunto X de S se for o menor

ideal (respectivamente, ideal esquerdo, ideal direito) de S que contém X . Um ideal (respectivamente, ideal esquerdo, ideal direito) de S gerado por um único elemento de S diz-se um *ideal principal* (respectivamente, *ideal principal esquerdo*, *ideal principal direito*). Se $a \in S$, o ideal principal (respectivamente, ideal esquerdo, ideal direito) gerado por a é S^1aS^1 (respectivamente, S^1a , aS^1).

Um ideal $I \neq S$ diz-se *primo* se, para quaisquer $a, b \in S$,

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I.$$

A noção de ideal leva naturalmente à consideração de certas relações de equivalência num semigrupo. Tais relações, estudadas inicialmente por J.A.Green em 1951, desempenham um papel fundamental no estudo dos semigrupos. Seja S um semigrupo. Em S , definimos as seguintes relações de equivalência:

1. $(a, b) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow S^1a = S^1b$;
2. $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$;
3. $(a, b) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (a, b) \in \mathcal{L} \text{ e } (a, b) \in \mathcal{R}$;
4. $(a, b) \in \mathcal{J} \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$.

para quaisquer $a, b \in S$.

Definimos ainda a relação \mathcal{D} como a menor equivalência de S que contém \mathcal{L} e \mathcal{R} . Como \mathcal{L} e \mathcal{R} comutam, então $\mathcal{D} = \mathcal{LR} = \mathcal{RL}$. As relações \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{H} , \mathcal{D} e \mathcal{J} são as *relações de Green*.

Dados um semigrupo S e uma relação de equivalência ρ em S , dizemos que ρ é uma *congruência* em S se, para quaisquer $s, t, u, v \in S$,

$$(s, t) \in \rho, (u, v) \in \rho \Rightarrow (su, tv) \in \rho.$$

Esta condição é equivalente a afirmar que ρ é compatível à esquerda e à direita com a multiplicação no semigrupo, isto é, para quaisquer $s, t, a \in S$,

$$(s, t) \in \rho \Rightarrow (sa, ta) \in \rho \text{ e } (as, at) \in \rho.$$

Num semigrupo S , dada uma sua congruência ρ , no conjunto quociente S/ρ definimos $[x]_\rho [y]_\rho = [xy]_\rho$, onde $[x]_\rho$ representa a ρ -classe dum elemento $x \in S$. É fácil verificar que com esta operação S/ρ constitui um semigrupo. Além disso, a relação $\rho^\natural : S \rightarrow S/\rho$, definida por $x\rho^\natural = [x]_\rho$, para qualquer $x \in S$, é um homomorfismo (dito *canónico*), de semigrupos. Se ρ é uma congruência tal que S/ρ é um grupo, dizemos que ρ é uma *congruência de grupo*.

Dado um semigrupo S , o conjunto $\mathcal{C}(S)$ das suas congruências com a ordem inclusão é um conjunto parcialmente ordenado. Além disso, se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(S)$, então $\alpha \cap \beta \in \mathcal{C}(S)$ e é o seu ínfimo, quanto ao seu supremo, este, pode ser caracterizado pelo resultado seguinte (veja-se [How95], Proposição 1.5.11).

Proposição 1.2.2 *Sejam α e β congruências num semigrupo S . Então $(a, b) \in (\alpha \vee \beta)$ se e só se existem $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \in S$ tais que*

$$(a, x_1) \in \alpha, (x_1, x_2) \in \beta, \dots, (x_{2n-1}, b) \in \beta.$$

Assim, podemos afirmar que $\mathcal{C}(S)$ é um reticulado com elemento mínimo 1_S e elemento máximo $S \times S$.

1.2.1 Semigrupos inversos

Seja S um semigrupo. Dizemos que um elemento $s \in S$ é *regular* se existe um elemento $x \in S$ tal que $s = sxs$. Se, além disso, o elemento x verificar a condição $x = xsx$, dizemos que x é um *inverso* de s em S . É evidente que todo o elemento regular possui pelo menos um inverso. De facto, se x é tal que $s = sxs$, então xsx é um inverso de s .

Um semigrupo S diz-se *regular* se todos os seus elementos são regulares. Se S é um semigrupo regular tal que cada elemento s possui um único inverso, que denotamos usualmente por s^{-1} , dizemos que S é um *semigrupo inverso*. Podemos demonstrar que um semigrupo regular é inverso se e só

se os seus idempotentes comutam. Logo se S é um semigrupo inverso E é um subsemigrupo de S . Assim, num semigrupo inverso S , se α e β são congruências em E , então $\alpha \cap \beta$ e $\alpha \vee \beta$ também o são, pelo que o conjunto $\mathcal{C}(E)$ das congruências em E é um reticulado.

Num semigrupo S definimos uma relação de ordem \leq em E por

$$e \leq f \Leftrightarrow e = ef = fe,$$

para quaisquer $e, f \in E$. Esta relação é uma relação de ordem parcial em E , usualmente designada por *ordem natural nos idempotentes*.

Se S é um semigrupo inverso, então E com a ordem natural constitui um \wedge -semi-reticulado, tendo-se $e \wedge f = ef$, pelo que, num semigrupo inverso S , o conjunto E dos seus idempotentes é usualmente designado por *semi-reticulado dos idempotentes de S* . Notemos que este facto é também uma consequência da Proposição 1.2.1, uma vez que num semigrupo inverso S o conjunto E é um semigrupo comutativo de idempotentes.

Seguidamente, apresentamos algumas propriedades elementares de semigrupos inversos, que enunciamos nas próximas proposições.

Proposição 1.2.3 *Seja S um semigrupo inverso. Então, para quaisquer $e \in E$ e $a, b \in S$,*

i) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$;

ii) $a^{-1}ea, aea^{-1} \in E$;

iii) $(a, b) \in \mathcal{L} \Leftrightarrow a^{-1}a = b^{-1}b$;

iv) $(a, b) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow aa^{-1} = bb^{-1}$;

v) $(a, b) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow aa^{-1} = bb^{-1}$ e $a^{-1}a = b^{-1}b$;

vi) $aa^{-1} = a^{-1}a$ se e só se a pertence a um subgrupo de S .

Proposição 1.2.4 *Sejam S e T semigrupos. Se $\varphi : S \rightarrow T$ é um homomorfismo e S é inverso, então $S\varphi$ também é inverso, tendo-se $(a\varphi)^{-1} = a^{-1}\varphi$, para qualquer $a \in S$.*

Proposição 1.2.5 *Sejam S um semigrupo inverso, ρ uma congruência em S e $s, t \in S$ tais que $(s, t) \in \rho$. Então $(s^{-1}, t^{-1}) \in \rho$.*

Num semigrupo inverso S , as suas congruências admitem duas bem conhecidas descrições: uma via pares de congruência e outra via sistemas de núcleo normais. A primeira deve-se a Petrich [Pet78] e a segunda, inicialmente apresentada por Wagner em [Wag53], foi posteriormente completada por Preston em [Pre54]. Vamos, a seguir, recordar essas duas caracterizações.

Seja S um semigrupo inverso. Um subconjunto de S diz-se *cheio* se contém todos os idempotentes de S . Um *subsemigrupo inverso* S' é um subsemigrupo de S fechado para inversos, isto é, tal que se $s \in S'$, então $s^{-1} \in S'$. Um subsemigrupo inverso N de S diz-se *conjugado* se, $s^{-1}Ns \subseteq N$, para qualquer $s \in S$. Um subsemigrupo de S inverso, conjugado e cheio diz-se *normal*.

Num semigrupo inverso S , dizemos que uma congruência ρ , definida no semi-reticulado E dos idempotentes de S , é *normal* se, para qualquer $a \in S$,

$$(e, f) \in \rho \Rightarrow (a^{-1}ea, a^{-1}fa) \in \rho.$$

Se ρ e θ são congruências normais, então $\rho \vee \theta$ e $\rho \cap \theta$ também o são. Logo, num semigrupo inverso S , o conjunto $\mathcal{C}_n(E)$ das suas congruências normais constitui um subreticulado do reticulado $\mathcal{C}(E)$.

Seja θ uma congruência num semigrupo inverso S . Designamos por *traço* de θ , e representamos por $tr \theta$, a restrição de θ ao semi-reticulado E dos idempotentes de S . É claro que o traço de uma congruência em S é uma congruência normal.

O próximo resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [Pet84], Teorema III.2.5.

Proposição 1.2.6 *Sejam S um semigrupo inverso e α, β congruências em S . Então*

$$\begin{cases} tr\alpha \cap tr\beta = tr(\alpha \cap \beta) \\ tr\alpha \vee tr\beta = tr(\alpha \vee \beta). \end{cases}$$

Num semigrupo inverso S , dada uma congruência ρ , designamos por *núcleo de ρ* , e representamos por $Ker \rho$, o conjunto

$$\{a \in S \mid \exists e \in E : (a, e) \in \rho\}.$$

O núcleo de uma congruência é um subsemigrupo normal.

Um *par de congruência* (N, ρ) , num semigrupo inverso S , consiste num subsemigrupo normal N e numa congruência normal ρ , definida em E , que satisfaçam as condições seguintes, para quaisquer $e \in E$ e $a \in S$,

- 1) se $ae \in N$ e $(e, a^{-1}a) \in \rho$, então $a \in N$;
- 2) se $a \in N$ então $(aa^{-1}, a^{-1}a) \in \rho$.

O próximo resultado pode ser encontrado, por exemplo, em [Pet84], Teorema III.1.5, e permite-nos caracterizar uma congruência, num semigrupo inverso, através do seu traço e do seu núcleo.

Proposição 1.2.7 *Seja S um semigrupo inverso.*

i) Se (N, γ) é um par de congruência, então a relação $\rho_{(N, \gamma)}$ definida por

$$(a, b) \in \rho_{(N, \gamma)} \iff ab^{-1} \in N \text{ e } (a^{-1}a, b^{-1}b) \in \gamma$$

é uma congruência em S com núcleo N e traço γ .

ii) Se ρ é uma congruência em S , então $(Ker \rho, tr \rho)$ é um par de congruência e, além disso, $\rho = \rho_{(Ker \rho, tr \rho)}$.

Sejam S um semigrupo inverso e ρ uma sua congruência. Designamos por *sistema de núcleo de ρ* , e denotamos por $K(\rho)$, o conjunto

$$\{[e]_\rho \mid e \in E\}.$$

Certas famílias de subsemigrupos de S com determinadas propriedades dizem-se um *sistema de núcleo normal de S* . Dado um semigrupo inverso S , é conhecida a existência de uma bijecção entre o conjunto dos seus sistemas

de núcleo normais e o conjunto das suas congruências em S , pelo que cada congruência fica determinada pelo seu sistema de núcleo [CP67]. No caso particular das congruências que separam idempotentes, isto é, cujo traço é a relação identidade, o seu sistema de núcleo será uma família de subgrupos de S com determinadas propriedades, de acordo com a seguinte definição.

Definição 1.2.8 *Sejam S um semigrupo inverso e $\mathcal{N}=\{N_e \mid e \in E\}$ uma família de subgrupos de S , disjuntos dois a dois, tais que, para quaisquer $e, f \in E$ e $a \in S$,*

- 1) $N_e N_f \subseteq N_{ef}$
- 2) $a^{-1} N_e a \subseteq N_{a^{-1}ea}$.

*Uma tal família diz-se um **sistema de núcleo normal de grupos** (s.n.n.g.) de S .*

Nesta representação N_e denota um subgrupo de S com identidade e .

O próximo resultado dá-nos uma bijecção entre o conjunto dos sistemas de núcleo normais de grupos de um semigrupo inverso e o conjunto das suas congruências que separam idempotentes, pelo que cada congruência fica determinada pelo seu sistema de núcleo (veja-se [CP67], Teorema 7.55).

Proposição 1.2.9 *Sejam S um semigrupo inverso e $\mathcal{N}=\{N_e \mid e \in E\}$ um seu s.n.n.g. Então a relação $\rho_{\mathcal{N}}$ definida por*

$$(a, b) \in \rho_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow b \in N_{aa^{-1}a}$$

é uma congruência em S que separa idempotentes cujo sistema de núcleo é \mathcal{N} .

*Reciprocamente, dada uma congruência ρ em S que separa idempotentes, então o seu sistema de núcleo é um **s.n.n.g.** de S , tendo-se $\rho = \rho_{K(\rho)}$.*

Num semigrupo inverso S é conhecida a maior congruência em S que separa idempotentes, usualmente representada por μ , e que pode ser definida por, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a, b) \in \mu \Leftrightarrow a^{-1}ea = b^{-1}eb, (\forall e \in E).$$

É também conhecida a menor congruência de grupo, usualmente representada por σ , que pode ser definida por, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a, b) \in \sigma \Leftrightarrow \exists e \in E(S) : ea = eb .$$

1.2.2 Semigrupos parcialmente ordenados

Aqui, vamos usar como referências [McA98] e [GGM00].

Um semigrupo S diz-se *parcialmente (totalmente) ordenado* se admite uma relação de ordem parcial (total) \leq compatível com a operação de S , isto é, para quaisquer $a, b \in S$ e $x, y \in S^1$,

$$a \leq b \Rightarrow xay \leq xby .$$

Um semigrupo S parcialmente ordenado diz-se *um semigrupo com uma ordem de \vee -semi-reticulado*, ou apenas um *semigrupo \vee -semi-reticulado* se, para quaisquer $a, b \in S$, existe $a \vee b$, e se a operação no semigrupo S é distributiva em relação à operação \vee , isto é, para quaisquer $a, b, c, d \in S$,

$$c(a \vee b) = ca \vee cb \text{ e } (a \vee b)d = ad \vee bd .$$

Analogamente, define-se *semigrupo com uma ordem de \wedge -semi-reticulado*, ou abreviadamente *semigrupo \wedge -semi-reticulado*.

Notemos que um semigrupo parcialmente ordenado pode ser um \vee -semi-reticulado sem ser um semigrupo \vee -semi-reticulado. Com efeito, se considerarmos um reticulado (S, \leq) , então sob a ordem \leq e o produto definido por $ab = a \wedge b$, para quaisquer $a, b \in S$, o conjunto S é um semigrupo parcialmente ordenado e um \vee -semi-reticulado. Além disso,

$$\begin{cases} a(b \vee c) = a \wedge (b \vee c) \\ ab \vee ac = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \end{cases}$$

pelo que, o semigrupo S é um semigrupo \vee -semi-reticulado se e só se o reticulado S é distributivo.

Se S é um semigrupo parcialmente ordenado e é um \vee -semi-reticulado temos o resultado seguinte.

Proposição 1.2.10 *Seja S um semigrupo parcialmente ordenado que é um \vee -semi-reticulado. Então, para quaisquer $a, b, c \in S$, temos*

$$\begin{cases} ca \vee cb \leq c(a \vee b) \\ ac \vee bc \leq (a \vee b)c. \end{cases}$$

Desta proposição podemos concluir que um semigrupo parcialmente ordenado S é um semigrupo \vee -semi-reticulado, se S é um \vee -semi-reticulado e, para quaisquer $a, b, c \in S$, se verificam as condições:

$$\begin{cases} ca \vee cb \geq c(a \vee b) \\ ac \vee bc \geq (a \vee b)c. \end{cases}$$

Dados semigrupos \vee -semi-reticulados S e T , uma aplicação $\varphi : S \rightarrow T$ diz-se um *homomorfismo de semigrupos \vee -semi-reticulados*, ou simplesmente um *\vee -homomorfismo*, se $a\varphi b\varphi = (ab)\varphi$ e $a\varphi \vee b\varphi = (a \vee b)\varphi$, para quaisquer $a, b \in S$.

Num semigrupo \vee -semi-reticulado S , uma relação de equivalência ρ diz-se *compatível com \vee* se, para quaisquer $s, t, a \in S$,

$$(s, t) \in \rho \Rightarrow (a \vee s, a \vee t) \in \rho .$$

É fácil verificar que esta condição é equivalente a afirmar que, para quaisquer $s, t, u, v \in S$,

$$(s, t) \in \rho , (u, v) \in \rho \Rightarrow (s \vee u, t \vee v) \in \rho .$$

Designamos por *\vee -congruência* toda a congruência compatível com \vee . Se $\varphi : S \rightarrow T$ é um \vee -homomorfismo, então o seu núcleo, $\bar{\varphi}$, é claramente uma \vee -congruência em S .

Dados um semigrupo \vee -semi-reticulado S e uma sua \vee -congruência ρ , no conjunto quociente S/ρ definimos $[x]_\rho [y]_\rho = [xy]_\rho$ e $[x]_\rho \vee [y]_\rho = [x \vee y]_\rho$, para $x, y \in S$. É fácil verificar que com estas operações o semigrupo S/ρ constitui um semigrupo \vee -semi-reticulado. Além disso, a aplicação canónica $\rho^\natural : S \rightarrow S/\rho$, definida por $x\rho^\natural = [x]_\rho$, para qualquer $x \in S$, é um \vee -homomorfismo.

Num semigrupo \vee -semi-reticulado S , denotemos por $\mathcal{C}^\vee(S)$ o conjunto das suas \vee -congruências. Se $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\vee(S)$, temos $\alpha \cap \beta, \alpha \vee \beta \in \mathcal{C}^\vee(S)$, pelo que $\mathcal{C}^\vee(S)$ é um subreticulado do reticulado $\mathcal{C}(S)$.

Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , o conjunto E dos seus idempotentes é um \vee -subsemi-reticulado de S (veja-se [McA98], Proposição 3.1.7). Com este facto, é fácil provar que, se ρ é uma \vee -congruência em S , então o seu traço é uma \vee -congruência em E e o seu núcleo, $\text{Ker } \rho$, é um \vee -subsemi-reticulado de S .

1.2.3 Álgebras livres

Em [Gra79] podemos encontrar os principais conceitos e resultados associados ao estudo de álgebras livres. Recordemos a definição de álgebra livre.

Definição 1.2.11 *Seja \mathcal{S} uma classe de álgebras tipo- C . Sejam $F \in \mathcal{S}$, X um conjunto não vazio e f uma aplicação de X em F . O par (F, f) diz-se uma **álgebra tipo- C livre sobre X** se, para quaisquer $S \in \mathcal{S}$ e aplicação θ de X em S , existe um e um só homomorfismo ϕ tipo- C de F em S tal que $f\phi = \theta$.*

Designamos por *variedade* uma classe de álgebras tipo- C fechada para subálgebras, imagens homomorfas e produtos directos.

Proposição 1.2.12 *Seja X um conjunto não vazio. Se \mathcal{S} é uma variedade tipo- C , então existe uma álgebra tipo- C livre sobre X , gerada por X como uma álgebra tipo- C . Mais ainda, uma tal álgebra é única a menos de isomorfismo.*

Tendo em conta a proposição anterior, denotamos apenas por $\mathcal{F}(X)$ uma álgebra livre (F, f) sobre X .

1.3 Grupos parcialmente ordenados

Nesta secção, vamos recordar alguns resultados específicos sobre grupos parcialmente ordenados que podemos encontrar em [Dar95] e [McA98].

Dados um grupo G e uma relação de ordem parcial \leq , dizemos que G é um *grupo parcialmente ordenado* se, para quaisquer $g_1, g_2, x, y \in G$,

$$g_1 \leq g_2 \Rightarrow xg_1y \leq xg_2y.$$

Apresentamos, a seguir algumas propriedades de grupos parcialmente ordenados.

Proposição 1.3.1 *Seja (G, \leq) um grupo parcialmente ordenado. Então, para quaisquer $a, b \in G$, temos $a \leq b$ se e só se $b^{-1} \leq a^{-1}$.*

Corolário 1.3.2 *Seja G um grupo parcialmente ordenado com identidade 1. Se $g \leq 1$ ($g \geq 1$), para qualquer $g \in G$, então $G = \{1\}$.*

Proposição 1.3.3 *Seja G um grupo parcialmente ordenado e $a, b \in G$. Então existe $a \vee b$ em G se e só se existe $a \wedge b$ em G e existe $a \wedge b$ em G se e só se existe $a \vee b$ em G . Além disso, para quaisquer $a, b, g \in G$,*

- i) $a \vee b = a(a \wedge b)^{-1}b$;*
- ii) $a \wedge b = b(a \vee b)^{-1}a$;*
- iii) $a \wedge b = (a^{-1} \vee b^{-1})^{-1}$;*
- iv) $a \vee b = (a^{-1} \wedge b^{-1})^{-1}$;*
- v) $g(a \vee b) = ga \vee gb$, $(a \vee b)g = ag \vee bg$;*
- vi) $g(a \wedge b) = ga \wedge gb$, $(a \wedge b)g = ag \wedge bg$.*

Como consequência da Proposição anterior, temos:

Corolário 1.3.4 *Seja G um grupo parcialmente ordenado. As seguintes condições são equivalentes:*

- i) G é um \vee -semi-reticulado;*
- ii) G é um \wedge -semi-reticulado.*

Designamos por *grupo com uma ordem de reticulado* ou, abreviadamente, *l -grupo*, um semigrupo \vee -semi-reticulado (ou semigrupo \wedge -semi-reticulado) que é grupo.

Já observámos que um semigrupo parcialmente ordenado pode ser um \vee -semi-reticulado sem ser um semigrupo \vee -semi-reticulado. No entanto, se o semigrupo parcialmente ordenado é um grupo e é um \vee -semi-reticulado (ou \wedge -semi-reticulado), atendendo à condição *v)* (ou *vi)* da Proposição 1.3.3, é necessariamente um l -grupo.

Um subgrupo A de um l -grupo G diz-se um *l -subgrupo* de G , se A for um subreticulado de G . Designamos por *l -ideal* um l -subgrupo normal e convexo.

Já referimos que, um subconjunto de um reticulado L pode ser um reticulado sem ser um subreticulado de L . No entanto, se o subconjunto for um subgrupo de um l -grupo G temos o resultado seguinte.

Proposição 1.3.5 *Sejam G um l -grupo e N um subgrupo \vee -subsemi-reticulado de G . Então N é um subreticulado de G .*

Apresentamos, a seguir, algumas propriedades de l -grupos.

Proposição 1.3.6 *Seja (G, \leq) um l -grupo com identidade 1. Então, para quaisquer $g \in G$ e $n \in N$, se $g^n \geq 1$ então $g \geq 1$.*

Tendo em conta que num grupo finito todos os seus elementos têm ordem finita, podemos concluir da proposição anterior e do Corolário 1.3.2, o seguinte:

Corolário 1.3.7 *Qualquer l -grupo finito é trivial.*

Proposição 1.3.8 *Seja (G, \leq) um l -grupo com identidade 1. Um subgrupo H de G é um \vee -subsemi-reticulado de G se e só se $a \vee 1 \in H$, para qualquer $a \in H$.*

O próximo resultado é uma consequência da decomposição de Riesz, que pode ser encontrada em [Dar95], Teorema 3.11.

Proposição 1.3.9 *Sejam (G, \leq) um l -grupo com identidade 1 e $x \in G$ tal que $1 \leq x \leq mn$, com $1 \leq n$ e $1 \leq m$. Então existem n_1 e $m_1 \in G$ tais que $x = m_1 n_1$, onde $1 \leq n_1 \leq n$ e $1 \leq m_1 \leq m$.*

Demonstração

Como $1 \leq x \leq mn$, então $m^{-1} \leq m^{-1}x \leq n$. Logo

$$1 \leq m^{-1}x \vee 1 \leq n \vee 1 = n,$$

pelo que, se $n_1 = m^{-1}x \vee 1$, obtemos $1 \leq n_1 \leq n$.

Seja $m_1 = xn_1^{-1}$. Então $x = m_1 n_1$ e

$$m_1 = x(m^{-1}x \vee 1)^{-1} = x(x^{-1}m \wedge 1) = m \wedge x.$$

Mas, uma vez que $1 \leq m, x$, concluímos que $1 \leq m \wedge x = m_1 \leq m$ □

Deste último resultado podemos concluir o seguinte:

Corolário 1.3.10 *Seja (G, \leq) um l -grupo com identidade 1. Se N e M são l -subgrupos convexos de G , então o subgrupo $\langle M, N \rangle$, gerado por M e N , é também um l -subgrupo convexo de G .*

O próximo resultado é semelhante à caracterização das congruências, num grupo arbitrário, através dos seus subgrupos normais.

Proposição 1.3.11 *Seja G um l -grupo com identidade 1. Se H é um l -ideal de G , então a relação ρ_H definida por*

$$(a, b) \in \rho_H \iff ab^{-1} \in H$$

é uma congruência em G compatível com \vee e com \wedge .

Reciprocamente, se θ é uma congruência em G , compatível com \vee e com \wedge , e H é a θ -classe de 1, então H é um l -ideal de G e, além disso, $\theta = \rho_H$.

Demonstração

Como H é um subgrupo normal, temos que ρ_H é uma congruência no grupo G . Por outro lado, sabemos por [McA98], Lema 1.3.2, que ρ_H é compatível com \vee e com \wedge , visto que, sendo H um l -ideal, então H é l -subgrupo convexo de G . Logo ρ_H é ao mesmo tempo congruência e respeita \vee e \wedge .

Quanto à condição recíproca, o raciocínio é análogo. \square

Podemos pois afirmar que, num l -grupo existe um isomorfismo de ordem (inclusão) entre o reticulado dos seus l -ideais e o reticulado das suas congruências compatíveis com \vee e \wedge . Assim, uma vez que, num l -grupo, o reticulado das suas congruências compatíveis com \vee e \wedge constitui um reticulado distributivo (veja-se [McA98], Corolário 1.3.4) concluímos o seguinte:

Proposição 1.3.12 *O reticulado dos l -ideais de um l -grupo é distributivo.*

Se G^0 é um grupo parcialmente ordenado com zero 0 em que G é um \vee -semi-reticulado (ou \wedge -semi-reticulado) dizemos que G^0 é um l -grupo com zero 0.

1.4 Exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos

Nesta secção apresentamos exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos, nomeadamente $C^\vee(S)$, $K(G)$, $K^\vee(G)$ e $L^\vee(G)$.

Se G é um grupo, então o conjunto $K(G)$, das classes laterais dos subgrupos de G , com a ordem inclusão, é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.

Se, além disso, G é finito, mostramos que $K(G)$ é o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre sobre G .

Dado um l -grupo G , os semigrupos $K^\vee(G)$ e $L^\vee(G)$, formados pelas classes laterais, respectivamente, dos l -subgrupos convexos de G , e dos l -ideais de G , com a ordem inclusão, são também exemplos de semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

O semigrupo $C^\vee(S)$ é constituído pelo conjunto vazio e pelos subconjuntos permissíveis de um semigrupo inverso S , com a relação inversa da inclusão.

1.4.1 O semigrupo $C^\vee(S)$

Os próximos resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [Law98].

Seja S um semigrupo inverso. Em S definimos uma relação de ordem parcial \leq por, para quaisquer $s, t \in S$,

$$s \leq t \Leftrightarrow s = te$$

para algum $e \in E$. Esta relação é designada por *ordem natural* e o semigrupo diz-se *naturalmente ordenado*.

Enunciemos algumas propriedades da relação de ordem natural.

Proposição 1.4.1 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado. Então E é um ideal de ordem de S .*

Proposição 1.4.2 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado. As seguintes condições são equivalentes, para quaisquer $s, t \in S$,*

- i) $s \leq t$;
- ii) $s = ft$, para algum $f \in E$;
- iii) $s = ss^{-1}t$;
- iv) $s = ts^{-1}s$;
- v) $s^{-1} \leq t^{-1}$.

Proposição 1.4.3 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado.*

Então, para quaisquer $e \in E$ e $s, t, u, v \in S$,

- i) $se \leq s$;*
- ii) $set \leq st$;*
- iii) se $s \leq t$ e $u \leq v$, então $su \leq tv$.*

Definição 1.4.4 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado. Um subconjunto não vazio A de S diz-se **permissível** se:*

- i) é um ideal de ordem;*
- ii) $st^{-1}, s^{-1}t \in E$, para quaisquer $s, t \in A$.*

Um subconjunto A de S que satisfaz a condição *ii)* da definição anterior diz-se *compatível*.

Proposição 1.4.5 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado e A um subconjunto, não vazio, compatível de S . Então, para quaisquer $i, j \in A$, temos $(i, j) \in \sigma$.*

Demonstração

Sejam $i, j \in A$. Como A é um subconjunto compatível, temos $ij^{-1}, i^{-1}j \in E$. Tomemos $e = ij^{-1} \in E$. Então

$$ei = ij^{-1}i = i(j^{-1}j)(j^{-1}i) = i(j^{-1}i)(j^{-1}j) = (ij^{-1})(ij^{-1})j = ej.$$

Logo $(i, j) \in \sigma$. □

Apresentamos, a seguir, algumas propriedades dos subconjuntos permissíveis de um semigrupo inverso naturalmente ordenado.

Proposição 1.4.6 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado e A um subconjunto permissível de S .*

- i) Se $s, t \in A$ e $s^{-1}s = t^{-1}t$ então $s = t$.*
- ii) Se $s, t \in A$ e $ss^{-1} = tt^{-1}$ então $s = t$.*
- iii) Temos $AA^{-1} = \{aa^{-1} \mid a \in A\}$, $A^{-1}A = \{a^{-1}a \mid a \in A\}$ e AA^{-1} , $A^{-1}A$ são ambos ideais de ordem de S .*

Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado. Denotamos por $C(S)$ o conjunto dos subconjuntos permissíveis de S . Temos o seguinte resultado:

Teorema 1.4.7 *Seja S um semigrupo inverso naturalmente ordenado. Então o conjunto $C(S)$ com a operação produto de subconjuntos de S é um semigrupo inverso em que:*

i) a ordem natural é a inclusão;

ii) com a ordem inversa da inclusão o semigrupo $C^\vee(S) = C(S) \cup \{\emptyset\}$ é um semigrupo \vee -semi-reticulado tendo-se $A \vee B = A \cap B$.

Demonstração

ii) É fácil provar que se A e B são subconjuntos de S não disjuntos e permissíveis, então a sua intersecção é também um subconjunto permissível de S . Seja $C^\vee(S) = C(S) \cup \{\emptyset\}$. É claro que $C^\vee(S)$ com a ordem inversa da inclusão é um semigrupo com zero e um \vee -semi-reticulado tendo-se $A \vee B = A \cap B$. Verifiquemos que é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

Atendendo à Proposição 1.2.10, basta verificar que, para quaisquer $A, B, C \in C^\vee(S)$,

$$\begin{cases} AC \cap BC \subseteq (A \cap B)C \\ CA \cap CB \subseteq C(A \cap B). \end{cases}$$

Se $AC \cap BC = \emptyset$ temos $AC \cap BC \subseteq (A \cap B)C$. Suponhamos que $AC \cap BC \neq \emptyset$ e seja $x \in AC \cap BC$. Então existem $a \in A, b \in B$ e $c, d \in C$ tais que $x = ac = bd$. Como C é compatível, $dc^{-1} \in E$, pelo que $bdc^{-1} \leq b$. Portanto, uma vez que B é um ideal de ordem, $bdc^{-1} \in B$. Por outro lado, temos $(bd)c^{-1} = (ac)c^{-1} = a(cc^{-1}) \leq a$ e, como A é um ideal de ordem, $bdc^{-1} \in A$. Assim, obtemos $x = ac = (ac)c^{-1}c = (bd)c^{-1}c = (bdc^{-1})c$, pelo que $x \in (A \cap B)C$.

A prova da outra condição é análoga. □

1.4.2 Os semigrupos $K(G)$, $K^\vee(G)$ e $L^\vee(G)$

Dado um grupo G com identidade 1 , representamos por $K(G)$ o conjunto

$$\{Hx \mid H \text{ é subgrupo de } G \text{ e } x \in G\}.$$

Em $K(G)$ definimos, para quaisquer $Hx, Ky \in K(G)$, a operação binária

$$Hx \cdot Ky = (H \vee xKx^{-1})xy,$$

onde $H \vee xKx^{-1}$ representa o menor subgrupo de G que contém H e xKx^{-1} . Então [MR77]:

- i) com esta operação $K(G)$ é um semigrupo inverso com identidade $\{1\}$, tal que $(Hx)^{-1} = (x^{-1}Hx)x^{-1}$;
- ii) os idempotentes de $K(G)$ são os subgrupos de G ;
- iii) a ordem natural em $K(G)$ é a inversa da inclusão.

Mostremos que este semigrupo, com a ordem inclusão, é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, tendo-se, para quaisquer $Hx, Ky \in K(G)$,

$$Hx \vee Ky = \langle H, K, xy^{-1} \rangle x,$$

onde $\langle H, K, xy^{-1} \rangle$ representa o subgrupo de G gerado por xy^{-1} , H e K .

Começemos por verificar que o semigrupo é parcialmente ordenado.

Uma vez que H e K são subgrupos de G ,

$$Hx \subseteq Ky \Leftrightarrow \begin{cases} H \subseteq K \\ xy^{-1} \in K. \end{cases}$$

Sejam $Hx, Ky, Lz \in K(G)$ e suponhamos que $Hx \subseteq Ky$.

Como $H \subseteq K$ então $L \vee zHz^{-1} \subseteq L \vee zKz^{-1}$. Por outro lado, temos $xy^{-1} \in K$, pelo que $(zx)(zy)^{-1} = z(xy^{-1})z \in zKz^{-1} \subseteq L \vee zKz^{-1}$. Logo $(L \vee zHz^{-1})zx \subseteq (L \vee zKz^{-1})zy$ e, portanto, $Lz \cdot Hx \subseteq Lz \cdot Ky$.

Provemos, agora, que $Hx \cdot Lz \subseteq Ky \cdot Lz$, isto é,

$$(H \vee xLx^{-1})xz \subseteq (K \vee yLy^{-1})yz.$$

Uma vez que $xy^{-1} \in K$, então $(xz)(yz)^{-1} = xy^{-1} \in K \vee yLy^{-1}$.

Seja $l \in L$. Então $xlx^{-1} = (xy^{-1})(yly^{-1})(yx^{-1}) \in K(yLy^{-1})K$. Como $K \vee yLy^{-1}$ é o menor subgrupo de G que contém K e yLy^{-1} , também contém todos os produtos de elementos de K e de yLy^{-1} . Logo $xLx^{-1} \subseteq K \vee yLy^{-1}$. Por outro lado, como $H \subseteq K$, então $H \subseteq K \vee yLy^{-1}$. Assim, $K \vee yLy^{-1}$ é um majorante de H e de xLx^{-1} , pelo que, $H \vee xLx^{-1} \subseteq K \vee yLy^{-1}$.

Concluimos que o semigrupo $K(G)$ é parcialmente ordenado.

Provemos que $K(G)$ é um \vee -semi-reticulado. Sejam $Hx, Ky \in K(G)$. Vamos mostrar que

$$Hx \vee Ky = \langle H, K, xy^{-1} \rangle x.$$

É claro que $Hx \subseteq \langle H, K, xy^{-1} \rangle x$.

Seja $k \in K$. Então $ky = (k(xy^{-1})^{-1})x \in \langle H, K, xy^{-1} \rangle x$. Portanto $Ky \subseteq \langle H, K, xy^{-1} \rangle x$.

Provemos, agora, que $\langle H, K, xy^{-1} \rangle x$ é o menor majorante de Hx e de Ky .

Seja $Lz \in K(G)$ tal que $Hx \subseteq Lz$ e $Ky \subseteq Lz$.

Como $xz^{-1}, yz^{-1} \in L$, obtemos $xy^{-1} = (xz^{-1})(yz^{-1})^{-1} \in L$. Por outro lado, temos $H, K \subseteq L$. Logo $\langle H, K, xy^{-1} \rangle \subseteq L$. Assim, concluimos que $\langle H, K, xy^{-1} \rangle x \subseteq Lz$.

Finalmente, verifiquemos que $K(G)$ é um semigrupo \vee -semi-reticulado. Atendendo à Proposição 1.2.10, falta provar que, para quaisquer $Hx, Ky, Lz \in K(G)$,

$$\begin{cases} (Hx \vee Ky) \cdot Lz \subseteq Hx \cdot Lz \vee Ky \cdot Lz \\ Lz \cdot (Hx \vee Ky) \subseteq Lz \cdot Hx \vee Lz \cdot Ky, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} (\langle H, K, xy^{-1} \rangle \vee xLx^{-1})xz \subseteq (\langle H \vee xLx^{-1}, K \vee yLy^{-1}, xy^{-1} \rangle)xz \\ (L \vee z \langle H, K, xy^{-1} \rangle z^{-1})zx \subseteq (\langle L \vee zHz^{-1}, L \vee zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle)zx. \end{cases}$$

Temos $\langle H, K, xy^{-1} \rangle \subseteq \langle H \vee xLx^{-1}, K \vee yLy^{-1}, xy^{-1} \rangle$.

Por outro lado, $xLx^{-1} \subseteq H \vee xLx^{-1}$, pelo que,

$$xLx^{-1} \subseteq \langle H \vee xLx^{-1}, K \vee yLy^{-1}, xy^{-1} \rangle.$$

Logo $\langle H \vee xLx^{-1}, K \vee yLy^{-1}, xy^{-1} \rangle$ é um majorante de $\langle H, K, xy^{-1} \rangle$ e de xLx^{-1} e, portanto ,

$$\langle H, K, xy^{-1} \rangle \vee xLx^{-1} \subseteq \langle H \vee xLx^{-1}, K \vee yLy^{-1}, xy^{-1} \rangle.$$

Verifiquemos a outra condição.

Temos $L \subseteq \langle L \vee zHz^{-1}, L \vee zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle$. Por outro lado,

$$\begin{cases} z \langle H, K, xy^{-1} \rangle z^{-1} \subseteq \langle zHz^{-1}, zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle \\ \langle zHz^{-1}, zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle \subseteq \langle L \vee zHz^{-1}, L \vee zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle. \end{cases}$$

Assim, $\langle L \vee zHz^{-1}, L \vee zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle$ é um majorante de L e de $z \langle H, K, xy^{-1} \rangle z^{-1}$, pelo que,

$$L \vee z \langle H, K, xy^{-1} \rangle z^{-1} \subseteq \langle L \vee zHz^{-1}, L \vee zKz^{-1}, zxy^{-1}z^{-1} \rangle.$$

Logo $K(G)$ é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.

Além disso, podemos verificar que $K(G)$ é uma álgebra inversa completa (veja-se [Lee95], Definição 1.1 e Exemplo 1.21(b)).

Provemos, agora, que se o grupo G é finito, então $K(G)$ é o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre sobre G . Para o provar vamos necessitar de alguns resultados que passamos a apresentar.

Lema 1.4.8 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e G um subgrupo de S com identidade e . Se $h \in G$, então $h \vee e$ pertence a algum subgrupo de S .*

Demonstração

Sejam $h, e \in G$, onde e é a identidade do subgrupo G de S . Então

$$(h \vee e)(h \vee e)^{-1} = ((h \vee e)h^{-1})^{-1} \vee ((h \vee e)e)^{-1} = (e \vee h^{-1})^{-1} \vee (h \vee e)^{-1}.$$

De modo análogo, obtemos $(h \vee e)^{-1}(h \vee e) = (e \vee h^{-1})^{-1} \vee (h \vee e)^{-1}$. Portanto, da Proposição 1.2.3 *vi*), concluímos o pretendido. \square

Representemos por \mathbb{N} o conjunto dos números naturais.

Lema 1.4.9 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e G um subgrupo de S com identidade e . Seja $h \in G$ tal que $h^n = e$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Então $h \vee e$ é um idempotente de S .*

Demonstração

Seja $h \in G$. É fácil provar, por indução em n , que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$

$$(h \vee e)^n = h^n \vee h^{n-1} \vee \dots \vee h \vee e.$$

Por outro lado, uma vez que $h^n = e$, para algum $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(h \vee e)^n = h^{n-1} \vee \dots \vee h \vee e = (h \vee e)^{n-1}.$$

Mas, pelo lema anterior, $h \vee e$ pertence a um subgrupo de S . Logo $h \vee e$ é a identidade deste subgrupo e, portanto, é um idempotente de S . \square

Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado e $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ um subconjunto finito de S . Denotemos por $\bigvee X$ o elemento $x_1 \vee \dots \vee x_r$ de S .

Se S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e G é um subgrupo finito de S com identidade e , então temos os seguintes resultados:

Lema 1.4.10 *Sejam $X = \{e, x_1, \dots, x_r\}$ um subconjunto de G e H o subgrupo de G gerado por X . Então $\bigvee X = \bigvee H$.*

Demonstração

Temos $\bigvee X = (e \vee x_1) \vee \dots \vee (e \vee x_r)$. Como G é finito, para qualquer $g \in G$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n = e$. Logo, atendendo ao lema anterior e ao facto de $E(S)$ ser um \vee -subsemi-reticulado de S , concluímos que $\bigvee X$ é um idempotente de S e, portanto, $(\bigvee X)^n = \bigvee X$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Seja H o subgrupo de G gerado por X . Como G é finito, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $H = X^n$, pelo que $\bigvee X^n = \bigvee H$. Por outro lado, se X e Y são subconjuntos finitos de S , então $\bigvee X \bigvee Y = \bigvee (XY)$, pelo que, por indução em n , obtemos $(\bigvee X)^n = \bigvee X^n$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Assim, para algum $n \in \mathbb{N}$, temos $\bigvee X = (\bigvee X)^n = \bigvee X^n = \bigvee H$. \square

Lema 1.4.11 *Seja $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ um subconjunto de G . Então, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$,*

$$\bigvee X = \left(\bigvee H \right) x_i$$

onde H é o subgrupo de G gerado por $\{x_1 x_i^{-1}, \dots, x_r x_i^{-1}\}$.

Demonstração

Seja $i \in \{1, \dots, r\}$. Temos $\bigvee X = \left(\bigvee \{x_1 x_i^{-1}, \dots, x_i x_i^{-1}, \dots, x_r x_i^{-1}\} \right) x_i$. Como $x_i^{-1} x_i = e$, temos, atendendo ao lema anterior, $\bigvee X = \left(\bigvee H \right) x_i$, onde H é o subgrupo de G gerado por $\{x_1 x_i^{-1}, \dots, x_r x_i^{-1}\}$. \square

Deste último resultado podemos concluir que se T é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, G é um subgrupo finito de T e a é um elemento do subsemigrupo \vee -semi-reticulado S de T gerado por G , então $a = \left(\bigvee H \right) x = \bigvee Hx$ para algum $x \in G$ e algum subgrupo H de G . Além disso, temos

$$\begin{aligned} \left(\bigvee Hx \right) \left(\bigvee x^{-1}H \right) \left(\bigvee Hx \right) &= \left(\bigvee H \right) x x^{-1} \left(\bigvee H \right) \left(\bigvee H \right) x \\ &= \left(\bigvee H \right)^3 x = \left(\bigvee H \right) x = \bigvee Hx. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $\left(\bigvee x^{-1}H \right) = \left(\bigvee x^{-1}H \right) \left(\bigvee Hx \right) \left(\bigvee x^{-1}H \right)$.

Assim, $\bigvee Hx$ tem inverso $\bigvee x^{-1}H = \bigvee (x^{-1}Hx)x^{-1}$. Portanto, o subsemigrupo S de T gerado por G é também um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.

Teorema 1.4.12 *Seja G um grupo finito. Então $K(G)$ é o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre sobre o grupo G .*

Demonstração

Começemos por recordar a definição de semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre sobre um grupo G . Um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso U em conjunto com um homomorfismo f de G em U diz-se livre sobre o grupo G se qualquer que seja o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S e qualquer que seja o homomorfismo h de G em S existe um e um só \vee -homomorfismo θ de U para S tal que $f\theta = h$. Se existir, um tal objecto U é único a menos de \vee -isomorfismo.

Vamos agora mostrar que tal objecto existe.

Como os semigrupos \vee -semi-reticulados inversos são álgebras tipo $(2,2,1)$ e constituem uma variedade, então, tendo em conta a Proposição 1.2.12, e porque G é não vazio, existe o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre, $F(G)$, sobre o conjunto G . Temos uma aplicação injectiva, i , de G em $F(G)$, com as seguintes propriedades: Gi gera $F(G)$ como álgebra $(2,2,1)$ e, para quaisquer semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S e aplicação j de G em S , existe um e um só \vee -homomorfismo ϕ de $F(G)$ em S tal que $i\phi = j$.

Encaremos agora G como um grupo. Consideremos o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso $K(G)$ e a aplicação θ de G em $K(G)$, definida por $g\theta = \{g\} = \{1\}g$, para qualquer $g \in G$. Esta aplicação é um homomorfismo. Então existe um e um só \vee -homomorfismo τ , de $F(G)$ em $K(G)$, tal que $g\theta = gi\tau$, para qualquer $g \in G$. Assim, para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, temos $(g_1g_2)i\tau = (g_1i\tau)(g_2i\tau)$, e como τ é homomorfismo,

$$((g_1g_2)i)\tau = ((g_1i)(g_2i))\tau$$

donde $((g_1g_2)i, (g_1i)(g_2i)) \in \bar{\tau}$, onde $\bar{\tau}$ é a equivalência núcleo do \vee -homomorfismo τ , pelo que é uma \vee -congruência em $F(G)$.

Seja β a intersecção de todas as \vee -congruências, ρ , em $F(G)$ que satisfazem a propriedade

$$((g_1g_2)i, (g_1i)(g_2i)) \in \rho.$$

Então β é uma \vee -congruência em $F(G)$ que satisfaz a propriedade anterior. Assim $F(G)/\beta$ é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.

Tomemos a aplicação f de G em $F(G)/\beta$ definida por, $gf = (gi)\beta^\natural$. Provemos que f é um homomorfismo. Sejam $g_1, g_2 \in G$. Temos

$$(g_1g_2)f = ((g_1g_2)i)\beta^\natural = ((g_1i)(g_2i))\beta^\natural = (g_1i)\beta^\natural(g_2i)\beta^\natural = (g_1f)(g_2f).$$

Nestas condições é possível provar que se S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e h é um homomorfismo de G em S , então existe um e um só \vee -homomorfismo ϕ tal que $f\phi = h$. Portanto $F(G)/\beta$ em conjunto com f , forma o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso livre sobre o grupo G . Designemos $F(G)/\beta$ por $\mathcal{F}(G)$.

Seja θ o homomorfismo de G em $K(G)$, definido por $g\theta = \{g\}$, para qualquer $g \in G$. Então existe um e um só \vee -homomorfismo ϕ , de $\mathcal{F}(G)$ em $K(G)$, tal que $xf\phi = x\theta = \{x\}$, para qualquer $x \in G$. Como θ é injectiva, f também o é. Assim, concluímos que, a menos de isomorfismo, G é um subgrupo de $\mathcal{F}(G)$ e podemos identificar xf com x , para qualquer $x \in G$, a fim de simplificar a escrita.

Provemos que ϕ mais do que um \vee -homomorfismo é uma bijecção.

Uma vez que G é um subgrupo finito de $\mathcal{F}(G)$, concluímos, pelo lema anterior, que todo o elemento de $\mathcal{F}(G)$ é da forma $\bigvee Hx$ para algum $x \in G$ e algum subgrupo H de G .

Seja $H = \{x_1, \dots, x_r\}$ um subgrupo finito de G . Como ϕ é um \vee -homomorfismo, temos

$$\left(\bigvee Hx\right)\phi = \left(\left(\bigvee H\right)x\right)\phi = (\{x_1\} \vee \dots \vee \{x_r\})\{x\} = H\{x\} = Hx.$$

Definimos, agora, uma aplicação ψ de $K(G)$ em $\mathcal{F}(G)$ por $(Hx)\psi = \bigvee Hx$,

para qualquer $Hx \in K(G)$. É claro que ϕ e ψ são aplicações inversas uma da outra, pelo que são \vee -isomorfismos. Logo $\mathcal{F}(G)$ é \vee -isomorfo a $K(G)$.

□

Suponhamos, agora, que G é um l -grupo com identidade 1 e denotemos por $K^\vee(G)$ o conjunto

$$\{Hx \mid H \text{ é } l\text{-subgrupo convexo de } G \text{ e } x \in G\}.$$

É fácil verificar que se H é um l -subgrupo convexo de G e $x \in G$, então xHx^{-1} é também um l -subgrupo convexo de G . Por outro lado, sabemos que o conjunto dos l -subgrupos convexos de um l -grupo G é um subreticulado dos subgrupos de G (veja-se [Dar95], Teorema 7.5). Com estes factos, podemos concluir que o conjunto $K^\vee(G)$ é um subsemigrupo inverso do semigrupo $K(G)$. Além disso, podemos provar que $K^\vee(G)$, com a ordem inclusão, é também um semigrupo \vee -semi-reticulado, tendo-se, para quaisquer $Hx, Ky \in K^\vee(G)$,

$$Hx \vee Ky = (H \vee K \vee [xy^{-1}])x,$$

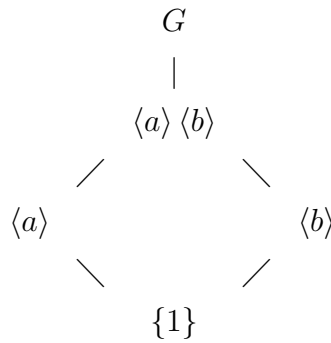
onde $[g]$ denota o l -subgrupo convexo de G gerado por g .

Consideremos, o l -grupo não comutativo mais simples, (veja-se [Con60]) definido por:

$$G = \langle a, b, c : ab = ba, ac = cb, bc = ca \rangle$$

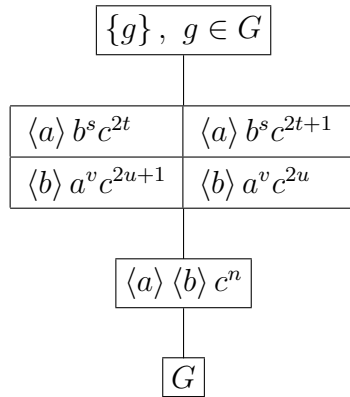
$$a^r b^s c^t \leq a^u b^v c^w \Leftrightarrow t < w \text{ ou } t = w \text{ e } r \leq u, s \leq v.$$

Então o reticulado dos l -subgrupos convexos de G tem o seguinte diagrama:



onde 1 representa a identidade de G .

Consideremos, agora, o semigrupo inverso \vee -semi-reticulado, $K^\vee(G)$, das classes laterais dos l -subgrupos convexos de G . Este semigrupo apresenta uma estrutura relativamente simples. As suas \mathcal{D} -classes são:



com $s, t, u, v, n \in \mathbb{Z}$.

Se G é um l -grupo com identidade 1, podemos ainda considerar o conjunto

$$\{Hx \mid H \text{ é } l\text{-ideal de } G \text{ e } x \in G\},$$

que iremos representar por $L^\vee(G)$.

Em $L^\vee(G)$ definimos, para quaisquer $Hx, Ky \in L^\vee(G)$,

$$Hx \cdot Ky = (HK)xy.$$

Verifiquemos que esta operação é binária.

Sejam H e K l -ideais de G . Como H e K são subgrupos normais (por serem l -ideais), então HK é também um subgrupo normal de G . Por outro lado, atendendo ao Corolário 1.3.10, segue-se que HK é um l -subgrupo convexo de G . Portanto HK é um l -ideal de G . Assim, $L^\vee(G)$ é um semigrupo inverso, cujos idempotentes são os l -ideais de G , tendo-se $(Hx)^{-1} = Hx^{-1}$, para qualquer $Hx \in L^\vee(G)$.

Provemos, agora, que o semigrupo $L^\vee(G)$ com a ordem inclusão e o produto definido é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

Já referimos que, como H e K são subgrupos de G ,

$$Hx \subseteq Ky \Leftrightarrow \begin{cases} H \subseteq K \\ xy^{-1} \in K. \end{cases}$$

Começemos por provar que $L^\vee(G)$ é um semigrupo parcialmente ordenado.

Sejam $Hx, Ky, Lz \in L^\vee(G)$ e suponhamos que $Hx \subseteq Ky$. Uma vez que $H \subseteq K$ temos $LH \subseteq LK$. Como $xy^{-1} \in K$ e K é um subgrupo normal obtemos $1z(xy^{-1})z^{-1} = zx(zx)^{-1} \in LK$. Logo $(LH)zx \subseteq (LK)zy$. Portanto $Lz \cdot Hx \subseteq Lz \cdot Ky$.

De modo análogo, se prova a compatibilidade da multiplicação à direita, pelo que $L^\vee(G)$ é um semigrupo parcialmente ordenado.

Sejam $Hx, Ky \in L^\vee(G)$. Vamos mostrar que

$$Hx \vee Ky = HK \langle xy^{-1} \rangle y,$$

onde $\langle xy^{-1} \rangle$ representa o l -ideal de G gerado por xy^{-1} .

Como $H \subseteq HK \langle xy^{-1} \rangle$ e $xy^{-1} \in HK \langle xy^{-1} \rangle$, então $Hx \subseteq HK \langle xy^{-1} \rangle y$. Uma vez que $K \subseteq HK \langle xy^{-1} \rangle$, temos $Ky \subseteq HK \langle xy^{-1} \rangle y$. Logo $HK \langle xy^{-1} \rangle y$ é um majorante de Hx e de Ky . Provemos que é o menor majorante.

Seja $Lz \in L^\vee(G)$ tal que $Hx \subseteq Lz$ e $Ky \subseteq Lz$. Então $H, K \subseteq L$ e $xz^{-1}, yz^{-1} \in L$. Logo $HK \langle xy^{-1} \rangle \subseteq L$ e, uma vez que, $yz^{-1} \in L$, obtemos $HK \langle xy^{-1} \rangle y \subseteq Lz$. Portanto $HK \langle xy^{-1} \rangle y = Hx \vee Ky$.

Finalmente, vamos provar que $L^\vee(G)$ é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

Uma vez que já verificámos que $L^\vee(G)$ é um semigrupo parcialmente ordenado e um \vee -semi-reticulado, atendendo à Proposição 1.2.10, basta mostrar que, para quaisquer $Hx, Ky, Lz \in L^\vee(G)$,

$$\begin{cases} (Hx \vee Ky) \cdot Lz \subseteq Hx \cdot Lz \vee Ky \cdot Lz \\ Lz \cdot (Hx \vee Ky) \subseteq Lz \cdot Hx \vee Lz \cdot Ky. \end{cases}$$

Atendendo às operações definidas em $L^\vee(G)$, as condições anteriores são equivalentes às seguintes:

$$\begin{cases} (HK \langle xy^{-1} \rangle L)yz \subseteq (HLKL \langle xz(yz)^{-1} \rangle)yz \\ (LHK \langle xy^{-1} \rangle)zy \subseteq (LHLK \langle zxy^{-1}z^{-1} \rangle)zy. \end{cases}$$

Seja $s \in HK \langle xy^{-1} \rangle L$. Então existem $h \in H, k \in K, l \in L$ e $a \in \langle xy^{-1} \rangle$ tais que

$$s = hkal = h1k(l^{-1})al = h1kl(l^{-1}al) \in HLKL \langle xy^{-1} \rangle.$$

Logo $(HK \langle xy^{-1} \rangle L)yz \subseteq (HLKL \langle xy^{-1} \rangle)yz$.

Para a outra condição basta ter em conta que $\langle xy^{-1} \rangle \subseteq \langle zxy^{-1}z^{-1} \rangle$.

Concluimos, assim, que $L^\vee(G)$ é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.

Vamos, agora, verificar que o semigrupo $L^\vee(G)$ é um semigrupo de Clifford e identificar as suas \mathcal{H} -classes. Uma das caracterizações dos semigrupos de Clifford é a de que são regulares e todos os seus idempotentes são centrais (veja-se [Pet84], Teorema II.2.6).

Sejam N um idempotente de $L^\vee(G)$ e Hx um elemento arbitrário de $L^\vee(G)$. Como os idempotentes são subgrupos normais de G , temos $NH = HN$, pelo que, para quaisquer $N, H \in L^\vee(G)$ e $x \in G$,

$$Hx \cdot N = HNx = NHx = N \cdot Hx.$$

Logo, uma vez que $L^\vee(G)$ é regular, por ser inverso, e todos os seus idempotentes são centrais, concluimos que $L^\vee(G)$ é de Clifford.

Ora, num semigrupo de Clifford T , temos $\mu = \mathcal{H}$ e $(a, b) \in \mathcal{H}$ se e só se $aa^{-1} = bb^{-1}$, para quaisquer $a, b \in T$. Portanto, dados Hx e Ky em $L^\vee(G)$, temos $(Hx, Ky) \in \mathcal{H}$ se e só se $(Hx)^{-1}(Hx) = (Ky)^{-1}(Ky)$, isto é, $H = K$. Assim, a \mathcal{H} -classe de um elemento Hx de $L^\vee(G)$ é o grupo $\{Hy \mid y \in G\}$.

Capítulo 2

\vee –Congruências em semigrupos \vee –semi-reticulados inversos

Num semigrupo inverso S muito se sabe sobre as suas congruências. Nomeadamente, uma congruência ρ em S fica perfeitamente definida pelo seu sistema de núcleo $K(\rho)$ [Wag53] e [Pre54] ou pelo seu par de congruência núcleo, traço, $(Ker \rho, tr \rho)$ [Pet78]. As descrições da menor e da maior congruência com um dado traço ρ são também conhecidas [RS67].

As congruências que separam idempotentes estão associadas a sistemas de núcleo cujos elementos são grupos e a sua caracterização é também bem conhecida [CP67].

É nosso objectivo, neste capítulo, obter resultados análogos para o caso das \vee –congruências num semigrupo \vee –semi-reticulado inverso. Conseguimos cumprir o nosso objectivo mas apenas em parte, já que, só foi possível encontrar as descrições análogas para alguns tipos de congruências, ou obter resultados em classes de semigrupos particulares.

Dado um semigrupo \vee –semi-reticulado S , não necessariamente inverso, começamos por apresentar condições necessárias e suficientes para que uma congruência seja \vee –congruência. No caso de S ser inverso, usamos os resultados obtidos para tirar conclusões sobre σ , a menor congruência de grupo

em S , que provamos ser também a menor congruência de l -grupo em S , e sobre as congruências de Rees ρ_I . No que respeita às congruências de Rees descrevemos os ideais que lhes estão associados quando são \vee -congruências.

A secção seguinte é dedicada à descrição da maior \vee -congruência contida numa equivalência. Passamos a descrever as congruências normais nos idempotentes que são traço de \vee -congruências.

No caso de S ser E -unitário, descrevemos ρ_{\min} , a menor \vee -congruência em S com traço ρ . Mostramos que a descrição obtida não é válida no caso não E -unitário. Quando S é \vee -acessível, obtemos uma descrição para ρ_{\max} , a maior \vee -congruência em S com traço ρ .

As \vee -congruências que separam idempotentes são descritas pelos respectivos sistemas de núcleo. As congruências de l -grupo são descritas através dos respectivos núcleos.

O resto do capítulo é dedicado à descrição das congruências de l -grupo com zero. Neste caso, temos dois casos distintos a considerar, o caso em que zero é elemento mínimo e aquele em que é elemento máximo.

2.1 Condições para que uma congruência seja \vee -congruência

O objectivo principal desta secção é apresentar condições para que uma congruência, num semigrupo \vee -semi-reticulado, seja \vee -congruência.

Começamos por apresentar uma caracterização das relações compatíveis com \vee num \vee -semi-reticulado.

Teorema 2.1.1 *Sejam S um \vee -semi-reticulado e ρ uma relação de equivalência em S . Então ρ é compatível com \vee se e só se satisfaz as condições seguintes:*

- i) cada ρ -classe é convexa;*
- ii) cada ρ -classe é um \vee -subsemi-reticulado;*

iii) se $(a, b) \in \rho$ e $b \leq x$, então existe $y \in S$ tal que $a \leq y$ e $(y, x) \in \rho$.

Demonstração

Seja X uma classe de equivalência de ρ .

i) Provedmos que X é um conjunto convexo. Tomemos $x, y \in X$ e $z \in S$ tais que $x \leq z \leq y$. Como $(x, y) \in \rho$ e ρ é compatível com \vee , temos $(x \vee z, y \vee z) \in \rho$. Por outro lado, de $x \leq z \leq y$ segue-se que $x \vee z = z$ e $y \vee z = y$. Por conseguinte $(z, y) \in \rho$ e, portanto, $z \in X$.

ii) Provedmos que X é um \vee -subsemi-reticulado. Sejam $x, y \in X$. Então $(x, y) \in \rho$, pelo que $(x \vee y, y) \in \rho$, uma vez que ρ é compatível com \vee . Logo $x \vee y \in X$.

iii) Sejam $a, b, x \in S$ tais que $(a, b) \in \rho$ e $b \leq x$. De $b \leq x$, temos $b \vee x = x$. Por outro lado, como ρ é compatível com \vee , de $(a, b) \in \rho$ segue-se que $(a \vee x, b \vee x) \in \rho$. Logo $(a \vee x, x) \in \rho$ e assim, o elemento $y = a \vee x$, satisfaz as condições pretendidas.

Vejamos a condição recíproca. Para tal vamos dividir a demonstração em duas partes. Mostraremos que se ρ é uma relação de equivalência em S satisfazendo as condições *i) e ii)*, então

1) podemos associar a cada classe de equivalência X de ρ uma relação de equivalência ρ_X em S , compatível com \vee ; além disso $\bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X \subseteq \rho$;

2) se ρ satisfaz também a condição *iii)*, temos $\bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X = \rho$. Assim, sendo cada ρ_X compatível com \vee , também ρ o será.

1) Começemos por observar que, sendo S um \vee -semi-reticulado, então S com a operação \vee é um semigrupo de idempotentes comutativo, que representaremos por (S, \vee) .

Suponhamos que ρ é uma relação de equivalência em S , satisfazendo as condições *i) e ii)*. Seja X uma classe de equivalência de ρ . Então X é um \vee -subsemi-reticulado convexo.

Associemos a cada classe X o conjunto

$$P_X = \{y \in S \mid \exists x \in X : x \vee y \notin X\}$$

e verifiquemos que P_X é um ideal primo do semigrupo (S, \vee) .

Sejam $y \in P_X$ e $s \in S$. Suponhamos, por absurdo que $y \vee s \notin P_X$. Atendendo à definição de P_X , como $y \in P_X$, existe $a \in X$ tal que $a \vee y \notin X$. Por outro lado, como $y \vee s \notin P_X$, temos $x \vee (y \vee s) \in X$, para qualquer $x \in X$. Em particular $a \vee (y \vee s) \in X$. Logo, como $a \leq a \vee y \leq a \vee (y \vee s)$ e X é convexo, $a \vee y \in X$, o que é absurdo. Então $y \vee s \in P_X$ e, portanto, P_X é ideal.

Vejamus que P_X é primo. Sejam $y, z \in S$ e suponhamos que $y, z \notin P_X$. Então, para qualquer $x \in X$, temos $x \vee y \in X$ e $x \vee z \in X$. Mas, como X é um \vee -subsemi-reticulado $(x \vee y) \vee (x \vee z) = x \vee (y \vee z) \in X$. Portanto, $y \vee z \notin P_X$.

Uma vez que, para cada ρ -classe X temos um ideal primo P_X do semigrupo (S, \vee) , estamos em condições de poder considerar a relação de equivalência ρ_X , definida em S por

$$(a, b) \in \rho_X \Leftrightarrow a, b \in P_X \text{ ou } a, b \notin P_X .$$

Facilmente se verifica que ρ_X é uma congruência no semigrupo (S, \vee) e, portanto, uma relação de equivalência em S compatível com \vee . Logo, $\bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X$ é também uma relação de equivalência em S compatível com \vee .

Verifiquemos agora que $\bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X \subseteq \rho$.

Sejam $u, v \in S$ tais que $(u, v) \in \bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X$. Então, em particular, $(u, v) \in \rho_U$ e $(u, v) \in \rho_V$, onde $U = [u]_\rho$ e $V = [v]_\rho$. Como $P_U \cap U = \emptyset$ (porque U é um \vee -subsemi-reticulado) e $u \in U$, segue-se que $u \notin P_U$. Logo $v \notin P_U$. Analogamente se conclui que $u \notin P_V$. Assim, para qualquer $u_1 \in U$, temos $(u_1 \vee v) \in U$ e, para qualquer $v_1 \in V$, temos $(v_1 \vee u) \in V$. Em particular, $(u \vee v) \in (U \cap V)$ e como U e V são classes de equivalência de ρ , então $U = V$ e $(u, v) \in \rho$.

2) Verifiquemos agora que se ρ é uma relação de equivalência em S , satisfazendo as condições *i)*, *ii)* e *iii)*, então $\rho = \bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X$. Por 1), falta provar que $\rho \subseteq \bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X$.

Sejam $u, v \in S$, tais que $(u, v) \in \rho$. Queremos provar $(u, v) \in \rho_X$, para qualquer $X = [x]_\rho$. Suponhamos que $u \notin P_X$ e provemos que $v \notin P_X$.

Se $u \notin P_X$, temos $x \vee u \in X$, para qualquer $x \in X$. Então $(u, v) \in \rho$ e $u \leq x \vee u$. Logo, uma vez que ρ satisfaz a condição *iii*), existe $y \in S$ tal que $v \leq y$ e $(y, x \vee u) \in \rho$. Como $v \leq y$, temos $v \vee y = y$ e, portanto, $(v \vee y, x \vee u) \in \rho$. Por outro lado, como $x \vee u \in X$ e X é uma classe de equivalência, $v \vee y \in X$. Assim, $x \leq v \vee x \leq (v \vee y) \vee x$. Ora, como $x \in X$ e $v \vee y \in X$, temos $(v \vee y) \vee x \in X$. Mas, sendo X convexo, $v \vee x \in X$. Concluimos, pois, que $v \vee x \in X$, para qualquer $x \in X$, isto é, $v \notin P_X$. Portanto, $(u, v) \in \rho_X$.

$$\text{Logo } \rho \subseteq \bigcap_{X \in S/\rho} \rho_X.$$

Ficou assim provado que se ρ é uma relação de equivalência em S , satisfazendo as condições *i*), *ii*) e *iii*), então ρ é compatível com \vee . \square

Deste último teorema e do seu dual podemos concluir que uma equivalência ρ num reticulado S é uma congruência se e só se satisfaz as condições seguintes:

- i) cada ρ -classe é convexa;
- ii) cada ρ -classe é um subreticulado;
- iii) se $(a, b) \in \rho$ e $b \leq x$, então existe $y \in S$ tal que $a \leq y$ e $(y, x) \in \rho$;
- iii') se $(a, b) \in \rho$ e $x \leq b$, então existe $y \in S$ tal que $y \leq a$ e $(x, y) \in \rho$.

Esta caracterização é análoga à descrição “quadrilateral” de Davey e Priestley [DP90], Teorema 5.2.5, mas a demonstração desta última usa simultaneamente a existência de ínfimo e de supremo.

No caso do \vee -semi-reticulado ser finito, para cada $a \in S$, existe o maior elemento da ρ -classe de a , que representaremos por \bar{a} . Nesta situação facilmente se prova que a condição *iii*) é equivalente à condição seguinte: se $a \leq b$ então $\bar{a} \leq \bar{b}$, para quaisquer $a, b \in S$.

Observemos que na situação anterior, podemos definir em S/ρ uma relação binária do seguinte modo: dados $X, Y \in S/\rho$,

$$X \leq Y \Leftrightarrow (x \vee y, y) \in \rho, \text{ para qualquer } x \in X \text{ e } y \in Y,$$

esta relação é de ordem parcial e pode também ser definida por: dados $X, Y \in S/\rho$,

$$X \leq Y \Leftrightarrow x \leq y, \text{ para alguns } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Usando o resultado obtido, no teorema anterior, para relações compatíveis com \vee num \vee -semi-reticulado, apresentamos agora condições para que uma congruência seja \vee -congruência, num semigrupo \vee -semi-reticulado.

Teorema 2.1.2 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado e ρ uma congruência em S . Então ρ é uma \vee -congruência em S se e só se satisfaz as condições seguintes:*

- i) cada ρ -classe é convexa;*
- ii) cada ρ -classe é um \vee -subsemi-reticulado;*
- iii) se $(a, b) \in \rho$ e $b \leq x$ então existe $y \in S$ tal que $a \leq y$ e $(y, x) \in \rho$.*

Além disso, S/ρ é um semigrupo \vee -semi-reticulado e a aplicação canónica $\rho^\natural : S \rightarrow S/\rho$, definida por $x\rho^\natural = [x]_\rho$, é um \vee -homomorfismo.

Demonstração

É evidente, atendendo ao Teorema 2.1.1, que ρ é uma \vee -congruência em S se e só se satisfaz as condições *i)*, *ii)* e *iii)*. Neste caso, S/ρ é um semigrupo \vee -semi-reticulado, relativamente às operações definidas por $[x]_\rho [y]_\rho = [xy]_\rho$ e $[x]_\rho \vee [y]_\rho = [x \vee y]_\rho$, para quaisquer $x, y \in S$. Além disso, a aplicação canónica ρ^\natural é, naturalmente, um \vee -homomorfismo. \square

Observemos que uma \vee -congruência num semigrupo \vee -semi-reticulado é uma congruência fortemente regular no sentido de Xie Xiang-Yun. Este autor considera apenas semigrupos parcialmente ordenados e designa por

congruência fortemente regular uma congruência que satisfaz as condições *i*) e *iii*) (veja-se [XY00], Teorema 3.6).

Se S é um semigrupo \vee -semi-reticulado e ρ é uma congruência de grupo compatível com \vee , então S/ρ é claramente um l -grupo. Nesta situação dizemos que ρ é uma *congruência de l -grupo*.

Temos como consequência do teorema anterior, o resultado seguinte.

Corolário 2.1.3 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e σ a menor congruência de grupo em S . Então σ é a menor congruência de l -grupo em S .*

Demonstração

Verifiquemos que σ satisfaz as três condições do teorema anterior. Seja A uma σ -classe e $a, b \in A$. Então existe $e \in E$ tal que $ea = eb$.

i) Seja $x \in S$ tal que $a \leq x \leq b$. Então $ea \leq ex \leq eb = ea$. Portanto, $ex = ea$ e $x \in A$. Logo A é convexo.

ii) Como $e(a \vee b) = ea \vee eb = ea$, então $a \vee b \in A$. Logo A é um \vee -subsemi-reticulado.

iii) Sejam $a, b, x \in S$ tais que $(a, b) \in \sigma$ e $b \leq x$. Então $x = b \vee x$ e, portanto,

$$ex = e(b \vee x) = eb \vee ex = ea \vee ex = e(a \vee x).$$

Logo existe $y = a \vee x$ nas condições pretendidas. □

Este resultado pode ser encontrado em [McA98], Teorema 3.1.8. Com efeito, aí prova-se um pouco mais:

Proposição 2.1.4 *Sejam S um semigrupo inverso parcialmente ordenado, σ a menor congruência de grupo em S e $G = S/\sigma$. Defina-se em G uma relação \leq por, dados $A, B \in G$,*

$$A \leq B \Leftrightarrow a \leq b, \text{ para alguns } a \in A, b \in B.$$

Então G é um grupo parcialmente ordenado e o homomorfismo canônico σ^{\natural} , definido de S em G , é isótono.

Se S for um semigrupo \vee -semi-reticulado (ou \wedge -semi-reticulado) inverso, então G é um l -grupo e, além disso, σ^{\natural} preserva as operações \vee (ou \wedge).

Aplicando o critério que nos é fornecido pelo Teorema 2.1.2, vamos agora estudar o caso particular das congruências de Rees associadas a um ideal.

Dado um ideal I num semigrupo S , sabemos que a relação de equivalência ρ_I , definida em S por

$$(a, b) \in \rho_I \Leftrightarrow a, b \in I \text{ ou } a = b$$

é uma congruência em S . O conjunto quociente S/ρ_I coincide com $\{I\} \cup \{\{x\} \mid x \in S \setminus I\}$ e é um semigrupo com zero I . Esta congruência é denominada *congruência de Rees* associada ao ideal I . Se o semigrupo for um semigrupo \vee -semi-reticulado e o ideal I satisfizer determinadas propriedades, então ρ_I vai ser uma \vee -congruência em S . Com efeito, temos o seguinte.

Proposição 2.1.5 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado e I um ideal de S que é simultaneamente um \vee -subsemi-reticulado convexo. Então ρ_I é uma \vee -congruência em S se e só se I tem a propriedade seguinte*

$$i \in I, c \in S \setminus I, i \leq c \Rightarrow j \leq c, \forall j \in I. \quad (\blacktriangle)$$

Se, além disso, I é um ideal de ordem, então I é um elemento minimal de S/ρ_I .

Demonstração

Suponhamos que I goza da propriedade enunciada. Provemos que ρ_I é uma \vee -congruência em S . Para tal, verifiquemos que ρ_I satisfaz as condições do Teorema 2.1.2.

Representemos por $[s]$ a ρ_I -classe de $s \in S$. Então $[s] = I$ ou $[s] = \{x\}$ se $x \in S \setminus I$. Logo ρ_I satisfaz as condições *i*) e *ii*) do Teorema 2.1.2. Verifiquemos agora que ρ_I satisfaz a condição *iii*). Sejam $a, b, x \in S$ tais que $(a, b) \in \rho_I$ e $b \leq x$. Então $a, b \in I$ ou $a = b$. Analisemos estas duas situações.

1) Se $a = b$, como $b \leq x$, podemos tomar $y = x$. Obtemos $a \leq y$ e $(y, x) \in \rho_I$.

2) Se $a, b \in I$, vamos discutir dois casos possíveis:

2.1) Se $x \in I$, então $a \vee x \in I$ e, portanto, $(a \vee x, x) \in \rho_I$. Logo existe $y = a \vee x$ nas condições pretendidas.

2.2) Se $x \in S \setminus I$, como $a, b \in I$ e $b \leq x$, pela propriedade (\blacktriangle) de I , temos $a \leq x$ e, portanto, existe $y = x$, nas condições pretendidas.

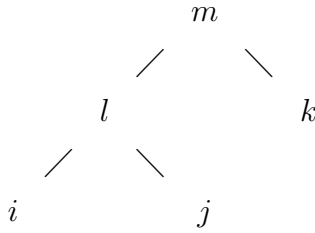
Concluimos, pois, que ρ_I é uma \vee -congruência em S .

Reciprocamente, provemos que se ρ_I é uma \vee -congruência em S , então I goza da propriedade (\blacktriangle). Sejam $i \in I$ e $c \in S \setminus I$ tais que $i \leq c$. Seja $j \in I$. Uma vez que $i, j \in I$, temos $(j, i) \in \rho_I$ com $i \leq c$. Como ρ_I é uma \vee -congruência em S , satisfaz a condição *iii*) do Teorema 2.1.2. Logo existe $y \in S$ tal que $j \leq y$ e $(y, c) \in \rho_I$. Mas, uma vez que $c \in S \setminus I$, temos $y = c$. Portanto $j \leq c$.

Como ρ_I é uma \vee -congruência em S , então, pelo Teorema 2.1.2, o semigrupo S/ρ_I é também um semigrupo \vee -semi-reticulado. Falta provar que se I é um ideal de ordem de S , então I é minimal entre os elementos de S/ρ_I . Suponhamos que I não é minimal em S/ρ_I . Então existe $x \in S \setminus I$ tal que $[x] \not\leq I$. Atendendo à ordem definida em S/ρ_I , temos $[x \vee i] = [i]$, para $i \in I$. Logo $(x \vee i) \in I$. Por outro lado, uma vez que I é ideal de ordem e $x \leq x \vee i \in I$, temos $x \in I$, o que contraria a hipótese. Logo I é um elemento minimal de S/ρ_I . \square

Notemos que, se I tem a propriedade (\blacktriangle) e é um \vee -subsemi-reticulado convexo, mas não é um ideal de ordem, pode não ser elemento minimal de S/ρ_I , como mostra o exemplo seguinte.

Seja $S = \{i, j, k, l, m\}$ com a ordem definida pelo diagrama



Então S é um \vee -semi-reticulado. Seja $I = S \setminus \{k\}$. Então I é um \vee -subsemi-reticulado convexo, mas não é um ideal de ordem. Nestas condições, ρ_I é compatível com \vee mas I não é elemento minimal de S/ρ_I .

Observemos ainda que, se I é um \vee -subsemi-reticulado e um ideal de ordem de S e tem a propriedade (\blacktriangle) então, pela proposição anterior, ρ_I é compatível com \vee e I é um elemento minimal de S/ρ_I . No entanto, I pode não ser elemento mínimo de S/ρ_I . Com efeito, se considerarmos no \vee -semi-reticulado do exemplo anterior, $I = \{i, j, l\}$ temos ρ_I compatível com \vee sendo I elemento minimal, não mínimo, de S/ρ_I .

2.2 Maior \vee -congruência contida numa relação de equivalência

É conhecido que, dada uma relação de equivalência ρ num semigrupo S , a relação definida por

$$(a, b) \in \rho^b \Leftrightarrow (xay, xby) \in \rho, \forall x, y \in S^1$$

é a maior (para a relação de inclusão) congruência em S contida em ρ .

Analogamente, dada uma relação de equivalência ρ num semigrupo \vee -semi-reticulado S , existe a maior relação de equivalência em S compatível com \vee e contida em ρ , que passamos a descrever.

Proposição 2.2.1 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado e ρ uma relação de equivalência em S . Então a maior relação de equivalência em S compatível*

2.2 Maior \vee -congruência contida numa relação de equivalência 49

com \vee e contida em ρ é definida por

$$(a, b) \in \rho^\vee \Leftrightarrow (x \vee a, x \vee b) \in \rho, \forall x \in S.$$

Demonstração

Consideremos (S, \vee) . Trata-se de um semigrupo de idempotentes comutativo, pelo que a maior congruência θ em (S, \vee) contida em ρ está definida por, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a, b) \in \theta \Leftrightarrow (x \vee a \vee y, x \vee b \vee y) \in \rho, \forall x, y \in S$$

$$\Leftrightarrow (x \vee a, x \vee b) \in \rho, \forall x \in S.$$

Ora θ não é mais do que a maior equivalência em S compatível com \vee e contida em ρ . Logo $\theta = \rho^\vee$. \square

De modo análogo, dada uma relação de equivalência ρ num semigrupo \vee -semi-reticulado S , podemos definir a maior \vee -congruência em S contida em ρ .

Para tal necessitamos do seguinte resultado.

Lema 2.2.2 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado e ρ uma relação de equivalência em S compatível com \vee . Então ρ^\flat é uma \vee -congruência em S .*

Demonstração

Suponhamos que $(a, b) \in \rho^\flat$ e tomemos $x \in S$.

Sejam $s, t \in S^1$. Então $(sat, sbt) \in \rho$ e, como ρ é compatível com \vee , segue-se que $(sxt \vee sat, sxt \vee sbt) \in \rho$, pelo que $(s(x \vee a)t, s(x \vee b)t) \in \rho$. Portanto $(x \vee a, x \vee b) \in \rho^\flat$. Logo ρ^\flat é uma \vee -congruência em S . \square

Estamos, agora, em condições de apresentar o próximo resultado, que nos garante a existência da maior \vee -congruência contida numa dada relação de equivalência, num semigrupo \vee -semi-reticulado.

Teorema 2.2.3 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado e ρ uma relação de equivalência em S . Então $(\rho^\vee)^\flat$ é a maior \vee -congruência em S contida em ρ .*

Demonstração

Sejam $a, b \in S$. Então temos $(a, b) \in (\rho^\vee)^\flat$ se e só se $(xay, xby) \in \rho^\vee$, para quaisquer $x, y \in S^1$, ou seja, pela Proposição 2.2.1, se e só se $(s \vee xay, s \vee xby) \in \rho$, para quaisquer $x, y \in S^1$ e $s \in S$.

Começemos por ver que $(\rho^\vee)^\flat$ é uma \vee -congruência em S contida em ρ . Sabemos que ρ^\vee é compatível com \vee , e assim, atendendo ao lema anterior, $(\rho^\vee)^\flat$ é uma \vee -congruência em S . Além disso, temos $(\rho^\vee)^\flat \subseteq \rho^\vee \subseteq \rho$. Falta provar que $(\rho^\vee)^\flat$ é a maior \vee -congruência em S , contida em ρ . Seja θ uma \vee -congruência em S contida em ρ . Provemos que $\theta \subseteq (\rho^\vee)^\flat$. Sejam $a, b \in S$ tais que $(a, b) \in \theta$. Então, como θ é uma congruência em S , segue-se que $(xay, xby) \in \theta$, para quaisquer $x, y \in S^1$. Portanto, como θ é compatível com \vee , temos $(s \vee xay, s \vee xby) \in \theta$, para quaisquer $x, y \in S^1$ e $s \in S$. Mas, por hipótese, $\theta \subseteq \rho$, pelo que $(s \vee xay, s \vee xby) \in \rho$, para quaisquer $x, y \in S^1$ e $s \in S$. Logo $(a, b) \in (\rho^\vee)^\flat$.

Portanto $(\rho^\vee)^\flat$ é de facto a maior \vee -congruência em S contida em ρ . \square

2.3 Traços de \vee -congruências

Nesta secção apresentamos condições para que, num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , uma congruência normal definida em E seja o traço de uma \vee -congruência em S .

Começamos por recordar o seguinte resultado que se pode encontrar, por exemplo, em [Pet84].

Proposição 2.3.1 *Sejam S um semigrupo inverso e ρ uma congruência normal em E . Então*

i) a relação ρ_{\min} definida por, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a, b) \in \rho_{\min} \Leftrightarrow \begin{cases} (aa^{-1}, bb^{-1}) \in \rho \\ \exists e \in E : (aa^{-1}, e) \in \rho, ea = eb \end{cases}$$

é a menor congruência em S com traço ρ ;

ii) a relação ρ_{\max} definida por, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a, b) \in \rho_{\max} \Leftrightarrow (a^{-1}ea, b^{-1}eb) \in \rho, \forall e \in E$$

é a maior congruência em S com traço ρ .

Dada uma relação de equivalência ρ , num semigrupo \vee -semi-reticulado S , vimos que $(\rho^{\vee})^b$ é a maior \vee -congruência em S contida em ρ . Se o semigrupo S for inverso, dada uma congruência normal ρ definida em E , então $((\rho_{\max})^{\vee})^b$ é a maior \vee -congruência em S contida em ρ_{\max} , logo é a maior \vee -congruência em S com traço contido em ρ . Este facto conduz-nos a uma condição necessária e suficiente para que uma congruência normal definida em E seja o traço de uma \vee -congruência em S .

Teorema 2.3.2 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência normal em E . Então ρ é o traço de uma \vee -congruência em S se e só se $\rho \subseteq ((\rho_{\max})^{\vee})^b$.*

Demonstração

Suponhamos que existe uma \vee -congruência θ em S cujo traço é ρ . Uma vez que $((\rho_{\max})^{\vee})^b$ é a maior \vee -congruência em S com traço contido em ρ , então $\theta \subseteq ((\rho_{\max})^{\vee})^b$. Assim

$$\rho = \text{tr}\theta \subseteq \text{tr}((\rho_{\max})^{\vee})^b \subseteq ((\rho_{\max})^{\vee})^b.$$

Reciprocamente, se $\rho \subseteq ((\rho_{\max})^{\vee})^b$, então

$$\rho \subseteq \text{tr}((\rho_{\max})^{\vee})^b.$$

Mas $tr((\rho_{\max})^\vee)^b \subseteq \rho$, pelo que temos $tr((\rho_{\max})^\vee)^b = \rho$. Logo ρ é o traço de uma \vee -congruência em S . \square

Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , uma congruência normal, definida nos idempotentes de S , diz-se \vee -normal se é o traço de uma \vee -congruência em S .

O Corolário seguinte é uma consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 2.3.3 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência \vee -normal. Então $((\rho_{\max})^\vee)^b$ é a maior \vee -congruência em S com traço ρ .* \square

Apresentamos, a seguir, outras condições para que uma congruência normal, definida em E , seja \vee -normal.

Teorema 2.3.4 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência normal em E . Então as seguintes condições são equivalentes, para quaisquer $e, f \in E$,*

- 1) $\rho \subseteq ((\rho_{\max})^\vee)^b$;
- 2) $(e, f) \in \rho \Rightarrow ((set \vee x)^{-1} u (set \vee x), (sft \vee x)^{-1} u (sft \vee x)) \in \rho$,
para quaisquer $s, t \in S^1, x \in S$, e $u \in E^1$;
- 3) $(e, f) \in \rho \Rightarrow ((set \vee x)^{-1} (set \vee x), (sft \vee x)^{-1} (sft \vee x)) \in \rho$,
para quaisquer $s, t \in S^1$ e $x \in S$;
- 4) $(e, f) \in \rho \Rightarrow ((vet \vee x)^{-1} (vet \vee x), (vft \vee x)^{-1} (vft \vee x)) \in \rho$,
para quaisquer $t \in S^1, x \in S$ e $v \in E^1$;
- 5) $(e, f) \in \rho \Rightarrow ((et \vee x)^{-1} (et \vee x), (ft \vee x)^{-1} (ft \vee x)) \in \rho$,
para quaisquer $t \in S^1$ e $x \in S$.

Demonstração

Provemos que a condição 1) é equivalente à condição 2).

Atendendo, respectivamente, às definições de ρ^b , ρ^\vee e ρ_{\max} , para quaisquer $e, f \in E$, as seguintes condições são equivalentes:

- a) $(e, f) \in ((\rho_{\max})^\vee)^b$

- b) $(set, sft) \in (\rho_{\max})^\vee, \forall s, t \in S^1$
 c) $(set \vee x, sft \vee x) \in \rho_{\max}, \forall s, t \in S^1, x \in S$
 d) $((set \vee x)^{-1}u(set \vee x), (sft \vee x)^{-1}u(sft \vee x)) \in \rho, \forall s, t \in S^1, x \in S$ e $u \in E^1$.

Logo as condições 1) e 2) são equivalentes.

Vejamus que as condições 2) e 3) também são equivalentes. Começemos por observar que se ρ satisfaz a condição 2), então satisfaz naturalmente a condição 3).

Sejam $e, f \in E$ tais que $(e, f) \in \rho$. Suponhamos que ρ verifica a condição 3). Então, para quaisquer $s', t \in S^1, u \in E^1$ e $x' \in S$,

$$\left((us'et \vee ux')^{-1}(us'et \vee ux'), (us'ft \vee ux')^{-1}(us'ft \vee ux') \right) \in \rho,$$

ou seja,

$$\left((s'et \vee x')^{-1}u^{-1}u(s'et \vee x'), (s'ft \vee x')^{-1}u^{-1}u(s'ft \vee x') \right) \in \rho,$$

ou ainda, como $u = u^{-1}$,

$$\left((s'et \vee x')^{-1}u(s'et \vee x'), (s'ft \vee x')^{-1}u(s'ft \vee x') \right) \in \rho.$$

Portanto, se ρ verifica 3), então ρ verifica 2). Logo as condições 2) e 3) são equivalentes.

Provemos, agora, a equivalência das condições 3) e 4). É evidente que se ρ satisfaz a condição 3), então ρ satisfaz 4). Suponhamos que ρ verifica a condição 4). Sejam $e, f \in E$ tais que $(e, f) \in \rho$. Uma vez que ρ é uma congruência normal em E , temos $(ses^{-1}, sfs^{-1}) \in \rho$, para qualquer $s \in S^1$. Logo, como ρ satisfaz a condição 4),

$$\left((vses^{-1}t \vee x)^{-1}(vses^{-1}t \vee x), (vsfs^{-1}t \vee x)^{-1}(vsfs^{-1}t \vee x) \right) \in \rho,$$

para quaisquer $t, s \in S^1, x \in S$ e $v \in E^1$. Tomemos, na expressão anterior, $t = sw$ e $v = ss^{-1}$. Obtemos

$$\left((ses^{-1}sw \vee x)^{-1}(ses^{-1}sw \vee x), (sfs^{-1}sw \vee x)^{-1}(sfs^{-1}sw \vee x) \right) \in \rho.$$

Logo, uma vez que os idempotentes comutam

$$((sew \vee x)^{-1}(sew \vee x), (sfw \vee x)^{-1}(sfw \vee x)) \in \rho.$$

Concluimos assim que ρ verifica 3). Portanto as condições 3) e 4) são equivalentes.

Finalmente, provemos que as condições 4) e 5) são equivalentes. É evidente que se ρ verifica a condição 4), então verifica 5). Suponhamos que ρ verifica a condição 5). Sejam $e, f \in E$ tais que $(e, f) \in \rho$. Como ρ é uma congruência em E , então $(ve, vf) \in \rho$, para qualquer $v \in E^1$. Logo, uma vez que ρ verifica a condição 5),

$$((vet \vee x)^{-1}(vet \vee x), (vft \vee x)^{-1}(vft \vee x)) \in \rho.$$

Portanto as condições 4) e 5) são também equivalentes. \square

Atendendo aos teoremas anteriores e à definição de congruência \vee -normal podemos afirmar o seguinte:

Corolário 2.3.5 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência normal em E . Então ρ é \vee -normal se e só se ρ satisfaz qualquer uma das condições 1), 2), 3), 4) ou 5) do teorema anterior.* \square

No final da secção 1.2, referimos que, num semigrupo \vee -semi-reticulado S , o conjunto $\mathcal{C}^\vee(S)$ das suas \vee -congruências constitui um subreticulado de $\mathcal{C}(S)$. Este facto, conduz-nos aos próximos resultados em semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

Teorema 2.3.6 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , o conjunto $\mathcal{C}_n^\vee(E)$ das suas congruências \vee -normais é um subreticulado do reticulado $\mathcal{C}_n(E)$ das suas congruências normais.*

Demonstração

Sejam ρ e θ congruências \vee -normais em E . Então existem $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\vee(S)$ tais que

$$\text{tr}\alpha = \rho \text{ e } \text{tr}\beta = \theta.$$

Pela Proposição 1.2.6,

$$\begin{cases} \rho \cap \theta = \text{tr}\alpha \cap \text{tr}\beta = \text{tr}(\alpha \cap \beta) \\ \rho \vee \theta = \text{tr}\alpha \vee \text{tr}\beta = \text{tr}(\alpha \vee \beta). \end{cases}$$

Por outro lado, como $\alpha \cap \beta, \alpha \vee \beta \in \mathcal{C}^\vee(S)$, concluímos que $\rho \cap \theta$ e $\rho \vee \theta$ são \vee -normais. Assim, verificamos que o conjunto das congruências \vee -normais é um subreticulado do reticulado das congruências normais. \square

Proposição 2.3.7 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência \vee -normal em E . Então o conjunto $\mathcal{C}_\rho^\vee(S)$ das \vee -congruências em S com traço ρ é um subreticulado de $\mathcal{C}^\vee(S)$.*

Demonstração

Basta ter em conta a Proposição 1.2.6. \square

2.3.1 A menor \vee -congruência com certo traço, num semigrupo inverso E -unitário

Um semigrupo inverso S diz-se E -unitário se, para qualquer $s \in S$,

$$e, es \in E \Rightarrow s \in E.$$

É bem sabido que esta condição é equivalente à sua dual: para qualquer $s \in S$,

$$e, se \in E \Rightarrow s \in E.$$

Pretendemos, agora, mostrar que, num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e E -unitário, dada uma congruência \vee -normal ρ , então ρ_{\min} é a menor \vee -congruência em S com traço ρ .

Recordemos que, num semigrupo inverso E -unitário, a menor congruência de grupo σ , admite várias caracterizações. No que se segue, convém ter presente a seguinte (veja-se [McA98], Lema 3.2.2).

Lema 2.3.8 *Seja S um semigrupo inverso E -unitário. As seguintes condições são equivalentes, para quaisquer $a, b \in S$:*

- 1) $(a, b) \in \sigma$;
- 2) $aa^{-1}b = bb^{-1}a$.

Dada uma congruência normal ρ , num semigrupo inverso E -unitário S , também podemos definir ρ_{\min} de outros modos. Apresentamos, no lema seguinte, uma das possíveis definições.

Lema 2.3.9 *Sejam S um semigrupo inverso E -unitário e ρ uma congruência normal em E . Então ρ_{\min} pode ser definida por, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$\begin{aligned} (a, b) \in \rho_{\min} &\Leftrightarrow (aa^{-1}, bb^{-1}) \in \rho \text{ e } (a, b) \in \sigma \\ &\Leftrightarrow (a^{-1}a, b^{-1}b) \in \rho \text{ e } (a^{-1}, b^{-1}) \in \sigma. \end{aligned}$$

Estamos então em condições de poder descrever a menor \vee -congruência com dado traço, num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso E -unitário.

Teorema 2.3.10 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso E -unitário e ρ uma congruência \vee -normal. Então ρ_{\min} é a menor \vee -congruência em S com traço ρ .*

Demonstração

Provemos que ρ_{\min} é uma \vee -congruência em S . Sejam $a, b, x \in S$. Suponhamos que $(a, b) \in \rho_{\min}$.

Como ρ é uma congruência \vee -normal, então, atendendo ao Corolário 2.3.5, para quaisquer $e, f \in E$

$$(e, f) \in \rho \Rightarrow ((et \vee x)^{-1}(et \vee x), (ft \vee x)^{-1}(ft \vee x)) \in \rho,$$

para quaisquer $t \in S^1$ e $x \in S$.

Assim, uma vez que $(aa^{-1}, bb^{-1}) \in \rho$, temos

$$\left((aa^{-1}t \vee x)^{-1} (aa^{-1}t \vee x), (bb^{-1}t \vee x)^{-1} (bb^{-1}t \vee x) \right) \in \rho,$$

para quaisquer $t \in S^1$ e $x \in S$.

Logo, em particular,

$$\left((a \vee x)^{-1} (a \vee x), (bb^{-1}a \vee x)^{-1} (bb^{-1}a \vee x) \right) \in \rho,$$

e

$$\left((aa^{-1}b \vee x)^{-1} (aa^{-1}b \vee x), (b \vee x)^{-1} (b \vee x) \right) \in \rho,$$

para qualquer $x \in S$.

Por outro lado, pelo Lema 2.3.8, como $(a, b) \in \sigma$, temos $aa^{-1}b = bb^{-1}a$. Portanto, atendendo à transitividade de ρ , obtemos

$$\left((a \vee x)^{-1} (a \vee x), (b \vee x)^{-1} (b \vee x) \right) \in \rho,$$

para qualquer $x \in S$.

Como σ é compatível com \vee e $(a, b) \in \sigma$, então $(a \vee x, b \vee x) \in \sigma$ e, também, $((a \vee x)^{-1}, (b \vee x)^{-1}) \in \sigma$. Logo, atendendo ao Lema 2.3.9, temos $(a \vee x, b \vee x) \in \rho_{\min}$. Portanto, ρ_{\min} é uma \vee -congruência em S com traço ρ .

Por último, se θ é uma \vee -congruência em S com traço ρ , então θ é uma congruência em S com traço ρ , pelo que $\rho_{\min} \subseteq \theta$. \square

Em [RM76] Reilly e Munn provam que se S é um semigrupo inverso E -unitário e ρ é uma congruência normal em E , então S/ρ_{\min} é também E -unitário. Como tal, o corolário seguinte é consequência imediata do teorema anterior.

Corolário 2.3.11 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso E -unitário e ρ uma congruência \vee -normal. Então S/ρ_{\min} é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso E -unitário.* \square

Vamos, agora, mostrar que o resultado apresentado no Teorema 2.3.10, pode não ser verdadeiro no caso geral. No exemplo seguinte apresentamos um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso não E -unitário S e uma congruência \vee -normal ρ , tais que ρ_{\min} não é uma \vee -congruência em S .

Exemplo

Sejam $T = Z \times \{0, 1\}$ e $S = T \cup \{0\}$. Em S , defina-se uma operação binária do seguinte modo:

$$\begin{cases} (m, a)(n, b) = (m + n, ab) \\ 0s = 0 \end{cases}$$

para quaisquer $m, n \in Z$, $a, b \in \{0, 1\}$ e $s \in S$.

Com esta operação, S é um semigrupo com zero, comutativo e inverso, cujos idempotentes são 0 , $e = (0, 0)$ e $u = (0, 1)$. Além disso, S não é E -unitário, já que $0s = 0 \in E$, para qualquer $s \in S \setminus E$, sendo $S \setminus E \neq \emptyset$.

Em S , defina-se uma ordem parcial \leq por:

$$\begin{cases} (m, a) \leq (n, b) \Leftrightarrow m \leq n \text{ e } a \leq b \\ 0 \leq s \end{cases}$$

para quaisquer $m, n \in Z$, $a, b \in \{0, 1\}$ e $s \in S$. Com esta ordem S é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

Seja

$$\rho = \{(0, 0), (e, e), (u, u), (e, 0), (0, e)\}.$$

Facilmente se verifica que ρ é uma congruência normal em E . Provemos que ρ é \vee -normal. Defina-se a aplicação ϕ de S em Z por

$$\begin{cases} (m, a)\phi = a \\ 0\phi = 0 \end{cases}$$

para quaisquer $m \in Z$ e $a \in \{0, 1\}$.

Nestas condições, ϕ é um \vee -homomorfismo e, portanto, o seu núcleo, $\bar{\phi}$, é uma \vee -congruência em S . Como o traço de $\bar{\phi}$ é ρ , podemos concluir que ρ é \vee -normal.

Finalmente, verifiquemos que ρ_{\min} não é uma \vee -congruência em S .

Tomemos $s = (3, 0)$ e $t = (2, 0)$. Temos $ss^{-1} = tt^{-1} = (0, 0) = e$, pelo que $(ss^{-1}, tt^{-1}) \in \rho$. Como existe $f = 0 \in E$ tal que $(ss^{-1}, f) \in \rho$ e $fs = ft$, concluímos que $(s, t) \in \rho_{\min}$.

Seja $x = (0, 1)$. Temos $(s \vee x)(s \vee x)^{-1} = (t \vee x)(t \vee x)^{-1} = (0, 1) = u$, por conseguinte, $((s \vee x)(s \vee x)^{-1}, (t \vee x)(t \vee x)^{-1}) \in \rho$. Ora, $(u, f) \in \rho$ se e só se $f = u$. Como $u(s \vee x) \neq u(t \vee x)$, então $(s \vee x, t \vee x) \notin \rho_{\min}$ e, portanto, ρ_{\min} não é uma \vee -congruência em S .

2.3.2 A maior \vee -congruência com certo traço, num semigrupo inverso \vee -acessível

Um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S diz-se \vee -acessível se, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a \vee b)^{-1}(a \vee b) = a^{-1}a \vee b^{-1}b.$$

Vamos verificar que, num semigrupo \vee -acessível, dada uma congruência \vee -normal ρ , a relação ρ_{\max} é a maior \vee -congruência em S com traço ρ .

Teorema 2.3.12 *Sejam S um semigrupo \vee -acessível e ρ uma congruência \vee -normal em E . Então ρ_{\max} é a maior \vee -congruência em S com traço ρ .*

Demonstração

Já sabemos que ρ_{\max} é uma congruência e que, dados $a, b \in S$, temos $(a, b) \in \rho_{\max}$ se e só se $(a^{-1}ea, b^{-1}eb) \in \rho$, para qualquer $e \in E$. Resta mostrar que ρ_{\max} é uma \vee -congruência. Tomemos $a, b, c \in S$ e suponhamos que $(a, b) \in \rho_{\max}$.

Como ρ é \vee -normal, então ρ é o traço de uma \vee -congruência em S , pelo que é uma \vee -congruência em E . Logo,

$$(a^{-1}ea \vee c^{-1}ec, b^{-1}eb \vee c^{-1}ec) \in \rho,$$

para quaisquer $e \in E$ e $c \in S$.

Por outro lado, como o semigrupo é \vee -acessível temos, para quaisquer $a, c \in S$ e $e \in E$,

$$(a \vee c)^{-1}e(a \vee c) = (ea \vee ec)^{-1}(ea \vee ec) = a^{-1}ea \vee c^{-1}ec.$$

Assim, $((a \vee c)^{-1}e(a \vee c), (b \vee c)^{-1}e(b \vee c)) \in \rho$, para quaisquer $e \in E$ e $c \in S$. Portanto $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{\max}$. Por último, se θ é uma \vee -congruência em S com traço ρ , então θ é uma congruência em S com traço ρ , pelo que $\theta \subseteq \rho_{\max}$. \square

2.4 \vee -Congruências que separam idempotentes

Nesta secção estudamos \vee -congruências que separam idempotentes, num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S . Põe-se a questão de averiguar que propriedades adicionais deverá ter um sistema de núcleo normal de grupos de S para que a congruência $\rho_{\mathcal{N}}$, definida na Proposição 1.2.9, seja uma \vee -congruência.

Definição 2.4.1 *Seja S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. Consideremos uma família $\mathcal{N} = \{N_e \mid e \in E\}$ de l -subgrupos de S , disjuntos dois a dois, tais que, para quaisquer $e \in E$ e $a, b \in S$,*

- 1) $a^{-1}N_e a \subseteq N_{a^{-1}ea}$;
- 2) $N_{aa^{-1}a} \vee N_{bb^{-1}b} \subseteq N_{(a \vee b)(a \vee b)^{-1}(a \vee b)}$.

*A uma família nestas condições chamamos **sistema de núcleo normal de l -grupos (s.n.n.lg.)** de S .*

É nosso propósito mostrar que, num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, existe uma bijecção entre o conjunto dos seus sistemas de núcleo normais de l -grupos e o conjunto das suas \vee -congruências que separam idempotentes, ficando cada \vee -congruência determinada pelo seu sistema de núcleo.

Lema 2.4.2 *Sejam (S, \leq) um semigrupo \vee -semi-reticulado e N um subgrupo \vee -subsemi-reticulado de S . Então*

- i) N é um reticulado para a ordem \leq ;*
- ii) se N é convexo, então N é um subreticulado de S .*

Demonstração

i) Sejam $a, b \in N$. Uma vez que N é um \vee -subsemi-reticulado de S , então $a \vee_N b = a \vee_S b$. Por outro lado, como N é um subgrupo parcialmente ordenado, existe $a \wedge_N b$. Logo N é um reticulado para a ordem \leq .

ii) Verifiquemos que N é um subreticulado de S . Sejam $a, b \in N$. Já observámos que $a \vee_N b = a \vee_S b$. Falta provar que $a \wedge_N b = a \wedge_S b$.

Seja $x \in S$ tal que $x \leq a$ e $x \leq b$. Provemos que $x \leq a \wedge_N b$.

Como $x \leq a$ e $x \leq b$ então, $x \vee (a \wedge_N b) \leq a, b$ e, portanto, $x \vee (a \wedge_N b)$ é um minorante de a e de b em S .

Por outro lado, temos $a \wedge_N b \leq x \vee (a \wedge_N b) \leq a$, com $a, a \wedge_N b \in N$. Portanto, como N é convexo, $x \vee (a \wedge_N b) \in N$. Assim, como $x \vee (a \wedge_N b)$ é um minorante de a e de b em N e $a \wedge_N b \leq x \vee (a \wedge_N b) \in N$, segue-se que $x \vee (a \wedge_N b) = a \wedge_N b$. Portanto $x \leq a \wedge_N b$. Logo $a \wedge_S b$ existe e coincide com $a \wedge_N b$. □

Teorema 2.4.3 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e consideremos $\mathcal{N} = \{N_e \mid e \in E\}$ um s.n.n.lg de S . Então a relação $\rho_{\mathcal{N}}$ definida por*

$$(a, b) \in \rho_{\mathcal{N}} \Leftrightarrow b \in N_{aa^{-1}a}$$

é uma \vee -congruência em S que separa idempotentes e com sistema de núcleo \mathcal{N} .

Reciprocamente, dada uma \vee -congruência ρ em S que separa idempotentes, então o seu sistema de núcleo é um s.n.n.lg de S , que determina ρ , tendo-se $\rho = \rho_{K(\rho)}$.

Demonstração

Já sabemos, pela Proposição 1.2.9, que $\rho_{\mathcal{N}}$ é uma congruência em S que separa idempotentes e com sistema de núcleo \mathcal{N} . Falta provar que $\rho_{\mathcal{N}}$ é compatível com \vee . Sejam $a, b, c \in S$ e suponhamos que $(a, b) \in \rho_{\mathcal{N}}$. Então $b \in N_{aa^{-1}}a$. Como $c \in N_{cc^{-1}}c$, temos $(b \vee c) \in N_{aa^{-1}}a \vee N_{cc^{-1}}c$. Mas, \mathcal{N} é um *s.n.n.* lg de S pelo que satisfaz a condição 2) da definição anterior. Logo $(b \vee c) \in N_{(a \vee c)(a \vee c)^{-1}}(a \vee c)$. Portanto $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{\mathcal{N}}$ e concluímos que $\rho_{\mathcal{N}}$ é compatível com \vee .

Reciprocamente, pretendemos provar que, dada uma \vee -congruência ρ em S que separa idempotentes, então o seu sistema de núcleo é um *s.n.n.* lg de S . Atendendo à Proposição 1.2.9, sabemos que o seu sistema de núcleo é um *s.n.n.g.* de S , que determina ρ , tendo-se $\rho = \rho_{K(\rho)}$. Falta provar que o sistema de núcleo de ρ é uma família de l -subgrupos de S , satisfazendo a condição 2) da definição de *s.n.n.* lg de S .

Seja $e \in E$. Verifiquemos que o subgrupo $[e]_{\rho}$ é um l -subgrupo de S .

Sejam $x, y \in [e]_{\rho}$. Então $(x, e) \in \rho$, $(y, e) \in \rho$ e, uma vez que ρ é uma \vee -congruência em S , temos $(x \vee y, e) \in \rho$, ou seja, $x \vee y \in [e]_{\rho}$. Logo $[e]_{\rho}$ é um \vee -subsemi-reticulado de S . Por outro lado, como $[e]_{\rho}$ é convexo (por ser uma ρ -classe de uma \vee -congruência) e é um subgrupo de S , então, atendendo ao lema anterior, $[e]_{\rho}$ é um subreticulado de S . Concluímos pois que $[e]_{\rho}$ é um l -subgrupo de S .

Finalmente provemos que $K(\rho)$ satisfaz a condição 2) da definição de *s.n.n.* lg de S .

Sejam $a, b, x, y \in S$ tais que $x \in [aa^{-1}]_{\rho}a$ e $y \in [bb^{-1}]_{\rho}b$. Uma vez que $\rho = \rho_{K(\rho)}$, temos $(a, x) \in \rho$ e $(b, y) \in \rho$. Como ρ é uma \vee -congruência, então $(a \vee b, x \vee y) \in \rho$, donde

$$(x \vee y) \in [(a \vee b)(a \vee b)^{-1}]_{\rho}(a \vee b).$$

Logo $[aa^{-1}]_{\rho}a \vee [bb^{-1}]_{\rho}b \subseteq [(a \vee b)(a \vee b)^{-1}]_{\rho}(a \vee b)$. □

No caso particular do semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S ser finito podemos garantir que a identidade é a única \vee -congruência que separa idempotentes em S .

Teorema 2.4.4 *Seja S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e finito. Então a única \vee -congruência em S que separa idempotentes é a identidade.*

Demonstração

Seja ρ uma \vee -congruência em S que separa idempotentes. Então, atendendo ao teorema anterior, o seu sistema de núcleo é um *s.n.n.lg* de S . Como S é finito, cada $[e]_\rho$, com $e \in E$, é um l -grupo finito, pelo que é trivial. Concluimos pois que ρ é a identidade em S . \square

Vamos, agora, mostrar que a única \vee -congruência em $L^\vee(G)$ que separa idempotentes é a identidade.

Já vimos que $L^\vee(G)$ é um semigrupo de Clifford, pelo que $\mu = \mathcal{H}$, tendo-se $(Hx, Ky) \in \mathcal{H}$ se e só se $H = K$.

Sejam $Hx, Ky \in L^\vee(G)$ e ρ uma \vee -congruência em $L^\vee(G)$ que separa idempotentes. Suponhamos que $(Hx, Ky) \in \rho$. Como ρ separa idempotentes, temos $\rho \subseteq \mu = \mathcal{H}$ e, portanto, $H = K$. Por outro lado, tendo em conta o Teorema 2.1.2 *ii*), cada ρ -classe é um \vee -subsemi-reticulado, pelo que $Hx \vee Hy = Hz$, com $z \in G$. Assim, temos $H \langle xy^{-1} \rangle y = Hz$ e, portanto, $xy^{-1} \in H$. Logo $Hx = Hy = Ky$ e ρ é a identidade.

O próximo resultado, que nos interessa ter presente no que se segue, pode ser encontrado em [CP67], Teorema 7.56.

Proposição 2.4.5 *Num semigrupo inverso S , dados dois sistemas de núcleo normais de grupos $\mathcal{M} = \{M_e \mid e \in E\}$ e $\mathcal{N} = \{N_e \mid e \in E\}$, definindo*

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \vee \mathcal{N} &= \mathcal{MN} = \{M_e N_e \mid e \in E\} \\ \mathcal{M} \wedge \mathcal{N} &= \{M_e \cap N_e \mid e \in E\},\end{aligned}$$

temos que \mathcal{MN} e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ são sistemas de núcleo normais de grupos de S . Além disso,

$$\begin{aligned}\rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}} &= \rho_{\mathcal{MN}} = \rho_{\mathcal{N}} \circ \rho_{\mathcal{M}} \\ \rho_{\mathcal{M}} \cap \rho_{\mathcal{N}} &= \rho_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}}.\end{aligned}$$

Mostremos que se um semigrupo inverso S é um semigrupo \vee -semi-reticulado, dados $\mathcal{M}=\{M_e \mid e \in E\}$ e $\mathcal{N}=\{N_e \mid e \in E\}$, sistemas de núcleo normais de l -grupos de S , então \mathcal{MN} e $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ também o são. Com efeito, atendendo ao Teorema 2.4.3, as congruências $\rho_{\mathcal{M}}$ e $\rho_{\mathcal{N}}$ são \vee -congruências em S que separam idempotentes e têm sistemas de núcleo \mathcal{M} e \mathcal{N} , respectivamente. Logo, uma vez que a composta de duas \vee -congruências que separam idempotentes é uma \vee -congruência que separa idempotentes, $\rho_{\mathcal{MN}} = \rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}}$ também o é. Assim, como \mathcal{MN} é o sistema de núcleo de $\rho_{\mathcal{MN}}$, atendendo ao Teorema 2.4.3, concluímos que \mathcal{MN} é um sistema de núcleo normal de l -grupos de S .

Analogamente, uma vez que $\rho_{\mathcal{M}} \cap \rho_{\mathcal{N}} = \rho_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}}$ e que a intersecção de duas \vee -congruências é uma \vee -congruência, podemos concluir que $\rho_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}}$ é uma \vee -congruência em S que separa idempotentes com sistema de núcleo $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$. Logo $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ é um sistema de núcleo normal de l -grupos de S .

Estamos, agora, em condições de afirmar que:

Teorema 2.4.6 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso o reticulado das \vee -congruências que separam idempotentes é distributivo.*

Demonstração

Sejam $\rho_{\mathcal{M}}, \rho_{\mathcal{N}}$ e $\rho_{\mathcal{U}}$ \vee -congruências em S que separam idempotentes com sistemas de núcleo, respectivamente,

$$\mathcal{M} = \{M_e \mid e \in E\}, \mathcal{N} = \{N_e \mid e \in E\} \text{ e } \mathcal{U} = \{U_e \mid e \in E\}.$$

Já sabemos, pela Proposição 2.3.7, que as \vee -congruências que separam idempotentes formam um reticulado. Resta provar que é distributivo. Para tal usaremos a Proposição 1.1.2.

Suponhamos que $\rho_U \cap \rho_N = \rho_U \cap \rho_M$ e que $\rho_U \vee \rho_N = \rho_U \vee \rho_M$. Então, tendo em conta a Proposição 2.4.5, temos, a partir das igualdades anteriores, $U_e \cap N_e = U_e \cap M_e$ e $U_e \vee N_e = U_e \vee M_e$, para cada $e \in E$.

Seja $\mathcal{L} = \{L_e \mid e \in E\}$ o sistema de núcleo de $\rho_{\mathcal{L}}$, a maior \vee -congruência em S que separa idempotentes. Então U_e, N_e e M_e são l -subgrupos convexos do l -grupo L_e . Por outro lado, como o reticulado dos l -subgrupos convexos de um l -grupo é distributivo ([McA98], Corolário 1.3.4), atendendo à Proposição 1.1.2, temos $N_e = M_e$, para cada $e \in E$. Consequentemente $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ e $\rho_{\mathcal{N}} = \rho_{\mathcal{M}}$. \square

Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência \vee -normal em E . Vimos, no Teorema 2.3.7, que o conjunto $\mathcal{C}_{\rho}^{\vee}(S)$ das \vee -congruências em S com traço ρ é um subreticulado de $\mathcal{C}^{\vee}(S)$. Representemos por ρ^* a menor \vee -congruência em S com traço ρ . Então existe um isomorfismo de ordem entre o reticulado $\mathcal{C}_{\rho}^{\vee}(S)$ das \vee -congruências em S com traço ρ e o reticulado $\mathcal{C}_1^{\vee}(S/\rho^*)$ das \vee -congruências em S/ρ^* que separam idempotentes. De facto, é uma questão de rotina verificar que a aplicação i definida de $\mathcal{C}_{\rho}^{\vee}(S)$ para $\mathcal{C}_1^{\vee}(S/\rho^*)$ por, para qualquer $\alpha \in \mathcal{C}_{\rho}^{\vee}(S)$,

$$\alpha i = \frac{\alpha}{\rho^*}$$

onde $([a]_{\rho^*}, [b]_{\rho^*}) \in \frac{\alpha}{\rho^*} \Leftrightarrow [a]_{\alpha} = [b]_{\alpha}$, para quaisquer $a, b \in S$, é um isomorfismo de ordem.

Ora, pelo teorema anterior $\mathcal{C}_1^{\vee}(S/\rho^*)$ é distributivo, pelo que $\mathcal{C}_{\rho}^{\vee}(S)$ também o é.

Acabámos, assim, de provar o seguinte.

Corolário 2.4.7 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, o reticulado das suas \vee -congruências com um dado traço é distributivo.* \square

Através do exemplo seguinte vamos poder concluir que se S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, então o reticulado, $\mathcal{C}^\vee(S)$, de todas as suas \vee -congruências, não é, em geral, modular.

Exemplo

Consideremos o semigrupo $S = \{0, a, b, 1\}$, com identidade 1, zero 0 e em que $ab = ba = 0$. Então S é um semigrupo comutativo de idempotentes. A ordem inversa da natural é dada por

$$s \leq t \Leftrightarrow t = ts = st,$$

para quaisquer $s, t \in S$. Logo, atendendo ao resultado dual da Proposição 1.2.1, com esta ordem S é um \vee -semi-reticulado, tendo-se $s \vee t = st$.

Assim

$$u(s \vee t) = u(st) = (us)(ut) = us \vee ut,$$

e, de igual modo, $(s \vee t)u = su \vee tu$, para quaisquer $s, t, u \in S$. Por conseguinte, S é um semigrupo \vee -semi-reticulado em que todas as congruências são \vee -congruências.

Consideremos os ideais $I = \{0, a\}$ e $J = \{0, b\}$ de S e as relações:

$$\rho_I \text{ com classes : } \{0, a\}, \{1\}, \{b\};$$

$$\rho_J \text{ com classes : } \{0, b\}, \{1\}, \{a\};$$

$$\alpha_I \text{ com classes : } \{0, a\}, \{1, b\};$$

$$\alpha_J \text{ com classes : } \{0, b\}, \{1, a\}.$$

Então ρ_I e ρ_J são as congruências de Rees associadas aos ideais I e J , e α_I e α_J são as congruências associadas aos ideais primos I e J .

Nestas condições temos $\rho_I \subset \alpha_I$ e

$$\begin{cases} \rho_I \cap \alpha_J = \alpha_I \cap \alpha_J = 1_S \\ \rho_I \vee \alpha_J = \alpha_I \vee \alpha_J = S \times S. \end{cases}$$

Logo, pela Proposição 1.1.1, podemos concluir que o reticulado das \vee -congruências em S não é modular.

2.5 Congruências de l -grupo

O resultado principal desta secção permite-nos caracterizar, num semigrupo \vee - semi-reticulado inverso S , uma congruência de l -grupo ρ , através do seu núcleo $\text{Ker } \rho$.

Num semigrupo inverso, uma congruência é uma congruência de grupo se e só se o seu traço for a relação universal ([How95], Proposição 5.3.1). O próximo resultado é uma consequência da Proposição 1.2.7, e garante-nos que, num semigrupo inverso, existe um isomorfismo de ordem entre o reticulado dos seus subsemigrupos normais unitários e o reticulado das suas congruências de grupo, pelo que cada congruência de grupo fica determinada pelo seu núcleo.

Um subsemigrupo M de um semigrupo inverso S diz-se *unitário* se, para quaisquer $m \in M$ e $a \in S$,

$$(am \in M \text{ ou } ma \in M) \Rightarrow a \in M.$$

Observemos que se M é um subsemigrupo inverso de S , então ser unitário é equivalente à condição: para qualquer $a \in S$,

$$m \in M, am \in M \Rightarrow a \in M$$

bem como à condição dual.

Proposição 2.5.1 *Seja S um semigrupo inverso.*

i) Se M é um subsemigrupo normal e unitário de S , então a relação ρ_M definida por

$$(a, b) \in \rho_M \iff ab^{-1} \in M$$

é uma congruência de grupo em S com núcleo M .

ii) Se ρ é uma congruência de grupo em S então o seu núcleo é um subsemigrupo normal e unitário de S , tendo-se $\rho = \rho_{\text{Ker } \rho}$.

Este resultado leva-nos a averiguar que propriedades adicionais deverão ter os subsemigrupos normais e unitários de um semigrupo inverso com uma ordem de \vee -semi-reticulado, para que uma congruência de grupo seja uma congruência de l -grupo.

Recordemos (Corolário 2.1.3) que se S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso então σ é a menor congruência de l -grupo em S . Além disso, em S/σ podemos definir uma ordem por, para quaisquer $A, B \in S/\sigma$,

$$A \leq B \Leftrightarrow a \leq b, \text{ para alguns } a \in A, b \in B.$$

Utilizemos este facto e alguns resultados sobre l -grupos no estudo das congruências de l -grupo, em semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

Teorema 2.5.2 *Sejam S um semigrupo \vee - semi-reticulado inverso, σ a menor congruência de l -grupo e $G = S/\sigma$. Representemos por θ a aplicação canónica definida de S em G .*

i) Se M é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado e convexo de S , então $M\theta$ é um l -ideal de G . Se, além disso, M for unitário, então $M = (M\theta)\theta^{-1}$.

ii) Se N é um l -ideal de G , então $N\theta^{-1}$ é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de S .

Demonstração

i) Sejam M um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado e convexo de S e $N = M\theta$. Provemos que N é um l -subgrupo normal e convexo de G .

Sejam $a\theta, b\theta \in N$. Como $a, b \in M$ e M é um subsemigrupo inverso de S , segue-se que $ab^{-1} \in M$. Então $(a\theta)(b\theta)^{-1} = (ab^{-1})\theta \in N$ e, portanto, N é um subgrupo de G .

Provemos agora que se M é conjugado então N é normal.

Tomemos $a\theta \in N$ e $c\theta \in G$. Como $a \in M, c \in S$ e M é conjugado $c^{-1}ac \in M$, pelo que $(c^{-1}ac)\theta = (\theta c)^{-1}(\theta a)(\theta c) \in N$. Logo N é um subgrupo normal de G .

Sejam $a\theta, b\theta \in N$. Uma vez que $a, b \in M$ e M é um \vee -subsemi-reticulado de S , temos $(a \vee b) \in M$ e, portanto, $a\theta \vee b\theta = (a \vee b)\theta \in N$. Logo N é um \vee -subsemi-reticulado de G . Como N é um subgrupo de G , atendendo à Proposição 1.3.5, N é um subreticulado de G .

Seguidamente provemos que N é convexo. Sejam $a\theta, b\theta \in N$ e $c\theta \in G$, tais que $a\theta \leq c\theta \leq b\theta$. Atendendo à ordem em G , segue-se que $x \leq y \leq z$, para alguns $x \in a\theta$, $y \in c\theta$ e $z \in b\theta$. Ora, como θ é a aplicação canónica de S em $G = S/\sigma$,

$$\begin{aligned} x \in a\theta &\Leftrightarrow \exists e \in E : ea = ex, \\ y \in c\theta &\Leftrightarrow \exists f \in E : fc = fy, \\ z \in b\theta &\Leftrightarrow \exists u \in E : ub = uz. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $x \leq y \leq z$, então $ufex \leq ufey \leq ufez$ e, uma vez que os idempotentes comutam, então $fu(ex) \leq eu(fy) \leq ef(uz)$ e também $fu(ea) \leq eu(fc) \leq ef(ub)$. Mas, como M é um subsemigrupo cheio e $a, b \in M$ temos $fu(ea), ef(ub) \in M$. Como M é convexo, $eu(fc) \in M$ e, portanto, $(eu(fc))\theta \in N$. Assim, dado que $e\theta = u\theta = f\theta = 1_G$, obtemos $(eu(fc))\theta = c\theta \in N$. Logo N é convexo.

Finalmente provemos que, sendo M unitário então $N\theta^{-1} = M$. É evidente que $M \subseteq N\theta^{-1}$. Reciprocamente, seja $y \in N\theta^{-1}$. Então $y\theta \in N$. Como $N = M\theta$, existe $m \in M$ tal que $y\theta = m\theta$. Mas, dado que θ é a aplicação canónica de S em $G = S/\sigma$, existem $e \in E, m \in M$ tais que $ey = em$. Como M é um subsemigrupo cheio e unitário temos $ey = em \in M$, pelo que, $y \in M$.

ii) Sejam N um l -ideal de G e $M = N\theta^{-1}$. Provemos que M é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de S .

Sejam $x, y \in M$. Então $x\theta, y\theta \in N$ e, como N é um subgrupo de G , temos $(x\theta)(y\theta) = (xy)\theta \in N$. Logo $xy \in M$. Analogamente se prova que $x^{-1} \in M$. Portanto M é um subsemigrupo inverso de S .

Seja $e \in E$. Então $e\theta = 1_G \in N$ e, portanto, $e \in M$. Concluimos que M

é cheio.

Verifiquemos agora que se N é normal, então M é conjugado.

Sejam $x \in M$ e $s \in S$. Então $x\theta \in N$ e $s\theta \in G$. Como N é um subgrupo normal, $(s^{-1}xs)\theta = (s\theta)^{-1}(x\theta)(s\theta) \in N$, pelo que $(s^{-1}xs) \in M$. Portanto M é conjugado.

Tomemos $x, y \in M$. Então $x\theta, y\theta \in N$. Como N é um subreticulado de G temos $x\theta \vee y\theta \in N$, isto é, $(x \vee y)\theta \in N$. Portanto $x \vee y \in M$. Logo M é um \vee -subsemi-reticulado de S .

Sejam $x, z \in M$ e $y \in S$ tais que $x \leq y \leq z$. Como θ é isótono, temos $x\theta \leq y\theta \leq z\theta$ e, dado que $x\theta, z\theta \in N$ e N é convexo, então $y\theta \in N$, donde $y \in M$. Logo M é convexo.

Por último, resta mostrar que M é unitário. Sejam $a \in S$ e $m \in M$ e suponhamos $am \in M$. Então $(am)\theta = (a\theta)(m\theta) \in N$, com $(m\theta) \in N$. Como N é um l -ideal de G , temos $(m\theta)^{-1} \in N$, pelo que $(a\theta) \in N$. Portanto $a \in M$. Analogamente, prova-se que, dados $a \in S$ e $m \in M$ se $ma \in M$, então $a \in M$. Logo M é unitário. \square

As afirmações seguintes são consequência do teorema anterior.

Corolário 2.5.3 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S existe um isomorfismo de ordem entre o reticulado dos seus subsemigrupos inversos, cheios, \vee -subsemi-reticulados, convexos e unitários e o reticulado dos l -subgrupos convexos de $G = S/\sigma$.* \square

Corolário 2.5.4 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S existe um isomorfismo de ordem entre o reticulado dos seus subsemigrupos normais, \vee -subsemi-reticulados, convexos e unitários e o reticulado dos l -ideais de $G = S/\sigma$.* \square

Já referimos anteriormente que, o reticulado dos l -subgrupos convexos de um l -grupo é distributivo (veja-se [McA98], Corolário 1.3.4) bem como o reticulado dos seus l -ideais (veja-se Proposição 1.3.12). Estes resultados, em conjunto com os corolários anteriores, permitem-nos afirmar que:

Corolário 2.5.5 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , o reticulado dos seus subsemigrupos inversos, cheios, \vee -subsemi-reticulados, convexos e unitários é distributivo.* \square

Corolário 2.5.6 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , o reticulado dos seus subsemigrupos normais, \vee -subsemi-reticulados, convexos e unitários é distributivo.* \square

Vamos agora responder à questão posta anteriormente: quando é que a congruência de grupo, definida na Proposição 2.5.1, é uma congruência de l -grupo?

Teorema 2.5.7 *Seja S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.*

i) Se M é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de S , então a relação ρ_M definida por

$$(a, b) \in \rho_M \iff ab^{-1} \in M$$

é uma congruência de l -grupo em S com núcleo M .

ii) Se ρ é uma congruência de l -grupo em S , então o seu núcleo é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de S , tendo-se $\rho = \rho_{\text{Ker}\rho}$.

Demonstração

i) Pela Proposição 2.5.1 *i)* sabemos que ρ_M é uma congruência de grupo em S com núcleo M . Provemos que ρ_M é compatível com \vee .

Sejam $a, b, c, d \in S$ tais que $(a, b) \in \rho_M$ e $(c, d) \in \rho_M$. Então $ab^{-1} \in M$ e $cd^{-1} \in M$. Designemos por θ a aplicação canónica de S em $G = S/\sigma$, onde σ é a menor congruência de l -grupo em S . Seja $N = M\theta$ que, pelo Teorema 2.5.2, sabemos ser um l -ideal do l -grupo G . Então, atendendo à Proposição 1.3.11, a relação ρ_N definida em G por

$$(a\theta, b\theta) \in \rho_N \iff a\theta(b\theta)^{-1} \in N$$

é uma congruência em G compatível com \vee . Como $ab^{-1} \in M$ e $cd^{-1} \in M$ temos, $(ab^{-1})\theta \in N$ e $(cd^{-1})\theta \in N$. Logo $(ab^{-1})\theta = a\theta(b\theta)^{-1} \in N$ e também $(cd^{-1})\theta = c\theta(d\theta)^{-1} \in N$. Assim, pela definição de ρ_N , temos $(a\theta, b\theta) \in \rho_N$ e $(c\theta, d\theta) \in \rho_N$ e, portanto, $(a\theta \vee c\theta, b\theta \vee d\theta) \in \rho_N$, ou seja, $(a\theta \vee c\theta)(b\theta \vee d\theta)^{-1} \in N$. Mas, como θ é \vee -um homomorfismo $((a \vee c)(b \vee d)^{-1})\theta \in N$ e, portanto, $(a \vee c)(b \vee d)^{-1} \in N\theta^{-1}$. Por último, como M é unitário, então, pelo Teorema 2.5.2, temos $N\theta^{-1} = (M\theta)\theta^{-1} = M$, vindo assim $(a \vee c)(b \vee d)^{-1} \in M$. Logo $(a \vee c, b \vee d) \in \rho_M$ e, portanto, ρ_M é uma congruência de grupo compatível com \vee , isto é, uma congruência de l -grupo.

ii) Atendendo à Proposição 2.5.1 *ii)* sabemos que se ρ é uma congruência de grupo em S , então o seu núcleo é um subsemigrupo de S normal e unitário, que determina ρ . Provemos que o núcleo de ρ é um \vee -subsemi-reticulado convexo de S . Recordemos que $Ker \rho = \{a \in S \mid \exists e \in E : (a, e) \in \rho\}$. Atendendo ao Lema de Lallement,

$$Ker \rho = \{a \in S \mid (a, a^2) \in \rho\}$$

e por ρ ser uma congruência de grupo, $Ker \rho = \{a \in S \mid [a]_\rho = 1_\rho\}$, onde 1_ρ representa a identidade de S/ρ .

Sejam $h, l \in Ker \rho$. Temos $[h \vee l]_\rho = [h]_\rho \vee [l]_\rho = 1_\rho \vee 1_\rho = 1_\rho$ e, portanto, $(h \vee l) \in Ker \rho$. Logo $Ker \rho$ é um \vee -subsemi-reticulado de S .

Tomemos $h, l \in Ker \rho$ e $t \in S$ tais que $h \leq t \leq l$. Então

$$[h]_\rho \leq [t]_\rho \leq [l]_\rho.$$

Como $[h]_\rho = [l]_\rho = 1_\rho$, segue-se que $[t]_\rho = 1_\rho$ e, portanto, $t \in Ker \rho$. Logo $Ker \rho$ é convexo. \square

Este resultado permite-nos afirmar que, dado um semigrupo inverso \vee -semi-reticulado S , existe um isomorfismo de ordem entre o reticulado $M(S)$ dos seus subsemigrupos normais, \vee -subsemi-reticulados, convexos e unitários e o reticulado das suas congruências de l -grupo. Assim $M(S)$ consiste nos

núcleos das congruências de l -grupo em S e cada congruência de l -grupo em S fica determinada pelo seu núcleo. Tendo, agora, em conta o Corolário 2.5.6 podemos concluir o seguinte:

Corolário 2.5.8 *Num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , o reticulado das suas congruências de l -grupo é distributivo.* \square

Notemos que este último resultado é também consequência do Corolário 2.4.7.

2.6 Congruências de l -grupo com zero

Dados um semigrupo \vee -semi-reticulado S e um seu ideal I , apresentámos, na secção 2.1, condições para que a congruência de Rees associada a I seja uma \vee -congruência e, portanto, o conjunto quociente S/ρ_I seja um semigrupo \vee -semi-reticulado com zero. Vamos, agora, estudar as \vee -congruências cujo quociente é um l -grupo com zero e que designamos por *congruências de l -grupo com zero*. Notemos que, num l -grupo com zero, ou zero é o elemento máximo ou é o elemento mínimo do l -grupo com zero.

Analisemos primeiro a situação em que o conjunto quociente é um l -grupo com zero sendo zero o elemento máximo.

2.6.1 Congruências de l -grupo com zero em que zero é o elemento máximo do conjunto quociente

Nos próximos resultados representaremos por P^* o conjunto $S \setminus P$.

Teorema 2.6.1 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, ρ uma sua \vee -congruência e P um seu ideal primo, tais que, para quaisquer $e, f \in E$ e $a, b \in S$,*

i) se $a \in P$, então $(a, b) \in \rho$ se e só se $b \in P$;

- ii) se $e, f \in P^*$, então $(e, f) \in \rho$;
 iii) $(a \vee b) \in P^*$ se e só se $a, b \in P^*$.

Então ρ é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento máximo do conjunto quociente S/ρ .

Demonstração

Os factos de P ser um ideal primo e ρ ser uma \vee -congruência, em conjunto com as condições i) e ii), garantem que S/ρ é um grupo com zero P . Por outro lado, como P satisfaz a condição iii), em S/ρ os elementos distintos de zero formam um \vee -subsemi-reticulado. Logo S/ρ é um l -grupo com zero P .

Provemos que P é o elemento máximo de S/ρ . Representemos por $[s]$ a ρ -classe de $s \in S$. Sejam $p \in P$ e $g \in P^*$. Como P satisfaz iii), temos $g \vee p \in P$ e, por i), segue-se que $[g \vee p] = [p]$. Logo, atendendo à ordem em S/ρ ,

$$[g] \leq [p], \text{ para quaisquer } p \in P, g \in P^*.$$

Portanto P é o elemento máximo de S/ρ . □

O recíproco deste teorema também se verifica.

Teorema 2.6.2 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência de l -grupo com zero 0 em que zero é o elemento máximo do conjunto quociente. Então o conjunto $Z = \{a \in S \mid [a] = 0\}$ é um ideal primo de S . Além disso, ρ e Z satisfazem as condições i), ii) e iii) do teorema anterior.*

Demonstração

Tomemos $a \in Z$ e $s \in S$. Então $[as] = [a][s] = 0[s] = 0$ e, portanto, $as \in Z$. Analogamente se prova que, dados $a \in Z$ e $s \in S$, então $sa \in Z$. Logo Z é um ideal de S .

Sejam $s, t \in S$ tais que $st \in Z$. Então $[st] = [s][t] = 0$. Como S/ρ é um grupo com zero, $[s] = 0$ ou $[t] = 0$. Logo $s \in Z$ ou $t \in Z$ e, portanto, Z é primo.

É evidente que ρ e Z satisfazem a condição *i*) do teorema anterior. Verifiquemos, agora, que Z satisfaz as condições *ii*) e *iii*).

ii) Sejam $e, f \in E$ tais que $e, f \in Z^*$. Então $[e]$ e $[f]$ são idempotentes não nulos de S/ρ , um grupo com zero. Logo $[e] = [f]$ e, portanto $(e, f) \in \rho$.

iii) Se $a, b \in Z^*$, então $[a], [b] \neq 0$. Como S/ρ é um l -grupo com zero, temos $[a \vee b] = [a] \vee [b] \neq 0$. Logo $(a \vee b) \in Z^*$.

Tomemos $a \in Z$ e $b \in S$. Então $[a \vee b] = [a] \vee [b] = 0 \vee [b] = 0$, dado que zero é o elemento máximo de S/ρ . Portanto $(a \vee b) \in Z$. \square

Estes resultados levam-nos à definição seguinte.

Definição 2.6.3 *Seja S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. Um ideal P de S diz-se um **sobre-ideal** se, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$(a \vee b) \in P^* \text{ se e só se } a, b \in P^*.$$

Notemos que se P for um sobre-ideal primo de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , temos que P^* é um subsemigrupo e um \vee -subsemi-reticulado inverso de S . Então, se M é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de P^* , pelo Teorema 2.5.7 *i*), a relação de equivalência ρ_M^* definida em P^* por,

$$(a, b) \in \rho_M^* \Leftrightarrow ab^{-1} \in M$$

é uma congruência de l -grupo em P^* com núcleo M . Os resultados obtidos no estudo das congruências de l -grupo em conjunto com os resultados anteriores, permitem-nos afirmar que:

Teorema 2.6.4 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e P um sobre-ideal primo de S .*

i) *Se M é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de P^* , então a relação $\rho_{P,M}$ definida em S por, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$(a, b) \in \rho_{P,M} \Leftrightarrow a, b \in P \text{ ou } a, b \in P^* \text{ e } ab^{-1} \in M$$

é uma congruência de l -grupo com zero cujo núcleo é M e tal que P é o zero e é o elemento máximo do conjunto quociente.

ii) Se ρ é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento máximo do conjunto quociente, então $\rho = (P \times P) \cup \rho^*$, onde ρ^* é uma congruência de l -grupo em P^* tendo-se

$$(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a, b \in P \text{ ou } a, b \in P^* \text{ e } ab^{-1} \in \text{Ker } \rho^*.$$

Além disso, o núcleo de ρ é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de P^* .

Demonstração

i) Facilmente se verifica que $\rho_{P,M}$ é uma congruência. Verifiquemos que $\rho_{P,M}$ é compatível com \vee .

Sejam $a, b, c \in S$ e suponhamos que $(a, b) \in \rho_{P,M}$. Analisemos as duas situações possíveis:

1) Se $a, b \in P$, então, como P é sobre-ideal, $(a \vee c), (b \vee c) \in P$ e, portanto, $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{P,M}$;

2) Se $a, b \in P^*$ e $ab^{-1} \in M$, então

2.1) Se $c \in P$, uma vez que P é sobre-ideal, temos $(a \vee c), (b \vee c) \in P$ e, portanto, $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{P,M}$;

2.2) Se $c \in P^*$, como ρ_M^* é uma congruência de l -grupo em P^* , temos $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{P,M}$.

Como P e $\rho_{P,M}$ satisfazem as condições do Teorema 2.6.1, concluímos que $\rho_{P,M}$ é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento máximo do conjunto quociente. Por outro lado, atendendo ao Teorema 2.5.7 i), temos $\text{Ker } \rho_{P,M} = \text{Ker } \rho_M^* = M$.

ii) Basta ter em conta o Teorema 2.5.7 ii). □

Assim, podemos concluir que, dado um sobre-ideal primo P de um semi-grupo \vee -semi-reticulado inverso S , existe um isomorfismo de ordem entre o reticulado das congruências de l -grupo com zero que têm P como zero e elemento máximo do conjunto quociente e o reticulado dos subsemigrupos

normais, \vee -subsemi-reticulados, convexos e unitários de P^* . Logo, uma vez que, pelo Corolário 2.5.6, sabemos que este último reticulado é distributivo, podemos concluir que:

Corolário 2.6.5 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S e P é um sobre-ideal primo de S . Então o reticulado das congruências de l -grupo com zero que têm P como zero e elemento máximo do conjunto quociente é distributivo. \square*

Dado um sobre-ideal primo P , apresentamos, agora, como consequência do Teorema 2.6.4, uma descrição da menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento máximo do conjunto quociente.

Corolário 2.6.6 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e P um sobre-ideal primo de S . Então a relação σ_P definida em S por, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$(a, b) \in \sigma_P \Leftrightarrow a, b \in P \text{ ou } \exists e \in E : ea = eb \in P^*$$

é a menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento máximo do conjunto quociente. \square

2.6.2 Congruências de l -grupo com zero em que zero é o elemento mínimo do conjunto quociente

Analisemos, agora, a situação em que o conjunto quociente é um l -grupo com zero, sendo zero o seu elemento mínimo.

Teorema 2.6.7 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, ρ uma sua \vee -congruência e P um seu ideal primo tais que, para quaisquer $e, f \in E$ e $a, b \in S$,*

- i) se $a \in P$, então $(a, b) \in \rho$ se e só se $b \in P$;*
- ii) se $e, f \in P^*$, então $(e, f) \in \rho$;*
- iii) $(a \vee b) \in P$ se e só se $a, b \in P$.*

Então ρ é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente S/ρ .

Demonstração

Tal como no Teorema 2.6.1, como P é um ideal primo e satisfaz as condições *i*) e *ii*), então S/ρ é um grupo com zero P . Por outro lado, como P satisfaz a condição *iii*), em S/ρ os elementos distintos de zero formam um \vee -subsemi-reticulado. Logo S/ρ é um l -grupo com zero P .

Provemos que P é o elemento mínimo do conjunto quociente S/ρ . Ora, já referimos que, num l -grupo com zero, ou zero é o elemento máximo ou é o elemento mínimo. Suponhamos, por absurdo, que P é o elemento máximo de S/ρ . Então

$$[g] \leq [p], \text{ para quaisquer } p \in P, g \in P^*.$$

Logo, atendendo à ordem em S/ρ , temos $[g \vee p] = [p] = 0$. Como P satisfaz *iii*) e $g \in P^*$, então $(g \vee p) \in P^*$, o que contraria $[g \vee p] = [p] = 0$. Logo P é o elemento mínimo de S/ρ . \square

O recíproco deste teorema também se verifica.

Teorema 2.6.8 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência de l -grupo com zero em que zero é o elemento mínimo do conjunto quociente. Então o conjunto $Z = \{a \in S \mid [a] = 0\}$ é um ideal primo de S . Além disso, ρ e Z satisfazem as condições *i*), *ii*) e *iii*) do teorema anterior.*

Demonstração

Sabemos, pelo Teorema 2.6.2, que Z satisfaz as condições *i*) e *ii*) do teorema anterior. Provemos que Z satisfaz a condição *iii*).

Dados $a, b \in Z$, temos $[a \vee b] = [a] \vee [b] = 0 \vee 0 = 0$. Logo $(a \vee b) \in Z$.

Sejam $a \in Z^*$ e $b \in S$. Provemos que $(a \vee b) \in Z^*$. Suponhamos, por absurdo, que $(a \vee b) \in Z$. Então $[a \vee b] = [a] \vee [b] = 0$. Logo, uma vez

que zero é o elemento mínimo de S/ρ , concluímos que $[a] = [b] = 0$, o que contraria termos $a \in Z^*$. Portanto $(a \vee b) \in Z^*$. \square

Tal como no caso das congruências de l -grupo com zero em que zero é o elemento máximo do conjunto quociente, estes resultados levam-nos à definição seguinte.

Definição 2.6.9 *Seja S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso. Um ideal P de S diz-se um **sob-ideal** se, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$(a \vee b) \in P \text{ se e só se } a, b \in P.$$

Dado um sobre-ideal primo P de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , apresentámos, no Corolário 2.6.6, a menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento máximo do conjunto quociente. No caso de P ser um sob-ideal primo de S , na descrição da menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente a situação é diferente, como nos mostra o exemplo seguinte.

Exemplo

Apresentamos um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S e um seu sob-ideal primo P tal que σ_P não é a menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente.

Sejam G um l -grupo não trivial com identidade 1 e $E = \{0, 1\}$ com a multiplicação e a ordem usuais.

Definam-se em $S = G \times E$ as operações

$$(a, e)(b, f) = (ab, ef)$$

$$(a, e) \vee (b, f) = (a \vee b, e \vee f)$$

para quaisquer $a, b \in G$ e $e, f \in E$.

Então S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e $P = \{(a, 0) \mid a \in G\}$ é um seu sob-ideal primo.

Como $(1, 1)$ é o único idempotente em P^* , então

$$((a, e), (b, f)) \in \sigma_P \Leftrightarrow (a, e), (b, f) \in P \text{ ou } (a, e) = (b, f) \in P^*.$$

Ora, é fácil verificar que σ_P não é uma \vee -congruência em S , pelo que σ_P não é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente. De facto, atendendo à ordem em S , a única congruência de l -grupo com zero nestas condições é v_P definida por

$$((a, e), (b, f)) \in v_P \Leftrightarrow (a, e), (b, f) \in P \text{ ou } (a, e), (b, f) \in P^*.$$

Vamos, agora, apresentar o resultado análogo ao Teorema 2.6.4, relativo às congruências de l -grupo com zero que têm P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente.

Começemos por observar que como P é um sob-ideal primo de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S , temos que P^* é um subsemigrupo e um \vee -subsemi-reticulado inverso de S . Portanto, se M é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de P^* , pelo Teorema 2.5.7 *i)*, a relação de equivalência ρ_M^* definida em P^* por,

$$(a, b) \in \rho_M^* \Leftrightarrow ab^{-1} \in M$$

é uma congruência de l -grupo em P^* com núcleo M .

Teorema 2.6.10 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e P um sob-ideal primo de S .*

i) Seja M um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de P^ com a propriedade: se $a \in P$ e $b \in P^*$, então $(a \vee b)b^{-1} \in M$. Então a relação $\rho_{P,M}$ definida em S por, para quaisquer $a, b \in S$,*

$$(a, b) \in \rho_{P,M} \Leftrightarrow a, b \in P \text{ ou } a, b \in P^* \text{ e } ab^{-1} \in M$$

é uma congruência de l -grupo com zero que tem núcleo M e P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente.

ii) Se ρ é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente, então $\rho = (P \times P) \cup \rho^*$, onde ρ^* é uma congruência de l -grupo em P^* , tendo-se

$$(a, b) \in \rho \Leftrightarrow a, b \in P \text{ ou } a, b \in P^* \text{ e } ab^{-1} \in \text{Ker } \rho^*.$$

Além disso, o núcleo de ρ é um subsemigrupo normal, \vee -subsemi-reticulado, convexo e unitário de P^* com a propriedade: se $a \in P$ e $b \in P^*$, então $(a \vee b)b^{-1} \in \text{Ker } \rho$.

Demonstração

i) Facilmente se verifica que $\rho_{P,M}$ é uma congruência. Verifiquemos que $\rho_{P,M}$ é compatível com \vee . Sejam $a, b, c \in S$ e suponhamos que $(a, b) \in \rho_{P,M}$. Analisemos as duas situações possíveis:

1) Se $a, b \in P^*$ e $ab^{-1} \in M$ então, como P é sob-ideal, $(a \vee c), (b \vee c) \in P^*$. Logo, uma vez que ρ_M^* é uma congruência de l -grupo em P^* e $(a, b) \in \rho_M^*$, temos $(a \vee c, b \vee (a \vee c)) \in \rho_M^*$ e $(a \vee (b \vee c), b \vee c) \in \rho_M^*$. Portanto $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{P,M}$;

2) Se $a, b \in P$, vamos discutir dois casos possíveis:

2.1) Se $c \in P$, então, como P é um sob-ideal, $(a \vee c), (b \vee c) \in P$ e, portanto, $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{P,M}$;

2.2) Se $c \in P^*$, então, uma vez que P é sob-ideal, $(a \vee c), (b \vee c) \in P^*$. Como $a, b \in P, c \in P^*$ e M goza da propriedade:

$$\text{se } a \in P \text{ e } b \in P^*, \text{ então } (a \vee b)b^{-1} \in M,$$

temos $(a \vee c)c^{-1} \in M$ e $(b \vee c)c^{-1} \in M$. Como M é inverso, $c(b \vee c)^{-1} \in M$. Mas, uma vez que M é conjugado, $c^{-1}(a \vee c)c^{-1}c, c^{-1}c(b \vee c)^{-1}c \in M$. Logo, como M é cheio, inverso e unitário $c^{-1}(a \vee c), (b \vee c)^{-1}c \in M$ e, dado que M é um subsemigrupo, $c^{-1}(a \vee c)(b \vee c)^{-1}c \in M$. Por último, como M

é conjugado, cheio, inverso e unitário temos $(a \vee c)(b \vee c)^{-1} \in M$. Portanto $(a \vee c, b \vee c) \in \rho_{P,M}$.

Como P e $\rho_{P,M}$ satisfazem as condições do Teorema 2.6.7, então $\rho_{P,M}$ é uma congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente. Além disso, atendendo ao Teorema 2.5.7 *i*), temos $\text{Ker } \rho_{P,M} = \text{Ker } \rho_M^* = M$, concluindo, assim, o pretendido.

ii) Provemos que o núcleo de ρ satisfaz a propriedade enunciada. Temos $\text{Ker } \rho = \{a \in S \mid [a] = 1\}$ onde 1 representa a identidade de S/ρ . Sejam $a \in P$ e $b \in P^*$. Como P é o zero e o mínimo de S/ρ ,

$$[(a \vee b)b^{-1}] = [a][b^{-1}] \vee [bb^{-1}] = 0 \vee 1 = 1.$$

Logo $(a \vee b)b^{-1} \in \text{Ker } \rho$, como pretendíamos. □

Como consequência do teorema anterior, concluímos que se P tiver a propriedade:

$$\text{se } a \in P \text{ e } b \in P^* \text{ então existe } e \in E \text{ tal que } e(a \vee b) = eb \in P^*,$$

então σ_P é a menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente.

Corolário 2.6.11 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e P um sob-ideal primo de S , tal que:*

$$\text{se } a \in P \text{ e } b \in P^*, \text{ então existe } e \in E \text{ tal que } e(a \vee b) = eb \in P^*.$$

Então a relação σ_P definida em S por, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(a, b) \in \sigma_P \Leftrightarrow a, b \in P \text{ ou } \exists e \in E : ea = eb \in P^*$$

é a menor congruência de l -grupo com zero que tem P como zero e elemento mínimo do conjunto quociente. □

Notemos que, de facto, o ideal P , do exemplo anterior, não satisfaz a propriedade

$$\text{se } a \in P \text{ e } b \in P^*, \text{ então existe } e \in E \text{ tal que } e(a \vee b) = eb \in P^*.$$

Seja $a \in G$. Tomemos $(a, 0) \in P$ e $(1, 1) \in P^*$. Ora, temos que $(1, 1)$ é o único idempotente em P^* . Além disso,

$$(1, 1) [(a, 0) \vee (1, 1)] = (1, 1) (a \vee 1, 1) = (a \vee 1, 1),$$

$$(1, 1) (1, 1) = (1, 1).$$

Então, para que P satisfaça a propriedade referida, necessitamos que

$$(a \vee 1, 1) = (1, 1)$$

isto é, $a \leq 1$, para qualquer $a \in G$, o que é impossível num l -grupo não trivial.

Exemplo

Consideremos o semigrupo F das funções reais de variável real munido da operação, \cdot , produto de funções. Consideremos o subsemigrupo S de F , das funções com domínio $[0, 1]$ tais que, para qualquer $f \in S$, se tem $f(x) \geq 0$, para qualquer $x \in [0, 1]$. Então S é um semigrupo com zero, cujo zero é a função z tal que $z(x) = 0$, para qualquer $x \in [0, 1]$. Além disso, S é um semigrupo inverso, tendo-se para o inverso de $g \in S$, a aplicação g^{-1} definida por, para qualquer $x \in [0, 1]$,

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{g(x)}, & g(x) \neq 0 \\ 0, & g(x) = 0 \end{cases}$$

A aplicação e definida por,

$$e(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é exemplo de um idempotente de S .

Como os idempotentes de S são centrais, o semigrupo S é de Clifford.

Defina-se, para quaisquer $f, g \in S$, o seu supremo, $f \vee g$, por, para qualquer $x \in [0, 1]$,

$$f \vee g(x) = f(x) \vee g(x).$$

Nestas condições, S é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso.

Seja $a \in [0, 1]$. Então $P_a = \{f \in S \mid f(a) = 0\}$ é um sob-ideal primo de S .

Verifiquemos que P_a satisfaz a propriedade: se $f \in P_a$ e $g \notin P_a$, então existe $e \in E$ tal que $e.(f \vee g) = e.g \notin P_a$.

Sejam $f \in P_a$ e $g \notin P_a$. Então $f(a) = 0$ e $g(a) \neq 0$. Consideremos a aplicação e_a , definida por, para qualquer $x \in [0, 1]$,

$$e_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a. \end{cases}$$

Então e_a é um idempotente de S .

Analisemos as duas situações possíveis:

- 1) se $x \neq a$, temos $(e_a.(f \vee g))(x) = 0 = e_a.g(x)$;
- 2) se $x = a$, temos

$$(e_a.(f \vee g))(a) = e_a(a)((f(a) \vee g(a)) = 1(0 \vee g(a)) = g(a) = e_a.g(a).$$

Logo P_a satisfaz a propriedade enunciada no Corolário 2.6.11 e, portanto, a relação σ_{P_a} , definida por, para quaisquer $f, g \in S$,

$$(f, g) \in \sigma_{P_a} \Leftrightarrow f, g \in P_a \text{ ou } \exists e \in E : e.f = e.g \notin P_a,$$

é a menor congruência de l -grupo com zero que tem P_a como zero e elemento mínimo do conjunto quociente.

Seja $e \in E$. Então $e(a) = 0$ ou $e(a) = 1$. Mas, como $e \notin P_a$, temos $e(a) = 1$. Logo, $(f, g) \in \sigma_{P_a} \Leftrightarrow f(a) = g(a) = 0$ ou $f(a) = g(a) \neq 0$. Assim,

$$(f, g) \in \sigma_{P_a} \Leftrightarrow f(a) = g(a).$$

Capítulo 3

Coberturas E^\vee –unitárias de semigrupos inversos

Os semigrupos inversos E –unitários foram introduzidos inicialmente, em 1965, por Saitô [Sai65] e designados por semigrupos propriamente inversos. Posteriormente, em 1974, McAlister [McA74b] define P –semigrupo e prova que todo o semigrupo inverso E –unitário é isomorfo a um P –semigrupo. São conhecidas várias outras provas directas deste resultado, nomeadamente as apresentadas por Munn [Mun76], Schein [Sch75] e ainda por Reilly e Munn [RM76], que surgem como corolário do estudo de congruências em P –semigrupos. Mostrou também [McA74a] que todo o semigrupo inverso tem uma cobertura E –unitária. Mais tarde, em 1977, este mesmo autor, em conjunto com Reilly [MR77], mostraram que os pré-homomorfismos puros nos idempotentes surgem associados às coberturas E –unitárias de um semigrupo inverso sobre um dado grupo.

É nosso objectivo, neste capítulo, obter resultados análogos aos atrás mencionados em semigrupos \vee –semi-reticulados inversos.

Na secção 3.1 obtemos uma condição necessária para a existência do supremo de dois quaisquer elementos de um P –semigrupo parcialmente ordenado.

Na secção 3.2 apresentamos uma condição necessária e suficiente, em termos de pré-homomorfismos puros nos idempotentes, para a existência de uma cobertura E^\vee -unitária de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso sobre um dado l -grupo. Posteriormente, indicamos condições para que uma cobertura E -unitária de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso sobre um dado l -grupo seja E^\vee -unitária. Construimos uma cobertura E^\vee -unitária para os semigrupos \vee -semi-reticulados inversos $L^\vee(G)$ e $C^\vee(S)$, quando S é E -unitário.

Terminamos este capítulo considerando semigrupos inversos totalmente ordenados. Neste caso, concluimos que um semigrupo inverso totalmente ordenado possui uma cobertura E^\vee -unitária totalmente ordenada se e só se é E -unitário. Como consequência deste resultado, verificamos ainda que, dados um semigrupo inverso E -unitário totalmente ordenado S e uma sua \vee -congruência α , então S/α é também um semigrupo E -unitário.

3.1 P -semigrupos

Os próximos resultados devem-se a McAlister [McA74b] e podem ser encontrados, por exemplo, nos livros [Pet84] ou [How95].

Sejam (X, \leq) um conjunto parcialmente ordenado e G um grupo. Dizemos que **G actua** (à esquerda) **sobre** X se, a cada $g \in G$, está associado um automorfismo de ordem φ_g em X , tal que se denotarmos $a\varphi_g$ por ga , para qualquer $a \in X$, temos

$$\begin{cases} a \leq b \Rightarrow ga \leq gb \\ (gh)a = g(ha), \end{cases}$$

para quaisquer $g, h \in G$ e $a, b \in X$.

Nesta situação, dados $a, b \in X$ e $g \in G$, se existe $a \wedge b$ em X , então existe $ga \wedge gb$, tendo-se $g(a \wedge b) = ga \wedge gb$.

Teorema 3.1.1 *Sejam X um conjunto parcialmente ordenado, $Y \neq \emptyset$ um ideal de ordem de X que é também um \wedge -semi-reticulado e G um grupo que*

actua (à esquerda) sobre X tais que $GY = X$ e, para qualquer $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $y \leq x$. Seja $P = \{(a, g) \in Y \times G \mid g^{-1}a \in Y\}$ com a operação binária definida por

$$(a, g)(b, h) = (a \wedge gb, gh),$$

para quaisquer $(a, g), (b, h) \in P$. Então P é um semigrupo inverso E -unitário, em que $(a, g)^{-1} = (g^{-1}a, g^{-1})$. Em P temos $((a, g)(b, h)) \in \sigma$ se e só se $g = h$. Usualmente um semigrupo P do tipo enunciado neste teorema é designado por P -**semigrupo** e representado por $P(G, X, Y)$. Além disso, designando por $[a, g]$ a σ -classe de um elemento (a, g) de P , as aplicações $\psi: P/\sigma \rightarrow G$, $[a, g] \mapsto g$, e $\phi: E(P) \rightarrow Y$, $(a, 1) \mapsto a$, são isomorfismos.

Reciprocamente temos o seguinte:

Teorema 3.1.2 *Todo o semigrupo inverso E -unitário é isomorfo a um P -semigrupo.*

Seja P um P -semigrupo parcialmente ordenado. Então, pela Proposição 2.1.4, o conjunto quociente P/σ é um grupo parcialmente ordenado. Suponhamos que P é um \vee -semi-reticulado. Como a congruência σ é compatível com \vee (Corolário 2.1.3), temos que o conjunto quociente P/σ é também um \vee -semi-reticulado. Portanto, P/σ é um l -grupo, por ser um grupo parcialmente ordenado e um \vee -semi-reticulado. Mas, uma vez que P é um \vee -semi-reticulado, para quaisquer $(a, g), (b, h) \in P$ existe $(c, i) \in P$ tal que

$$(a, g) \vee (b, h) = (c, i).$$

Logo $[a, g] \vee [b, h] = [(a, g) \vee (b, h)] = [c, i]$, e como ψ é um isomorfismo entre os dois l -grupos, obtemos

$$g \vee h = ([a, g] \vee [b, h]) \psi = [c, i] \psi = i.$$

Concluimos que, dados (a, g) e (b, h) em P , se existe $(a, g) \vee (b, h) \in P$, então

$$(a, g) \vee (b, h) = (c, g \vee h),$$

onde $c \in Y$ tal que $(g \vee h)^{-1}c \in Y$.

Notemos que, dados (a, g) e (b, h) em P , a condição de existir $c \in Y$ tal que $(g \vee h)^{-1}c \in Y$, é uma condição necessária, mas não suficiente para que $(a, g) \vee (b, h) = (c, g \vee h)$.

Com efeito, suponhamos que existe $c \in Y$ tal que $(g \vee h)^{-1}c \in Y$. Seja $d \in Y$ tal que $d \not\leq c$. Então

$$(g \vee h)^{-1}d \not\leq (g \vee h)^{-1}c \in Y.$$

Mas, uma vez que Y é um ideal de ordem, também $(g \vee h)^{-1}d \in Y$. Logo $(d, g \vee h) \in P$ embora $(d, g \vee h) \neq (c, g \vee h)$.

3.2 Coberturas E^\vee -unitárias

Nesta secção, vamos apresentar condições para que um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso possua uma cobertura E^\vee -unitária.

Começamos por apresentar alguns resultados relativos a coberturas E -unitárias os quais podem ser encontrados, por exemplo, em [McA80].

Definição 3.2.1 *Seja S um semigrupo inverso (e seja G um grupo). Dizemos que S tem uma **cobertura E -unitária (sobre G)** se existem um semigrupo inverso E -unitário P (tal que P/σ é isomorfo a G) e um homomorfismo sobrejectivo que separa idempotentes η de P em S . Nestas condições, dizemos que o semigrupo P é uma cobertura E -unitária de S (sobre G).*

Teorema 3.2.2 *Todo o semigrupo inverso tem uma cobertura E -unitária.*

Exemplo

Vejam como obter uma cobertura E -unitária para o semigrupo inverso $K(G)$, definido na secção 1.4, em que G é um grupo.

Representemos por L_G o conjunto dos subgrupos de G com a ordem inclusão. Como o grupo G actua em L_G por conjugação então, atendendo ao Teorema 3.1.1, concluimos que $P = P(G, L_G, L_G)$ é um semigrupo inverso E -unitário tal que P/σ é isomorfo a G . Por outro lado, a aplicação η definida de P em $K(G)$ por $(H, a)\eta = Ha$, para qualquer $(H, a) \in P$, é um homomorfismo sobrejectivo que separa idempotentes. Logo P é uma cobertura E -unitária de $K(G)$ sobre G .

Vamos, agora, verificar que os pré-homomorfismos puros nos idempotentes surgem naturalmente quando procuramos coberturas E -unitárias de um semigrupo inverso (sobre um dado grupo) [MR77].

Dados semigrupos inversos S e T , dizemos que uma aplicação θ de S em T é um *pré-homomorfismo* se, para quaisquer $a, b \in S$,

$$(ab)\theta \leq a\theta b\theta,$$

onde \leq representa a ordem natural em T . Dizemos que θ é *puro nos idempotentes* se, para quaisquer $e \in E(S)$ e $s \in S$,

$$s\theta = e\theta \Rightarrow s \in E(S).$$

Seja S um semigrupo inverso. Suponhamos que S tem uma cobertura E -unitária P sobre um dado grupo G . Designemos por η o homomorfismo que separa idempotentes de P sobre S e por σ^\natural a aplicação canónica de P em G . Então a aplicação ϕ , definida de S em $K(G)$, por

$$s\phi = s\eta^{-1}\sigma^\natural,$$

para qualquer $s \in S$, é um pré-homomorfismo puro nos idempotentes, tal que $G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}$.

Nestas condições temos:

Teorema 3.2.3 *Sejam S um semigrupo inverso e G um grupo. Se S tem uma cobertura E -unitária T sobre G , então existe um pré-homomorfismo ϕ puro nos idempotentes, de S em $K(G)$ tal que $G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}$ e, para quaisquer $e \in E(S)$ e $s \in S$,*

- i) $e\phi$ é um subgrupo de G ;*
- ii) $s\phi$ é uma classe lateral de $(ss^{-1})\phi$.*

Além disso, $P_\phi = \{(s, g) \in S \times G \mid g \in s\phi\}$ é isomorfo a T , onde o isomorfismo é dado por $t\psi = (t\eta, t\sigma^\natural)$, para qualquer $t \in T$.

Reciprocamente temos:

Teorema 3.2.4 *Sejam S um semigrupo inverso, G um grupo e ϕ um pré-homomorfismo puro nos idempotentes, de S em $K(G)$ que verifica a condição $G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}$. Seja $P_\phi = \{(s, g) \in S \times G \mid g \in s\phi\}$. Então*

- i) P_ϕ é um semigrupo inverso E -unitário;*
- ii) a aplicação η definida por $(s, g)\eta = s$, para quaisquer $s \in S$ e $g \in G$, é um homomorfismo de P_ϕ sobre S que separa idempotentes;*
- iii) P_ϕ/σ é isomorfo a G ;*
- iv) P_ϕ é uma cobertura E -unitária de S sobre G .*

Notemos que este último resultado nos diz que P_ϕ é uma cobertura E -unitária de S sobre G , mas não nos dá a sua estrutura como um P -semigrupo. Para a sua construção são necessárias quatro componentes. Duas delas são óbvias: o grupo G e o semi-reticulado E . A terceira componente X e a acção de G sobre X podem ser obtidas do seguinte modo [McA80].

Defina-se, em $G \times E(S)$, uma relação \preceq por

$$(g, e) \preceq (h, f) \Leftrightarrow \exists s \in S : ss^{-1} = e, ss^{-1} \leq f, g^{-1}h \in s\phi.$$

Então \preceq é uma quase ordem em $G \times E(S)$. Denotemos por α a relação de equivalência associada a \preceq e seja $X = (G \times E(S)) / \alpha$. Em X definimos uma relação de ordem parcial \leq por

$$[g, e] \leq [h, f] \Leftrightarrow (g, e) \preceq (h, f),$$

onde $[g, e]$ representa a α -classe de $(g, e) \in G \times E(S)$.

Além disso, o conjunto $E = \{[1, e] \mid e \in E(S)\}$ é um ideal de ordem e um \wedge -semi-reticulado de X isomorfo a $E(S)$ e o grupo G actua sobre X do seguinte modo:

$$g \cdot [h, f] = [gh, f],$$

para quaisquer $[h, f] \in X$ e $g \in G$.

Nas condições que acabamos de descrever temos:

Proposição 3.2.5 *Sejam S um semigrupo inverso, G um grupo e ϕ um pré-homomorfismo puro nos idempotentes de S em $K(G)$ tal que*

$$G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}.$$

Então $P(G, X, E)$ é um P -semigrupo isomorfo a P_ϕ e a aplicação θ definida por, para qualquer $([1, e], g) \in P(G, X, E)$,

$$([1, e], g)\theta = s \text{ se } \begin{cases} ss^{-1} = e \\ g \in s\phi \end{cases}$$

é um homomorfismo que separa idempotentes de $P(G, X, E)$ sobre S , pelo que $P(G, X, E)$ é uma cobertura E -unitária de S sobre G .

Os resultados anteriores em semigrupos inversos não ordenados, levaram-nos a procurar resultados análogos para semigrupos \vee -semi-reticulados inversos.

Definição 3.2.6 *Seja S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso (e seja G um l -grupo). Dizemos que S tem **cobertura E^\vee -unitária (sobre G)** se existem um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso E -unitário T (tal que T/σ é isomorfo a G) e um \vee -homomorfismo η que separa idempotentes de T sobre S . Neste caso, dizemos que o semigrupo T é uma cobertura E^\vee -unitária de S (sobre G).*

Começamos por mostrar que um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S tem uma cobertura E^V -unitária sobre um dado l -grupo G se e só se existe um pré-homomorfismo ϕ puro nos idempotentes, de S em $K(G)$, tal que, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$,

$$s_1\phi \vee s_2\phi \subseteq (s_1 \vee s_2)\phi,$$

onde $A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A, b \in B\}$.

Teorema 3.2.7 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e G um l -grupo. Se S tem uma cobertura E^V -unitária T sobre G , então existe um pré-homomorfismo ϕ puro nos idempotentes, de S em $K(G)$, que verifica a condição $G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}$ e, para quaisquer $e \in E(S)$ e $s_1, s_2 \in S$,*

i) $e\phi$ é um l -subgrupo de G ;

ii) $s_1\phi \vee s_2\phi \subseteq (s_1 \vee s_2)\phi$.

Além disso, T é isomorfo a $P_\phi = \{(s, g) \in S \times G \mid g \in s\phi\}$ com a ordem parcial dada por, para quaisquer $(s_1, g_1), (s_2, g_2) \in P_\phi$,

$$(s_1, g_1) \leq (s_2, g_2) \Leftrightarrow \begin{cases} s_1 \leq s_2 \\ g_1 \leq g_2. \end{cases}$$

Em particular,

$$(s_1, g_1) \vee (s_2, g_2) = (s_1 \vee s_2, g_1 \vee g_2).$$

Demonstração

Atendendo ao Teorema 3.2.3, existe um pré-homomorfismo puro nos idempotentes ϕ , de S em $K(G)$, definido por $s\phi = s\eta^{-1}\sigma^{\natural}$, para qualquer $s \in S$, onde η é um homomorfismo que separa idempotentes de T sobre S e σ^{\natural} é a aplicação canónica de T em G . Além disso, como T é uma cobertura E^V -unitária de S sobre G , então η e σ^{\natural} são \vee -homomorfismos.

i) Seja $e \in E(S)$ e tomemos $g, h \in e\phi$. Então existem $t_1, t_2 \in T$ tais que

$$\begin{cases} t_1\eta = e \\ t_2\eta = e \end{cases} \text{ e } \begin{cases} t_1\sigma^{\natural} = g \\ t_2\sigma^{\natural} = h. \end{cases}$$

Assim, se $t = t_1 \vee t_2$,

$$\begin{cases} t\eta = e \\ t\sigma^{\natural} = g \vee h \end{cases}$$

e, por conseguinte, $g \vee h \in e\phi$. Portanto, $e\phi$ é um \vee -subsemi-reticulado de G . Como $e\phi$ é um subgrupo de G , então, atendendo à Proposição 1.3.5, $e\phi$ é um l -subgrupo de G .

ii) Sejam $s_1, s_2 \in S$ e tomemos $g_1 \in s_1\phi$ e $g_2 \in s_2\phi$. Então existem $t_1, t_2 \in T$ tais que

$$\begin{cases} t_1\eta = s_1 \\ t_2\eta = s_2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} t_1\sigma^{\natural} = g_1 \\ t_2\sigma^{\natural} = g_2. \end{cases}$$

Seja $t = t_1 \vee t_2$. Então

$$\begin{cases} t\eta = s_1 \vee s_2 \\ t\sigma^{\natural} = g_1 \vee g_2 \end{cases}$$

pelo que $g_1 \vee g_2 \in (s_1 \vee s_2)\phi$. Portanto $s_1\phi \vee s_2\phi \subseteq (s_1 \vee s_2)\phi$.

Falta verificar que o semigrupo P_ϕ é um semigrupo \vee -semi-reticulado isomorfo a T .

Tomemos $(s_1, g_1), (s_2, g_2) \in P_\phi$. Então $g_1 \in s_1\phi, g_2 \in s_2\phi$ e, uma vez que $s_1\phi \vee s_2\phi \subseteq (s_1 \vee s_2)\phi$, concluímos que

$$g_1 \vee g_2 \in (s_1 \vee s_2)\phi.$$

Logo $(s_1, g_1) \vee (s_2, g_2) = (s_1 \vee s_2, g_1 \vee g_2) \in P_\phi$, pelo que P_ϕ é um \vee -subsemi-reticulado de $S \times G$.

Sejam $(s_1, g_1), (s_2, g_2), (s_3, g_3) \in P_\phi$. Então

$$\begin{aligned} (s_1, g_1) ((s_2, g_2) \vee (s_3, g_3)) &= (s_1, g_1)(s_2 \vee s_3, g_2 \vee g_3) = \\ (s_1(s_2 \vee s_3), g_1(g_2 \vee g_3)) &= (s_1s_2 \vee s_1s_3, g_1g_2 \vee g_1g_3) = \\ (s_1s_2, g_1g_2) \vee (s_1s_3, g_1g_3) &= (s_1, g_1)(s_2, g_2) \vee (s_1, g_1)(s_3, g_3). \end{aligned}$$

Portanto, em P_ϕ , a multiplicação é distributiva, à esquerda, em relação à operação \vee . Quanto à distributividade à direita, a situação é análoga, pelo que P_ϕ é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

Por último, verifiquemos que T e P_ϕ são isomorfos. Pelo Teorema 3.2.3, sabemos que a aplicação ψ de T em P_ϕ , definida por

$$t\psi = (t\eta, t\sigma^{\natural}),$$

para qualquer $t \in T$, é um isomorfismo entre os dois semigrupos. Ora, como η e σ^{\natural} são \vee -homomorfismos, facilmente se verifica que ψ é também um \vee -homomorfismo. \square

Quanto ao resultado recíproco temos:

Teorema 3.2.8 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, G um l -grupo e ϕ um pré-homomorfismo puro nos idempotentes, de S em $K(G)$ tal que $G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}$ e $s_1\phi \vee s_2\phi \subseteq (s_1 \vee s_2)\phi$, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$. Seja $P_\phi = \{(s, g) \in S \times G \mid g \in s\phi\}$. Então P_ϕ é uma cobertura E^\vee -unitária de S sobre G .*

Demonstração

Atendendo ao Teorema 3.2.4, o semigrupo P_ϕ é uma cobertura E -unitária de S sobre G , tomando o homomorfismo η que separa idempotentes de P_ϕ sobre S dado por $(s, g)\eta = s$, para quaisquer $s \in S$ e $g \in G$. Por outro lado, como $s_1\phi \vee s_2\phi \subseteq (s_1 \vee s_2)\phi$, tendo em conta o Teorema 3.2.7 sabemos que P_ϕ é um semigrupo \vee -semi-reticulado. Resta-nos mostrar que η é um \vee -homomorfismo.

Sejam $(s_1, g_1), (s_2, g_2) \in P_\phi$. Então

$$((s_1, g_1) \vee (s_2, g_2))\eta = (s_1 \vee s_2, g_1 \vee g_2)\eta = s_1 \vee s_2 = (s_1, g_1)\eta \vee (s_2, g_2)\eta.$$

Concluimos, assim, que P_ϕ é uma cobertura E^\vee -unitária de S sobre G . \square

Sejam S um semigrupo inverso e G um grupo nas condições da Proposição 3.2.5. Como vimos, o P -semigrupo $P(G, X, E)$, isomorfo a P_ϕ , é uma cobertura E -unitária de S sobre G . Suponhamos, agora, que S é um semigrupo

\vee -semi-reticulado inverso, G é um l -grupo e $P(G, X, E)$ é uma cobertura E^\vee -unitária de S sobre G .

Para simplificar a escrita, representemos um elemento arbitrário $([1, e], g)$ de $P(G, X, E)$ por (e, g) .

Tomemos $(e_1, g_1), (e_2, g_2) \in P(G, X, E)$. Então existe $(u, g_1 \vee g_2) \in P(G, X, E)$ tal que

$$(e_1, g_1) \vee (e_2, g_2) = (u, g_1 \vee g_2).$$

Seja θ o homomorfismo que separa idempotentes de $P(G, X, E)$ sobre S , definido por, para qualquer $(e, g) \in P(G, X, E)$,

$$(e, g) \theta = s \text{ se } \begin{cases} ss^{-1} = e \\ g \in s\phi. \end{cases}$$

Então existem $s_1, s_2 \in S$ tais que $(e_1, g_1) \theta = s_1$ e $(e_2, g_2) \theta = s_2$, donde, tendo em conta a definição de θ , temos $s_i s_i^{-1} = e_i$ e $g_i \in s_i \phi$ (com $i = 1, 2$). Mas, como θ é um \vee -homomorfismo, $(u, g_1 \vee g_2) \theta = s_1 \vee s_2$, pelo que

$$\begin{cases} (s_1 \vee s_2)(s_1 \vee s_2)^{-1} = u \\ g_1 \vee g_2 \in (s_1 \vee s_2)\phi. \end{cases}$$

Por outro lado, uma vez que $g_i \in s_i \phi$ (com $i = 1, 2$) e $s_1 \phi \vee s_2 \phi \subseteq (s_1 \vee s_2) \phi$, temos $g_1 \vee g_2 \in (s_1 \vee s_2) \phi$.

Acabámos pois de provar o seguinte:

Proposição 3.2.9 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, G um l -grupo e ϕ um pré-homomorfismo puro nos idempotentes de S em $K(G)$, tal que $G = \cup \{s\phi \mid s \in S\}$ e $s_1 \phi \vee s_2 \phi \subseteq (s_1 \vee s_2) \phi$, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$. Se $P(G, X, E)$ é uma cobertura E^\vee -unitária de S sobre G , então, dados $(e_1, g_1), (e_2, g_2) \in P(G, X, E)$, temos*

$$(e_1, g_1) \vee (e_2, g_2) = (u, g_1 \vee g_2),$$

onde $u = (s_1 \vee s_2)(s_1 \vee s_2)^{-1}$, com $s_1, s_2 \in S$ tais que

$$\begin{cases} s_i s_i^{-1} = e_i \\ g_i \in s_i \phi \quad (i = 1, 2). \end{cases}$$

Exemplos

1. Utilizemos o Teorema 3.2.8 para encontrar uma cobertura E^\vee -unitária para o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso $L^\vee(G)$ definido na secção 1.4.

Seja G um l -grupo. Recordemos que em $L^\vee(G)$ definimos, para quaisquer $Ha, Kb \in L^\vee(G)$,

$$\begin{cases} Ha \cdot Kb = HKab \\ Ha \vee Kb = HK \langle ab^{-1} \rangle b, \end{cases}$$

onde $\langle ab^{-1} \rangle$ representa o l -ideal de G gerado por ab^{-1} .

Seja ϕ a aplicação de $L^\vee(G)$ em $K(G)$, definida por

$$(Ha)\phi = Ha,$$

para qualquer $Ha \in L^\vee(G)$. É fácil verificar que ϕ é um pré-homomorfismo puro nos idempotentes tal que $G = \cup \{(Ha)\phi \mid Ha \in L^\vee(G)\}$.

Verifiquemos que ϕ satisfaz a condição

$$(Ha)\phi \vee (Kb)\phi \subseteq (Ha \vee Kb)\phi,$$

para quaisquer $Ha, Kb \in L^\vee(G)$.

Sejam $(H, a), (K, b) \in L^\vee(G)$. Então

$$\begin{cases} (Ha)\phi \vee (Kb)\phi = Ha \vee Kb \\ (Ha \vee Kb)\phi = (HK \langle ab^{-1} \rangle b)\phi = HK \langle ab^{-1} \rangle b. \end{cases}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{cases} Ha \subseteq HK \langle ab^{-1} \rangle b \\ Kb \subseteq HK \langle ab^{-1} \rangle a \end{cases}$$

e $HK \langle ab^{-1} \rangle b = HK \langle ab^{-1} \rangle a$. Assim, como $HK \langle ab^{-1} \rangle b \in K(G)$ e é um majorante de Ha e de Kb , concluímos que $Ha \vee Kb \subseteq HK \langle ab^{-1} \rangle b$.

Logo, tendo em conta o Teorema 3.2.8, o semigrupo

$$P_\phi = \{(Ha, g) \in L^\vee(G) \times G \mid g \in (Ha)\phi\}$$

é uma cobertura E^\vee -unitária para o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso $L^\vee(G)$. Mas, a condição $g \in (Ha)\phi$ é equivalente à condição $Ha = Hg$. Portanto,

$$P_\phi = \{(Hg, g) \in L^\vee(G) \times G\}.$$

Assim, o semigrupo P_ϕ é isomorfo ao P -semigrupo $P = P(G, I_G, I_G)$, onde I_G denota o conjunto dos l -ideais de G com a ordem inclusão, sendo a acção definida por conjugação.

Como o semigrupo P é uma cobertura E^\vee -unitária do semigrupo $L^\vee(G)$, então, atendendo à Proposição 3.2.9, temos, dados $(H, a), (K, b) \in P$,

$$(H, a) \vee (K, b) = (L, a \vee b)$$

onde $L = (s_1 \vee s_2)(s_1 \vee s_2)^{-1}$, com $s_1, s_2 \in L^\vee(G)$ tais que

$$\begin{cases} s_1 s_1^{-1} = H \\ a \in s_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} s_2 s_2^{-1} = K \\ b \in s_2. \end{cases}$$

Como $s_1 s_1^{-1} = H$ e $s_2 s_2^{-1} = K$, então $s_1 = Hx_1$ e $s_2 = Kx_2$, com $x_1, x_2 \in G$. Por outro lado, uma vez que $a \in s_1 = Hx_1$, temos $s_1 = Hx_1 = Ha$. De igual modo, como $b \in s_2 = Kx_2$, obtemos $s_2 = Kx_2 = Kb$.

Assim, temos $L = (Ha \vee Kb)(Ha \vee Kb)^{-1} = HK \langle ab^{-1} \rangle$.

2. Aplicando o critério que nos é fornecido pelo Teorema 3.2.8 vamos construir uma cobertura E^\vee -unitária para o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso $C^\vee(S)$ definido na secção 1.4, quando S é um semigrupo inverso E -unitário.

Para tal, convém ter presente que, num semigrupo inverso E -unitário, a menor congruência de grupo, σ , é pura nos idempotentes, isto é, o seu núcleo,

$\text{Ker } \sigma$, é o conjunto dos idempotentes de S (veja-se [How95], Proposição 5.9.1).

Seja S um semigrupo inverso E -unitário e $G = S/\sigma$. Como todo o grupo é imagem homomorfa de um grupo livre, podemos considerar o grupo livre $H = FG(G)$ e o homomorfismo sobrejectivo θ de H em G . Por outro lado, uma vez que todo o grupo livre pode ser totalmente ordenado (veja-se [McA98], Teorema 1.2.12), então o grupo H admite uma ordem total \leq .

Defina-se a aplicação ϕ de $C^\vee(S)$ em $K(H)$ por, para qualquer $I \in C^\vee(S)$,

$$I\phi = \begin{cases} \{h \in H \mid h\theta = [i], \text{ com } i \in I\} & \text{se } I \neq \emptyset \\ H & \text{se } I = \emptyset \end{cases}$$

onde $[i]$ representa a σ -classe de $i \in I$.

Provemos que, nestas condições, ϕ é um pré-homomorfismo puro nos idempotentes tal que $H = \cup \{A\phi \mid A \in C^\vee(S)\}$ e $A\phi \vee B\phi \subseteq (A \vee B)\phi$, para quaisquer $A, B \in C^\vee(S)$.

a) ϕ está bem definida

Recordemos que um subconjunto não vazio de um grupo H é uma classe lateral de H se e só se $A = AA^{-1}A$ (veja-se [Law98], Proposição 1.4.26).

Seja $I \in C^\vee(S)$. Se $I = \emptyset$ temos $I\phi = H \in K(H)$.

Se $I \neq \emptyset$ então $I\phi = \{h \in H \mid h\theta = [i], \text{ com } i \in I\}$. Verifiquemos que $I\phi$ é uma classe lateral do grupo H .

Representemos $I\phi$ por A . É claro que $A \subseteq AA^{-1}A$.

Seja $x \in AA^{-1}A$. Então existem $b, c, d \in A$ tais que $x = bc^{-1}d$. Por consequência, existem $i, j, k \in I$ com $b\theta = [i]$, $c\theta = [j]$ e $d\theta = [k]$. Mas, uma vez que I é compatível, pela Proposição 1.4.5 temos $[i] = [j] = [k]$. Portanto, como θ é homomorfismo, obtemos $x\theta = [i][i]^{-1}[i] = [i]$. Logo $x \in I\phi = A$.

b) ϕ é um pré-homomorfismo

Sejam $A, B \in C^\vee(S)$ e verifiquemos que $A\phi B\phi \subseteq (AB)\phi$.

Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ então $AB = \emptyset$ e, portanto, $A\phi B\phi = H = (AB)\phi$.

Suponhamos que $A, B \neq \emptyset$. Então $AB \neq \emptyset$. Tomemos $x \in A\phi$ e $y \in B\phi$.

Então existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x\theta = [a]$ e $y\theta = [b]$. Como θ é homomorfismo temos $(xy)\theta = [ab]$, pelo que $xy \in (AB)\phi$.

c) ϕ é puro nos idempotentes

Sejam $A \in E(C^\vee(S))$ e $B \in C^\vee(S)$ tais que $A\phi = B\phi$. Como \emptyset é um idempotente, podemos considerar $B \neq \emptyset$. Analisemos, então, as duas situações possíveis :

1) Se $A = \emptyset$ temos $H = B\phi$ e, uma vez que $1_H \in H$, existe $b_1 \in B$ tal que $1_H\theta = [b_1]$. Seja $b \in B$. Pela Proposição 1.4.5 temos $[b_1] = [b]$ e, como θ é um homomorfismo, obtemos $1_H\theta = 1_G = [b]$. Mas, uma vez que $G = S/\sigma$ e $\text{Ker } \sigma = E(S)$, concluímos que $b \in E(S)$. Logo $B \subseteq E(S)$ e, portanto, B é um idempotente de $C^\vee(S)$;

2) Se $A \neq \emptyset$ então existem $a \in A \subseteq E(S)$ e $b_1 \in B$ tais que $[a] = [b_1]$. Seja $b \in B$. Tendo em conta a Proposição 1.4.5, temos $[b_1] = [b]$. Assim, uma vez que $a \in E(S)$ e $[a] = [b]$, concluímos que $b \in E(S)$. Portanto B é um idempotente de $C^\vee(S)$.

Concluimos pois que ϕ é puro nos idempotentes.

d) $H = \cup \{A\phi \mid A \in C^\vee(S)\}$

Seja $x \in \cup \{A\phi \mid A \in C^\vee(S)\}$. Então, para algum $A \in C^\vee(S)$, temos $x \in A\phi \subseteq H$. Logo $x \in H$.

Tomemos $h \in H$. Então existem $g \in G$ e $s \in S$ tais que $h\theta = g = [s]$. Seja $S' = \{t \in S \mid t \leq s\}$. Como S' é um ideal de ordem de S que contém s e é um subconjunto de S compatível (veja-se [Law98], Lema 1.4.14), podemos concluir que $S' \in C^\vee(S)$. Assim, temos $h\theta = [s]$, com $s \in S' \in C^\vee(S)$, pelo que $h \in S'\phi$. Logo $h \in \cup \{A\phi \mid A \in C^\vee(S)\}$.

e) $A\phi \vee B\phi \subseteq (A \vee B)\phi$, para quaisquer $A, B \in C^\vee(S)$

Sejam $A, B \in C^\vee(S)$. Temos $A \vee B = A \cap B$. Analisemos as duas situações possíveis:

1) Se $A \cap B = \emptyset$ é claro que $A\phi \vee B\phi \subseteq (A \cap B)\phi = H$;

2) Se $A \cap B \neq \emptyset$, então, dados $x \in A\phi$ e $y \in B\phi$, existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $x\theta = [a]$ e $y\theta = [b]$. Como $A \cap B$ é não vazio e compatível, pela

Proposição 1.4.5 temos $x\theta = [c] = y\theta$, com $c \in A \cap B$. Logo $x, y \in (A \cap B)\phi$. Por último, uma vez que H é totalmente ordenado, ou $x \vee y = x$ ou $x \vee y = y$, pelo que $x \vee y \in (A \cap B)\phi$.

Assim, pelo Teorema 3.2.8, podemos concluir que

$$P_\phi = \{(A, h) \in C^\vee(S) \times H \mid h \in A\phi\}$$

é uma cobertura E^\vee -unitária do semigrupo $C^\vee(S)$, quando S é um semigrupo inverso E -unitário.

3. Seja S um semigrupo inverso E -unitário. Então S^0 com a ordem inversa da natural é um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, tendo-se, para quaisquer $s, t \in S^0$,

$$s \vee t = \begin{cases} ss^{-1}t & \text{se } s, t \in S \text{ e } (s, t) \in \sigma \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Utilizando argumentos análogos aos do exemplo anterior é possível verificar que a aplicação ϕ de S^0 em $K(H)$ definida por, para qualquer $s \in S^0$,

$$s\phi = \begin{cases} \{h \in H \mid h\theta = [s]\} & \text{se } s \neq 0 \\ H & \text{se } s = 0 \end{cases}$$

é um pré-homomorfismo puro nos idempotentes tal que $H = \cup \{s\phi \mid s \in S^0\}$ e $s\phi \vee t\phi \subseteq (s \vee t)\phi$, para quaisquer $s, t \in S^0$. Nestas condições, pelo Teorema 3.2.8, concluímos que

$$Q_\phi = \{(s, h) \in S^0 \times H \mid h \in s\phi\}$$

é uma cobertura E^\vee -unitária do semigrupo S^0 , quando S é um semigrupo inverso E -unitário.

O próximo resultado dá-nos uma condição necessária e suficiente para que uma cobertura E -unitária de um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso sobre um dado l -grupo seja E^\vee -unitária.

Teorema 3.2.10 *Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso, G um l -grupo e $T = P(G, X, Y)$ uma cobertura E -unitária de S . Designemos por η um homomorfismo que separa idempotentes de T sobre S . Então existe uma ordem sob a qual T é um semigrupo \vee -semi-reticulado e η é um \vee -homomorfismo se e só se dados $t_1 = (e_1, g_1)$, $t_2 = (e_2, g_2) \in T$ existe $t_3 = (e_3, g_3) \in T$ tal que*

$$\begin{cases} t_3\eta = t_1\eta \vee t_2\eta \\ t_3\sigma^\natural = t_1\sigma^\natural \vee t_2\sigma^\natural. \end{cases}$$

Neste caso, T é uma cobertura E^\vee -unitária de S (sobre G).

Demonstração

Suponhamos que existe uma ordem sob a qual T é um semigrupo \vee -semi-reticulado e que η é um \vee -homomorfismo. Neste caso, T é uma cobertura E^\vee -unitária de S . Então, dados $t_1 = (e_1, g_1)$, $t_2 = (e_2, g_2) \in T$, existe $t_3 = t_1 \vee t_2 \in T$ tal que

$$\begin{cases} t_3\sigma^\natural = t_1\sigma^\natural \vee t_2\sigma^\natural \\ t_3\eta = t_1\eta \vee t_2\eta. \end{cases}$$

Além disso, se $t_3 = (e_3, g_3)$, temos

$$(e_3, 1)\eta = (t_3 t_3^{-1})\eta = t_3\eta(t_3\eta)^{-1} = (t_1\eta \vee t_2\eta)(t_1\eta \vee t_2\eta)^{-1}$$

e, uma vez que $E(S)$ é isomorfo a Y ,

$$e_3 = (t_1\eta \vee t_2\eta)(t_1\eta \vee t_2\eta)^{-1}.$$

Para a demonstração da condição recíproca, suponhamos que, dados $t_1 = (e_1, g_1)$, $t_2 = (e_2, g_2) \in T$ existem $t_3 = (e_3, g_3)$, $t_4 = (e_4, g_4) \in T$ tais que

$$\begin{cases} t_3\eta = t_1\eta \vee t_2\eta = t_4\eta \\ t_3\sigma^\natural = t_1\sigma^\natural \vee t_2\sigma^\natural = t_4\sigma^\natural. \end{cases}$$

Então

$$\begin{cases} t_3\eta(t_3\eta)^{-1} = (t_3t_3^{-1})\eta = (e_3, 1)\eta \\ t_4\eta(t_4\eta)^{-1} = (t_4t_4^{-1})\eta = (e_4, 1)\eta, \end{cases}$$

pelo que, uma vez que η separa idempotentes, $e_3 = e_4$. Por outro lado, como G é isomorfo a T/σ , temos $g_3 = g_4$. Logo $t_3 = t_4$. Portanto t_3 , se existir, é único.

Assim, dados $t_1 = (e_1, g_1)$, $t_2 = (e_2, g_2) \in T$, defina-se $t_1 \vee t_2 = t_3$, onde t_3 é o único elemento em T que verifica as condições:

$$\begin{cases} t_3\eta = t_1\eta \vee t_2\eta \\ t_3\sigma^{\natural} = t_1\sigma^{\natural} \vee t_2\sigma^{\natural}. \end{cases}$$

Provemos que, com esta operação binária \vee , o semigrupo T é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

É fácil provar que a operação \vee goza das propriedades comutativa, associativa e de idempotência, pelo que T é um \vee -semi-reticulado. Além disso, é claro que η e σ^{\natural} são homomorfismos de \vee -semi-reticulados.

Vamos verificar a propriedade distributiva, à esquerda, da multiplicação em relação à operação \vee .

Sejam t_1, t_2 e $t_3 \in T$. Uma vez que η é um homomorfismo de semigrupos e de \vee -semi-reticulados de T sobre S e S é um semigrupo \vee -semi-reticulado,

$$\begin{aligned} (t_3(t_1 \vee t_2))\eta &= t_3\eta(t_1\eta \vee t_2\eta) = t_3\eta t_1\eta \vee t_3\eta t_2\eta \\ &= (t_3t_1)\eta \vee (t_3t_2)\eta = (t_3t_1 \vee t_3t_2)\eta. \end{aligned}$$

Por outro lado, como σ^{\flat} é um homomorfismo de semigrupos e de \vee -semi-reticulados de T sobre G e G é um l -grupo,

$$(t_3(t_1 \vee t_2))\sigma^{\flat} = (t_3t_1 \vee t_3t_2)\sigma^{\flat}.$$

Concluimos, assim, que $t_3(t_1 \vee t_2) = t_3t_1 \vee t_3t_2$ devido à sua unicidade. Para a propriedade distributiva da multiplicação à direita a situação é semelhante. Logo T é um semigrupo \vee -semi-reticulado.

Portanto, T é uma cobertura E^\vee -unitária de S . \square

O próximo resultado envolve semigrupos totalmente ordenados. Neste caso, provaremos que os únicos semigrupos inversos totalmente ordenados que têm uma cobertura E^\vee -unitária totalmente ordenada são aqueles que já por si são E -unitários.

Teorema 3.2.11 *Seja S um semigrupo inverso totalmente ordenado. Então S tem uma cobertura E^\vee -unitária totalmente ordenada se e só se é E -unitário.*

Demonstração

Suponhamos que S tem uma cobertura E^\vee -unitária totalmente ordenada T . Seja η um \vee -homomorfismo que separa idempotentes de T sobre S e $G = T/\sigma$. Seja ϕ o pré-homomorfismo puro nos idempotentes de S em $K(G)$, definido por $s\phi = s\eta^{-1}\sigma^\natural$, para qualquer $s \in S$ (ver Teorema 3.2.7).

Começemos por provar que, de facto, ϕ é um homomorfismo. Sejam $e, f \in E(S)$. Tomemos $g_1 \in e\phi$ e $g_2 \in f\phi$. Então existem $t_1, t_2 \in T$ tais que

$$\begin{cases} t_1\eta = e \\ t_2\eta = f \end{cases} \text{ e } \begin{cases} t_1\sigma^\natural = g_1 \\ t_2\sigma^\natural = g_2. \end{cases}$$

Suponhamos que $e < f$. Como η é isótono e T é totalmente ordenado, obtemos $t_1 < t_2$ e, portanto, $g_1 \leq g_2$. Mas, pelo Teorema 3.2.3, o conjunto $e\phi$ é um subgrupo de G , pelo que $1 \in e\phi$. Logo, $1 \leq g_2$, para qualquer $g_2 \in f\phi$. Por outro lado, atendendo ao Teorema 3.2.7, o subgrupo $f\phi$ é um l -subgrupo de G , pelo que, tendo em conta o Corolário 1.3.2, temos $f\phi = \{1\}$. Analogamente, como $1 \in f\phi$, obtemos $g_1 \leq 1$, para qualquer $g_1 \in e\phi$, pelo que $e\phi = \{1\}$.

Assim, uma vez que S é totalmente ordenado, concluímos que $e\phi = \{1\}$, para qualquer $e \in E(S)$.

Tomemos, agora, $s \in S$. Como $s\phi$ é uma classe lateral de $(ss^{-1})\phi$, pelo Teorema 3.2.3, e $(ss^{-1})\phi = \{1\}$, concluímos que $s\phi = \{g\}$, com $g \in G$. Mas,

como ϕ é um pré-homomorfismo, temos $s_1\phi s_2\phi \subseteq (s_1s_2)\phi$, para quaisquer $s_1, s_2 \in S$. Portanto ϕ é um homomorfismo.

Provemos, então, que o semigrupo S é E -unitário. Sejam $e \in E(S)$ e $s \in S$ tais que $es \in E(S)$. Como ϕ é um homomorfismo,

$$(es)\phi = e\phi s\phi = \{1\} s\phi = s\phi.$$

Logo, uma vez que ϕ é puro nos idempotentes, temos $s \in E(S)$. □

Como consequência deste último resultado, vamos poder garantir que o quociente de um semigrupo inverso E -unitário totalmente ordenado S por uma sua \vee -congruência arbitrária é sempre um semigrupo inverso E -unitário.

Corolário 3.2.12 *Sejam S um semigrupo inverso E -unitário totalmente ordenado e α uma sua \vee -congruência. Então S/α é um semigrupo inverso E -unitário.*

Demonstração

Seja ρ o traço de α . Como o semigrupo S é E -unitário, a menor \vee -congruência em S com traço ρ é ρ_{\min} (ver Teorema 2.3.10). Para facilitar a escrita representemos ρ_{\min} por ρ^* . Em primeiro lugar, observemos que, uma vez que o semigrupo S é E -unitário e totalmente ordenado, o semigrupo S/ρ^* é também E -unitário e totalmente ordenado, atendendo ao Corolário 2.3.11. Por outro lado, das observações após o Teorema 2.4.6, concluímos que α/ρ^* é uma \vee -congruência que separa idempotentes em S/ρ^* . Além disso, $S/\rho^*/\alpha/\rho^*$ é isomorfo a S/α . Assim, o semigrupo S/ρ^* é uma cobertura E^V -unitária totalmente ordenada do semigrupo inverso totalmente ordenado $S/\rho^*/\alpha/\rho^*$, pelo que, atendendo ao Teorema 3.2.11, o semigrupo $S/\rho^*/\alpha/\rho^*$ é E -unitário. Logo S/α também o é. □

Problemas

Apresentamos seguidamente alguns problemas, que julgamos em aberto, relacionados com os assuntos tratados neste trabalho.

1. Sejam S um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso e ρ uma congruência \vee -normal.

1.1 Encontrar, se possível, uma expressão mais simples para $((\rho_{\max})^\vee)^b$, a maior \vee -congruência em S com traço ρ .

1.2 Determinar, se possível, uma descrição para a menor \vee -congruência em S com traço ρ .

2. Num reticulado L , dados $a, b \in L$, escrevemos $a < b$ se $a \not\leq b$. Se $a < b$, dizemos que b cobre a , e escrevemos $a \prec b$, se não existe qualquer elemento $c \in L$ tal que $a < c < b$.

Um reticulado L diz-se \vee -semi-modular (\wedge -semi-modular) se $a \wedge b \prec a$ então $b \prec a \vee b$ (se $b \prec a \vee b$ então $a \wedge b \prec a$), para quaisquer $a, b \in L$.

Num semi-reticulado as suas congruências constituem um reticulado \vee -semi-modular [FN73].

Será que num semigrupo \vee -semi-reticulado inverso o reticulado das suas \vee -congruências é \vee -semi-modular?

3. Dado um P -semigrupo S definir, se possível, uma ordem em S de modo que S seja um semigrupo \vee -semi-reticulado inverso E -unitário.

4. Averiguar se todo o semigrupo \vee -semi-reticulado inverso S possui uma cobertura E^\vee -unitária. Dos nossos resultados, sabemos que se S for finito, tal cobertura E^\vee -unitária tem de ser infinita, a não ser que S seja um semi-reticulado.

Bibliografia

- [Bir84] Garrett Birkhoff. *Lattice theory*. American Mathematical Society, 1984.
- [Cal00] Grigore Calugareanu. *Lattice concepts of module theory*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [Con60] P. F. Conrad. The structure of a lattice ordered group with a finite number of disjoint elements. *Michigan Math. J.*, 7:171–180, 1960.
- [CP67] A. H. Clifford e G. B. Preston. *The algebraic theory of semigroups*, volume 2. American Mathematical Society, 1967.
- [Dar95] Michael R. Darnel. *Theory of lattice ordered groups*. Marcel Dekker, Inc., 1995.
- [DP90] B. A. Davey e H. A. Priestley. *Introduction to lattices and order*. Cambridge University Press, 1990.
- [FN73] R. Freese e J. B. Nation. Congruence lattices of semilattices. *Pac. J. Math.*, 49:51–58, 1973.
- [GGM00] G. Gomes, E. Giraldez e D. B. McAlister. On a class of lattice ordered inverse semigroups. *J. Algebra*, 230(2):496–517, 2000.
- [Gra78] George Grätzer. *General lattice theory*. Birkhauser Verlag, 1978.

- [Gra79] George Gratzner. *Universal Algebra*. Springer Verlag, 1979.
- [Gri95] P. A. Grillet. *Semigroups: an introduction to the structure theory*. Marcel Dekker, Inc., 1995.
- [How95] John M. Howie. *Fundamentals of semigroup theory*. Clarendon Press, 1995.
- [Law98] Mark V. Lawson. *Inverse semigroups: the theory of partial symmetries*. World Scientific, 1998.
- [Lee95] Jonathan Leech. Inverse monoids with a natural semilattice ordering. *Proc. London Math. Soc.*, 70(3):146–182, 1995.
- [McA74a] D. B. McAlister. Groups, semilattices and inverse semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 192:227–244, 1974.
- [McA74b] D. B. McAlister. Groups, semilattices and inverse semigroups,II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 196:351–370, 1974.
- [McA80] D. B. McAlister. A random ramble through inverse semigroups. Em *Semigroups, Proc. Conf., Clayton/Aust. 1979*, páginas 1–20, 1980.
- [McA98] D. B. McAlister. Lattice ordered groups and the structure of inverse semigroups. Notas para um curso, 1998. Centro de Álgebra da Universidade de Lisboa, <http://www.math.niu.edu/~don/>.
- [MR77] D. B. McAlister e N. R. Reilly. E-unitary covers for inverse semigroups. *Pac. J. Math.*, 68:161–174, 1977.
- [Mun76] W. D. Munn. A note on E-unitary inverse semigroups. *Bull. London Math. Soc.*, 8:71–76, 1976.
- [Pet78] M. Petrich. Congruences on inverse semigroups. *J. Algebra*, 55:231–256, 1978.

-
- [Pet84] Mario Petrich. *Inverse semigroups*. John Wiley and Sons, 1984.
- [Pre54] G. B. Preston. Inverse semi-groups. *J. London Math. Soc.*, 29:396–403, 1954.
- [RM76] N. R. Reilly e W. D. Munn. E-unitary congruences on inverse semigroups. *Glasgow Math. J.*, 17:57–75, 1976.
- [RS67] N. R. Reilly e H. E. Scheiblich. Congruences on regular semigroups. *Pac. J. Math.*, 23:349–360, 1967.
- [Sai65] T. Saito. Proper ordered inverse semigroups. *Pac. J. Math.*, 15:649–666, 1965.
- [Sch75] B. M. Schein. A new proof of the McAlister P-Theorem. *Semigroup Forum*, 10:185–188, 1975.
- [Wag53] V. V. Wagner. The theory of generalized heaps and generalized groups(Russian). *Matem. Sbornik*, 32:545–632, 1953.
- [XY00] Xie Xiang-Yun. On regular, strongly regular congruences on ordered semigroups. *Semigroup Forum*, 61:159–178, 2000.