

Números irracionais algébricos e transcendentais



João Cabral*

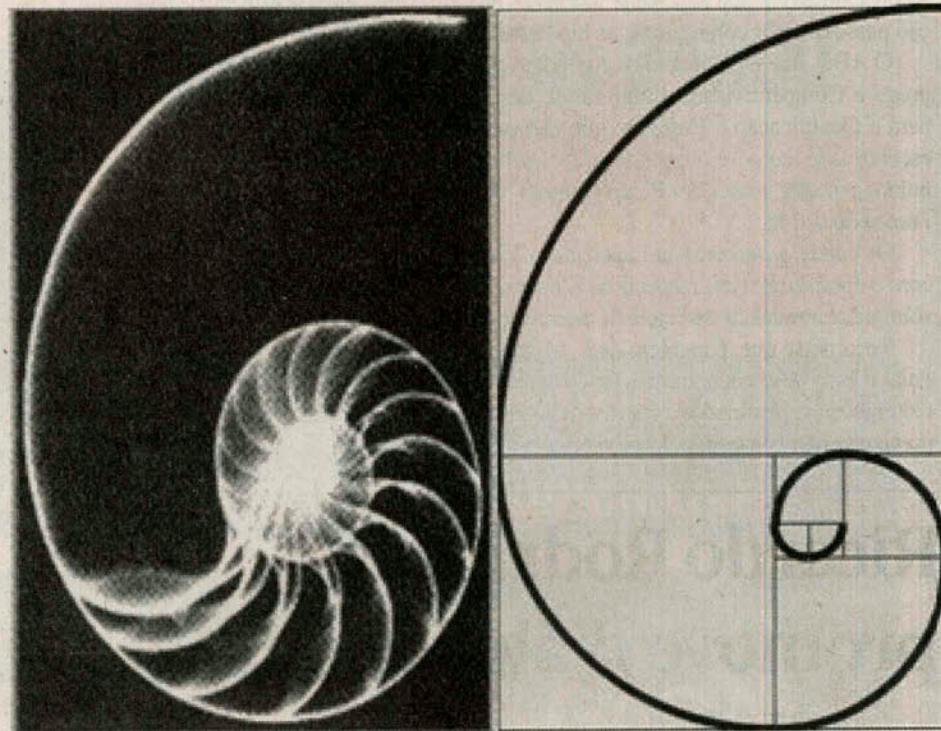
Ao longo de todo o processo de aprendizagem, a que cada pessoa se submete quando ingressa numa escola, desde tenra idade, surgem vários tipos de números, que são introduzidos consoante a sua necessidade e aplicação, pelos professores. Os primeiros são os números naturais que têm uma escrita muito comum e conhecida, usando-se os dígitos de zero a nove. De seguida surgem os números inteiros relativos, mais conhecidos por números negativos. Para representar um número negativo usa-se um sinal “-” para os diferenciá-los dos números naturais. Ao agrupar os números naturais com os números inteiros relativos, incluindo-se o número zero, obtemos um conjunto de números designado por conjunto dos números inteiros. Depois surgem os números fracionários, requerendo para a sua escrita um traço horizontal “_” ou na diagonal “/”, classificados de forma simples pela sua dízima finita, ou pela sua dízima infinita periódica. Reunindo estes novos números aos já conhecidos inteiros, passamos a ter o conjunto dos números racionais. Mas, no entanto, mesmo possuindo uma grande quantidade de números diferentes, este conjunto dos números racionais ainda deixa algumas questões em branco por responder. Uma delas, bastante simples de entender, é por exemplo, quanto mede o lado de um quadrado que tenha de área duas unidades?

O leitor, obviamente, lembrar-se-á que a área de um quadrado é obtida por $A=h \times h=h^2$, representando o valor h a medida do lado do quadrado. Ora, para descobrir o valor do comprimento do lado do quadrado que tenha de área duas unidades basta resolver a equação $h^2=2$. A solução desta equação é o número que multiplicado por si mesmo origina o valor dois. Será que existe algum natural que satisfaça este problema? Como é fácil de verificar se a solução fosse um número natural então teria de ser inferior a dois, pois $2 \times 2=4$, e quatro unidades são um valor em excesso para a área do nosso quadrado. A unidade também não pode ser a solução do problema visto que $1 \times 1=1$, um valor insuficiente para a área. Logo a solução que pretendemos tem de ser um número que seja superior a um e inferior a dois! Como os números relativos só diferem dos naturais pelo seu sinal, então não existe nenhum número relativo que seja solução do nosso problema, pois se existisse, teria de ser um número entre um e dois. Será que estamos a falar de um número fracionário? Ora, vamos supor que esse número h é um número fracionário. Se assim fosse, h podia ser es-

crito sob a forma de uma fração irredutível, $h=p/q$, sendo p e q , dois números inteiros primos entre si, ou seja, o único divisor comum entre eles é a unidade. Assim, $(p/q)^2=2$, e teríamos $p^2=2q^2$, deduzindo-se que p^2 é um valor par. Mas, para que $p \times p=p^2$ seja um número par, p só pode ser um número par, e pode-se escrever como $p=2k$, e assim $p^2=(2k)^2=2q^2$. Da última igualdade temos que $4k^2=2q^2$. O que faz com que $2k^2=q^2$, chegando-se à conclusão que q é um número par, pelo mesmo motivo que se chegou à conclusão de que p era um número par. Conclui-se que, sendo os números p e q dois números pares, então eles não são primos entre si, pois admitem, para além da unidade, o número dois como divisor. Assim, o valor h não é um número fracionário, logo também não é racional. Nasce desta forma, a necessidade de criar um novo conjunto de números que dê uma solução para o nosso problema da área do quadrado. Identificamos este novo número h como sendo a raiz quadrada de dois, um número irracional, e escreve-se $h=\sqrt{2}$, usando-se o símbolo “ $\sqrt{\quad}$ ” para o diferenciá-lo do número inteiro 2. Uma forma de distinguir os números irracionais dos racionais é através do valor da dízima, pois os números irracionais têm dízima infinita não periódica, como por exemplo $\sqrt{2}=1,4142135\dots$, que pode ser facilmente determinada usando uma calculadora.

Apesar da antiga ciência da Geometria já lidar com os números irracionais há mais de vinte séculos, foi só em 1872, pelo matemático alemão Dedekind (1831-1916) que os números irracionais foram introduzidos na aritmética de forma rigorosa.

Existem dois tipos de números irracionais: os algébricos e os transcendentais. Uma forma fácil de os distinguir é através do produto. Se, usando as regras operatórias do produto, através de uma multiplicação de factores repetidos, do mesmo número irracional, conseguirmos obter um número inteiro, então teremos um número irracional algébrico, caso contrário este é transcendental. Temos como exemplo de números irracionais algébricos todas as raízes quadradas, cúbicas, quartas, etc, que são números irracionais, de um determinado número inteiro positivo, e como exemplo de números irracionais transcendentais o número $\phi=(1+\sqrt{5})/2$, conhecido como número de ouro, o número $\pi=3,14\dots$, conhecido como número Pi, e o número $e=2,71\dots$, conhecido como número de Euler. A título de curiosidade, podemos verificar que os números irracionais algébricos podem ser convertidos em potências de expoente fracionário, como por exemplo $\sqrt{7}=7^{1/2}$, de modo genérico $n^{\frac{1}{a}}=a^{1/n}$, enquanto os transcendentais já não admitem esta forma. Note-se que o expoente, sendo uma fração unitária, o método Egípcio da sua decomposição em somas, já falado num artigo, nesta página, deste jornal Correio dos Açores, há sensivelmente duas semanas, torna-se uma



“Os números irracionais algébricos surgem em muitos processos de cálculo, e são usados de forma muito comum através de uma sua aproximação, usando a sua dízima, arredondando-se os valores a um determinado número de casas decimais, dependendo da aproximação que é pretendida no cálculo. Segue-se o mesmo procedimento quando surgem os números irracionais transcendentais no cálculo.”

ferramenta bastante prática na operação de potências. No caso das raízes quadradas de índice par, o seu cálculo só pode ser efetuado no domínio dos números positivos ou de valor zero, não havendo restrição para o caso do índice ser ímpar.

Os números irracionais algébricos surgem em muitos processos de cálculo, e são usados de forma muito comum através de uma sua aproximação, usando a sua dízima, arredondando-se os valores a um determinado número de casas decimais, dependendo da aproximação que é pretendida no cálculo. Segue-se o mesmo procedimento quando surgem os números irracionais transcendentais no cálculo.

Mas, os números transcendentais pos-

suem uma mística muito superior aos algébricos, sendo admirados porque normalmente surgem de relações geométricas presentes na natureza. O número π já foi explorado em edições anteriores desta página, neste jornal, por isso o nosso leitor assíduo já tem conhecimento da sua importância. O número de Euler, que surge como valor limite de uma sucessão de valores, está presente em muitos modelos matemáticos, com aplicação em estudos de Demografia, Ecologia, Economia, etc. O número de ouro é o mais fascinante de todos, sendo considerado por muitos como a oferta de Deus ao mundo. Ao desenharmos um retângulo cujos lados tenham uma razão entre si igual ao número de ouro, este pode ser dividido num quadrado e em outro retângulo em que esse tem, também, a razão entre os seus dois lados igual ao número de ouro. Este processo pode ser repetido indefinidamente, mantendo-se a razão constante. Se em cada um dos quadrados desenharmos um arco de circunferência, tal como está representado no desenho presente acima, obtemos uma espiral, que muito facilmente será reconhecida por todos, estando presente na natureza: nas conchas de certos moluscos, em flores, como nos girassóis e em frutos, como no ananás. Tentando recriar a beleza presente na natureza, muitos artistas modernos usam o número de ouro nos seus trabalhos. Dos artistas clássicos, que também usaram a razão dourada nos seus trabalhos o mais famoso foi Leonardo da Vinci (1452-1519), que usou o número de ouro para promover a perfeição, harmonia e a beleza nas suas obras de arte.

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
Diretor do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação
jcabral@uac.pt