

Fourierentwicklung gewisser Eisensteinreihen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
der Universität Mannheim

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Matthias Funk
aus Heidelberg

Mannheim, 2003

Dekan: Professor Dr. Jürgen Potthoff, Universität Mannheim

Referent: Professor Dr. Siegfried Böcherer, Universität Mannheim

Korreferent: Professor Dr. Alexei Pantchichkine, Institut Fourier,
Université Grenoble I, Frankreich

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Dezember 2003

Danksagung

Wer durch die Untiefen des Ungewissen wandelt, benötigt Lichtpunkte, um einen Weg zu wählen. Diese Lichtpunkte kamen zu mir während der Ausarbeitung dieser Promotion in Form von Menschen, die mir durch ihre reine Anwesenheit und Anteilnahme, aber auch durch fruchtbare Diskussionen, Hinweise bzw. Anregungen eine weitere Etappe sichtbar machten oder halfen, eine solche einzuordnen.

Bei den Menschen, welche mich begleiteten auf diesem Pfad, möchte ich mich hiermit danken. Namentlich sind dies zum einen meine Eltern, meine Geschwister, meine Frau und meine zwei Söhne, welche alle die notwendige emotionale Stabilität ermöglichten. Zum anderen möchte ich natürlich meinem Doktorvater Prof. Dr. Siegfried Böcherer danken, daß es ihm mit seiner Betreuung gelang die große geografischen Entfernung zu überwinden zwischen den zwei Polen meines Schaffens, als Doktorand an der Universität Mannheim und als Dozent an der Universität der Azoren in Portugal. Zwar waren es immer nur kurze Momente, die ich in Mannheim verweilen konnte, doch waren sie immer sehr produktiv. Durch seine stetige Ansprechbereitschaft und seine Anteilnahme sowohl in fachlicher als auch in menschlicher Hinsicht wurde dies ermöglicht. Und dafür möchte ich mich von Herzen bedanken.

Großen Dank schulde ich auch Dr. Harald Baum, welcher mit Argusaugen so manchen Fehlerteufelchen entdeckte.

Mannheim, den 23. Juni 2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Bezeichnungen	6
1.2	Wohldefiniertheit von $E_{n,r}(Z, s)$	10
1.3	Ein Teilorbit $T[U]$ zur Erhaltung der speziellen Isotropiebedingungen	12
1.4	Eine Determinantenmatrix und ihr Bezug zur Potenzfunktion	15
2	Fourierkoeffizienten von $E_{n,r}(Z, s)$	19
2.1	Die Umformung von $\phi_{n,r,s}(M, Z)$	22
2.2	Transformationsformeln des Integrals über $\phi_{n,r,s}(M, Z)$	28
2.3	Das Repräsentantensystem \mathcal{L} von $C_{n,r} \backslash \Gamma_n$	33
2.4	Verschwindungssatz für Fourierkoeffizienten	37
2.5	Die Fourierentwicklung von $E_{n,r,0}(Z, s)$	39
3	Die Fourierentwicklung von $E_{n,r,n-r}(Z, s)$	40
3.1	Ein spezielles Repräsentantensystem von $\sigma_{n,r}/\approx$	43
3.2	Separation des archimedischen vom arithmetischen Teil	45
3.3	Der Wert des Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}^{(n-r)}(0_n, Y)$	48
3.4	Auswertung des arithmetischen Anteils	53
4	Die Fourierentwicklung von $E_{n,n-1}$	57
4.1	Die Berechnung von $a_{n,n-1,s}(0_n, Y)$	59
4.2	Reduktion des arithmetischen Anteils	61
4.3	Rückführung von $\mathcal{N}_{n,n-1}(T)$ auf $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ für halbganze symmetrische Matrizen T	63
4.4	Das System $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ für halbganze symmetrische Matrizen T_γ	67
4.5	Der archimedische Anteil als konfluente hypergeometrische Funktion	69
4.6	Zusammenfassung	77

1 Einleitung

Eisensteinreihen sind wichtige Hilfsmittel in der Theorie der Modulformen, sie sind von Langlands[21] in sehr allgemeinem Kontext auf reductiven Gruppen definiert worden. Abgesehen vom "konstanten Term" spielen in Langlands Theorie die Fourierentwicklungen keine Rolle. Es ist klar, daß aus der meromorphen Fortsetzung und der Funktionalgleichung der Eisensteinreihe auch die entsprechende Eigenschaft aller Fourierkoeffizienten folgt. Wenn man die Fourierentwicklung einer Eisensteinreihe explizit genug kennt, kann man andererseits in manchen Fällen auch direkt (ohne Rückgriff auf die Langlandsche Theorie) die entsprechenden Eigenschaften der Fourierkoeffizienten beweisen und daraus - bei hinreichend guter Konvergenz der Fourierentwicklung - die meromorphe Fortsetzung der Eisensteinreihe selbst herleiten. Im einfachsten Fall der Eisensteinreihe zu $SL_2(\mathbb{Z})$ sei das (Terras[32] folgend) kurz erläutert:

Die Eisensteinreihe

$$E_s(z) = \frac{1}{2} \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \text{ mit } ggT(c,d)=1} \frac{y^s}{|cz + d|^{2s}}$$

hat eine analytische Fortsetzung auf der komplexen s -Ebene als meromorphe Funktion von s . Sie hat einen Pol bei $s = 1$ mit dem Residuum $\frac{3}{\pi}$ und erfüllt für $\Lambda(s) := \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)$ die Funktionalgleichung

$$\underbrace{\Lambda(s)E_s(z)}_{=: E_s^*(z)} = \Lambda(1-s)E_{1-s}(z)$$

Mit der Teilerpotenzfunktion $\sigma_s(n) := \sum_{0 < d|n} d^s$ und der K-Besselfunktion $K_s(y)$ hat man die Fourierentwicklung

$$E_s^*(z) = y^s \Lambda(s) + y^{1-s} \Lambda(1-s) + 2 \sum_{n \neq 0} |n|^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(n) y^{\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi |n| y) e^{2\pi i n x}$$

Diese Vorgehensweise hat Mizumoto[26] aufbauend auf Formeln von Maaß[23] auf die Siegelsche Eisensteinreihe zu $Sp_n(\mathbb{Z})$ verallgemeinert. Seine Fourierentwicklung ist aber viel komplizierter.

Die von Mizumoto behandelte Siegelsche Eisensteinreihe gehört zur 'Siegelschen parabolischen Untergruppe' $C_{n,0}$. Diese ist nur eine von insgesamt

$n+1$ Konjugationsklassen maximal parabolischer Untergruppen $C_{n,r}$, mit $0 \leq r \leq n$. Zu jedem solchen $C_{n,r}$ kann man nun eine entsprechende Eisensteinreihe $E_{n,r}(Z, s)$ von $\mathbb{H}_n \times \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) \gg 0\}$ auf \mathbb{C} definieren durch

$$E_{n,r}(Z, s) = \sum_{M \in C_{n,r} \backslash \Gamma_n} \left(\frac{\det(\operatorname{Im}(M \langle Z \rangle))}{\det((\operatorname{Im}(M \langle Z \rangle))^{\wedge r,r})} \right)^s$$

und ihre Eigenschaften untersuchen. Dabei sei für eine Matrix $N \in M_n(\mathbb{R})$ die linke obere $r \times r$ - Untermatrix durch $N^{\wedge r,r}$ bezeichnet und die symplektische Gruppe operiere in üblicher Weise auf der oberen Halbebene mittels $M \langle Z \rangle$.

Diese Reihen spielen für die analytische Fortsetzung von Dirichletreihen, die man mit Fourier-Jacobikoeffizienten von Siegelschen Spitzenformen bilden kann, eine zentrale Rolle. Yamazaki[33] hat explizit beschrieben, wie ihre meromorphe Fortsetzung und Funktionalgleichung aus der Langlandschen Theorie folgt.

Das Hauptziel der vorliegenden Arbeit ist die möglichst explizite Beschreibung der Fourierentwicklung dieser Eisensteinreihen; wünschenswert ist eine Beschreibung ähnlich der von Miyake[24] oder Mizumoto[25]. Für den Fall, daß die Eisensteinreihen noch eine Spitzenform vom Grad r enthalten, ist die Fourierentwicklung bekannt (Böcherer[5] bzw. Böcherer&Schulze-Pillot[8]); die dort benutzte Methode (Integration gegen eine auf eine Blockdiagonale restringierte Eisensteinreihe vom Grad $n+r$) kann aber hier nicht verwendet werden, weil die entsprechenden Integrale divergieren.

Zum Erreichen des Zieles sollen also die Fourierkoeffizienten für die allgemeine Eisensteinreihe $E_{n,r}(Z, s)$ soweit wie möglich berechnet werden. Eine wirklich befriedigende Zurückführung der Koeffizienten auf bekannte Funktionen gelingt jedoch nur für die Reihen $E_{n,n-1}(Z, s)$, also im Fall $r = n - 1$. Die vorliegende Arbeit wird daher wie folgt aufgebaut:

Im einleitenden Kapitel werden neben dem Vorstellen der verwendeten Notation einige Vorarbeiten geleistet. So wird die Fragestellung der Wohldefiniertheit und Konvergenz der untersuchten Reihen erläutert. Die daran anschließenden Überlegungen zur Ähnlichkeitstransformation von isotropen, symmetrischen Matrizen mittels Repräsentanten der Nebenklassen unimodularer Matrizen modulo (von rechts) derjenigen Untergruppe, deren Elemente

eine $(n - r) \times r$ Nullmatrix als linke untere Untermatrix aufweißen, werden sich später zu einem zentralen Punkt der vorliegenden Arbeit herauskristallisieren. Denn man kann hiermit die zu untersuchenden Fourierkoeffizienten auf ganz gewisse Klassen einschränken, da die restlichen mittels dieser beschreibbar sind.

Im zweiten Kapitel werden Erkenntnisse zu den Fourierkoeffizienten der allgemeinen Reihen $E_{n,r}(Z, s)$ gesammelt. Dazu werden insbesondere die einzelnen Summanden dieser Reihe untersucht, die als Funktionen $\phi_{n,r,s}(M, Z)$ mit den Parametern n, r, s und den Variablen M aus der symplektischen Gruppe und Z aus der n -dimensionalen Siegelschen Halbebene aufgefaßt werden können. Dabei liefert die Gleichung (33) aus Satz 2.1.6 die Information, daß die Funktion $\phi_{n,r,s}(M, Z)$ bei gewissen symplektischen Argumenten unabhängig von der oberen linken Teilmatrix des rein-reellen Anteils auf der Siegelschen oberen Halbebene ist. Man versucht somit die in der Integraldarstellung der Fourierkoeffizienten vorkommenden Summanden $\phi_{n,r,s}(M, Z)$ mittels solcher Argumente zu formulieren. Dies erreicht man mittels Multiplikation der ursprünglichen symplektischen Argumente mit unimodularen Matrizen.

Damit diese unimodularen Faktoren mittels Substitution aus den zugehörigen Integralen entfernt werden können, faßt man die symplektischen Klassen so zusammen, daß die entsprechenden Reihen der Funktionsterme $\phi_{n,r,s}(M, Z)$ periodisch bzgl. des X -Anteils der oberen Siegelschen Halbebene sind. Die gewählte Zusammenfassung ist bestimmt durch den Rang k der linken unteren $(n - r) \times n$ symplektischen Untermatrix. Mittels der somit erhaltenen $n - r + 1$ Teilmengen \mathcal{M}_k des vollständigen Repräsentantensystems von $C_{n,r} \backslash \Gamma_n$ können wir den Fourierkoeffizienten beschreiben durch:

$$\sum_{k=0}^{n-r} \underbrace{\int_{Sym_n([0,1])} \sum_{M \in \mathcal{M}_k} \phi_{n,r,s}(M, X + iY) e^{-2i\pi \text{Spur}(TX)} dX}_{=: a_{n,r,s}^{(k)}(T, Y)}$$

dabei sind $a_{n,r,s}^{(k)}(T, Y)$ die Fourierkoeffizienten der $n - r + 1$ verschiedenen periodischen Teilfunktionen $E_{n,r,k}(Z, s)$ von $E_{n,r}(Z, s)$. Über diesen Umweg führt die genannte Interpretation von (33) zur sehr zentralen Reduktion der Koeffizientenmatrix T in Satz 2.4.1, nach der alle Fourierkoeffizienten verschwinden, wenn es keine Ähnlichkeitstransformation mit unimodularen Ma-

trizen U gibt, so daß $T[U]$ eine linke obere $r \times r$ Nullmatrix hat. Somit kann man wegen der üblichen Transformationseigenschaften der Fourierkoeffizienten sich sofort zurückziehen auf all die Koeffizientenmatrizen mit einer linken oberen $r \times r$ Nullmatrix.

Diese Reduktion führt bald zu der in Korollar 2.4.2 formulierten Erkenntnis, daß man im Fall $n - r \leq r$ o.B.d.A. nur Koeffizientenmatrizen berücksichtigt, die abgesehen von der rechten unteren $2(n - r) \times 2(n - r)$ Untermatrix nur Nulleinträge enthalten. Und selbst dieser nichtverschwindende Matrixanteil weist noch einen maximalen isotropischen Bereich auf.

Zum Abschluß des zweiten Kapitels werden die Fourierkoeffizienten $a_{n,r,s}^{(0)}(T, Y)$ ermittelt; für die Nullmatrix T ergibt sich eine Selbergsche Zetafunktion und sonst die Nullfunktion.

Im dritten Kapitel verfolgen wir ausschließlich die Beschreibung der Fourierkoeffizienten $a_{n,r,s}^{(n-r)}(T, Y)$, also derjenigen Teilfunktion über die Nebenklassen aus $C_{n,r} \backslash \Gamma_n$, in welchen die unteren linken $n - r \times n$ Teilmatrizen vom vollen Rang sind. Als wichtiges Hilfsmittel dazu dient eine von Kitaoka[13] durchgeführte Zerlegung dieser Teilmenge des Repräsentantensystems von $C_{n,r} \backslash \Gamma_n$. Somit können wir den Fourierkoeffizienten darstellen als die Summe über eine Teilmenge eines Repräsentantensystems der Rechtsnebenklassen der n -reihigen unimodularen Gruppe und ihrer Untergruppe mit Nulleinträgen auf der linken unteren $(n - r) \times r$ Untermatrix. Jeder dieser Summanden ist ein Produkt aus einem archimedischen und einem arithmetischen Anteil, die jeweils von den Parametern n, s, r, Y und T abhängen.

Der arithmetische Anteil hat eine komplizierte Form, welche für den Fall $r < n - 1$ die weitere Berechnung sehr erschwert. Im Fall $r = n - 1$ ist der arithmetische Anteil aber leicht zu errechnen.

Deshalb konzentrieren wir uns im abschließenden vierten Kapitel ausschließlich auf die Funktion $E_{n,n-1}(Z, s)$, welche neben der Vereinfachung bezüglich des arithmetischen Anteiles auch nur in die Teilfunktionen $E_{n,n-1,0}(Z, s)$ und $E_{n,n-1,1}(Z, s)$ zerfällt, deren Fourierkoeffizienten grundsätzlich bereits im zweiten bzw. dritten Kapitel dargestellt wurden, welche dann aber noch hinsichtlich der erwähnten Vereinfachungen präzisiert werden sollen.

Den Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y)$ erhält man sofort durch den Satz 4.1.2. Dieser ist im wesentlichen aus der Summe zweier Epsteinscher Zetafunktionen bestimmt. Man kann hierzu sofort die in (84) vorgestellte Funktional-

gleichung angeben:

$$\Lambda(s)\alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) = \Lambda(n-s)\alpha_{n,n-1,n-s}(0_n, Y)$$

Bei den anderen Fourierkoeffizienten berücksichtigen wir insbesondere die Tatsache, daß nur die T -Fourierkoeffizienten betrachtet werden, deren rechte untere 2×2 Untermatrix ausschließlich Nulleinträge aufweisen, und daher höchstens vom Rang 2 sind. Selbst auf der nicht vollständig verschwindenden symmetrischen 2×2 Untermatrix von T ist in jedem zu betrachtenden Fall der linke obere Eintrag gleich Null.

Insbesondere letztere Isotropiebedingung verhilft dazu, daß wir die Summation über die entsprechende Teilmenge des unimodularen Rechtsklassensystems für Koeffizientenmatrizen T mit $Rg(T) \neq 0$ als endlich bestimmen können. Die Anzahl der Summanden entspricht dem Rang für $1 \leq Rg(T) \leq 2$, jeder Summand ist im Wesentlichen durch eine konfluente hypergeometrische Funktion beschrieben. Die genauen Werte dieser Fourierkoeffizienten sind wiedergegeben im Satz 4.6.1, der als das Hauptergebnis der Arbeit angesehen werden kann.

1.1 Bezeichnungen

Die Symbole \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} und \mathbb{C} bezeichnen die Menge der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. Die Bezeichnung \mathbb{N}_0 steht für die natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Sind $m, n \in \mathbb{N}$ und \mathcal{R} ein kommutativer Ring mit Einselement, so bezeichne $\mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{R})$ den Ring der m -zeiligen und n -spaltigen Matrizen (falls $n = m$ auch kurz $\mathcal{M}_n(\mathcal{R})$), $\mathcal{O}_n(\mathcal{R})$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen n -ten Grades über \mathcal{R} , $Sym_n(\mathcal{R})$ die Menge der $n \times n$ symmetrischen und $Sym_n(\mathbb{Z})^*$ der symmetrisch halbganzen Matrizen mit ganzzahligen Diagonalelementen. Falls \mathcal{R} ein Unterring von \mathbb{R} ist, so bezeichnet $Pos_n(\mathcal{R})$ die Menge der $n \times n$ symmetrisch positiv definiten Matrizen. Die allgemeine lineare Gruppe n -ten Grades $GL_n(\mathcal{R})$ ist die multiplikative Gruppe der $n \times n$ Matrizen über den Ring \mathcal{R} , die invertierbar sind bezüglich des Ringes \mathcal{R} .

Die quadratische Einheitsmatrix wird mit 1_n und die Nullmatrix mit $0_{m,n}$ (bzw. mit 0_n für $n = m$) symbolisiert. E_n bezeichne eine $n \times n$ Matrix deren Einträge alle 0, jedoch an der Gegendiagonalen, welche von der rechten oberen bis zur linken unteren Ecke verläuft, vom Wert 1 sind.

Sei $0 \leq k \leq m$ und $0 \leq l \leq n$, dann definieren wir für eine beliebige Menge $\mathcal{F}_{m,n}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_{m,n}(\mathcal{R})$ bzw. $\mathcal{F}_{k,l}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}_{k,l}(\mathcal{R})$ folgende Mengen:

$$\mathcal{F}_{m,n}^{\searrow_{k,l} 0_{k,l}}(\mathcal{R}) := \{F \in \mathcal{F}_{m,n}(\mathcal{R}) \mid \text{linke obere } k \times l \text{ Untermatrix von } F \text{ ist } 0_{k,l}\}$$

$$\mathcal{F}_{\searrow_{k,l} 0_{k,l}}^{0_{m,n}}(\mathcal{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} F & 0_{k,n-l} \\ 0_{m-k,l} & 0_{m-k,n-l} \end{pmatrix} \mid F \in \mathcal{F}_{k,l}(\mathcal{R}) \right\}$$

Soll sich die genannte Nullmatrix bzw. das Element aus $\mathcal{F}_{k,l}(\mathcal{R})$ statt an der linken oberen Ecke entweder an der oberen rechten oder an der unteren linken oder aber rechten Position befinden, so verwenden wir statt " \searrow " entweder das Symbol " \nearrow ", oder " \swarrow " oder aber " \nwarrow ".

Wenn $n = m$ oder $k = l$, kann man gewisse Vereinfachungen einführen, so kürzt man z.B. $Sym_{n,n}^{\searrow_{0_l,l}}(\mathbb{Z})$ ab durch $Sym_n^{\searrow_{0_l}}(\mathbb{Z})$. Genauso schreibt man beim Vorhandensein einer Identität zwischen den durch \searrow und \nearrow bezeichneten Mengen (wie z.B. $\mathcal{F}_{\searrow_{m,l}}^{0_{m,n}}(\mathcal{R}) = \mathcal{F}_{\nearrow_{m,l}}^{0_{m,n}}(\mathcal{R})$) einfach \uparrow (im gegebenen Fall also $\mathcal{F}_{\uparrow_l}^{0_{m,n}}(\mathcal{R})$). Bei analogen Identitäten lassen sich \searrow und \swarrow durch \leftarrow ,

oder \swarrow und \searrow durch \downarrow , oder auch \nearrow und \nwarrow durch \rightarrow ersetzen.

Wollen wir für eine Matrix $F \in \mathcal{F}_{m,n}(\mathcal{R})$ die $k \times l$ linke obere Untermatrix betrachten, so schreiben wir $F^{\nwarrow k,l}$. Entsprechendes gilt für $F^{\nearrow k,l}$, $F^{\swarrow k,l}$ bzw. $F^{\searrow k,l}$. Für $l = n$ ist $F^{\nwarrow k,l} = F^{\nearrow k,l}$ bzw. $F^{\swarrow k,l} = F^{\searrow k,l}$ und wir schreiben statt dessen $F^{\uparrow k}$ bzw. $F^{\downarrow k}$, was den oberen bzw. unteren k Zeilen der Matrix F entspricht. Analog gilt für $k = m$, daß $F^{\nwarrow k,l} = F^{\swarrow k,l}$ bzw. $F^{\nearrow k,l} = F^{\searrow k,l}$ und wir statt dessen $F^{\leftarrow l}$ bzw. $F^{\rightarrow l}$ schreiben, um die linken bzw. rechten l Spalten von F zu bezeichnen.

Für eine beliebige Matrix $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sei:

$$e(M) := e^{-2\pi i \text{Spur}(M)}$$

$$\det(M) = \|M\|$$

Man definiert für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ die Potenzfunktion $P_z : \text{Pos}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $P_z(Y) = \prod_{j=1}^n \|Y^{\nwarrow j,j}\|$.

Für eine halbganze symmetrische Matrix $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ mit $\tilde{t}_{i,j} = \begin{cases} t_{i,j} & : i = j \\ 2t_{i,j} & : i \neq j \end{cases}$, definiere man den Inhalt von T durch:

$$\mathcal{I}(T) = ggT(\tilde{t}_{i,j}) \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n$$

also der größte Zahl $g \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{g}T$ wiederum halbganz.

Seien für die Indizes $i, j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq i \leq j$ die Werte $\nu_i \in \mathbb{N}$ und $A(i)$ quadratische $\nu_i \times \nu_i$ Matrizen. Dann bezeichne:

$$\text{diag}(A(1), A(2)) := \begin{pmatrix} A(1) & 0_{\nu_1, \nu_2} \\ 0_{\nu_2, \nu_1} & A(2) \end{pmatrix}$$

und iterativ

$$\text{diag}(A(1), \dots, A(j)) := \text{diag}(\text{diag}(A(1), \dots, A(j-1)), A(j))$$

Man schreibe $N[U] := {}^t \bar{U} N U$ für eine $n \times m$ Matrix U und eine $n \times n$ Matrix N , wobei ${}^t U$ die transponierte und \bar{U} die konjugierte Matrix von U sei.

Ist $U \in GL_n(\mathbb{Z})$, so beschreibt $N[U]$ eine Ähnlichkeitstransformation. Falls $S \in Sym_n(\mathbb{Z})^*$, so bildet $S[x]$ für alle n -dimensionalen Vektoren x eine quadratische Form. Ein nichttrivialer Lösungsvektor der Gleichung $S[x] = 0$ heißt isotrop. Da bei $S \in Sym_n^{\searrow 0_k}(\mathbb{Z})^*$ mit $1 \leq k \leq n$ alle Vektoren $x \in (\mathbb{R}^n)^{\downarrow 0_{a,1}}$ isotrop sind, werden wir im Teilraum $Sym_n^{\searrow 0_k}(\mathbb{Z})^* \subset Sym_n(\mathbb{Z})^*$ von den Isotropiebedingungen sprechen, wenn wir auf das Vorhandensein einer linken oberen Untermatrix 0_k verweisen.

Folgende Menge ist als die Siegelsche obere Halbebene bekannt

$$\mathbb{H}_n = \{X + iY \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid X \in Sym_n(\mathbb{R}), Y \in Pos_n(\mathbb{R})\}$$

Wir bezeichnen durchgängig für $Z \in \mathbb{H}_n$ dessen Realteil mit X und dessen Imaginärteil mit Y .

Für $J_n = \begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}$ (falls n kontextuell ersichtlich, auch kurz J) bezeichnet man $Sp_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \mid J[M] = J\}$ als symplektische Gruppe. Jede Matrix aus $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ sei in vier $n \times n$ Untermatrizen A, B, C, D so gegliedert, daß $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$; gegebenenfalls verwende man zur besseren Unterscheidung auch die Bezeichnung A_M, B_M, C_M, D_M . Außerdem heiße $\Gamma_n = Sp_n(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z})$ Siegelsche Modulgruppe. Zur Siegelschen Modulgruppe definieren wir eine geeignete Untergruppe durch $C_{n,r} := \Gamma_n^{\swarrow 0_{n-r, n+r}}$, dabei gelte für $n, r \in \mathbb{N}$, daß $n \geq r$.

Die symplektische Gruppe $Sp_n(\mathbb{R})$ operiert vermöge

$$M \langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$$

auf der Siegelschen oberen Halbebene \mathbb{H}_n .

Im folgenden sei $r \in \mathbb{N}$ mit $n \geq r$ beliebig (aber fixiert). Dann unterteilen wir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni K = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ K_3 & K_4 \end{pmatrix}$ in die Untermatrizen K_1, K_2, K_3 bzw. K_4 mit den Dimensionen $r \times r, r \times (n-r), (n-r) \times r$ bzw. $(n-r) \times (n-r)$.

Wenn $2(n-r) \leq n$, dann geben wir durch $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ni K = \begin{pmatrix} K_\alpha & K_\beta \\ K_\delta & K_\gamma \end{pmatrix}$ eine Einteilung in die Untermatrizen $K_\alpha \in M_{2r-n}(\mathbb{R})$, $K_\beta \in M_{2r-n, 2(n-r)}(\mathbb{R})$,

$K_\delta \in M_{2(n-r), 2r-n}(\mathbb{R})$ und $K_\gamma \in M_{2(n-r)}(\mathbb{R})$.

Nach [13] ist auf

$$\sigma_{n,r} := \{M \in Sp_n^{\not\sim 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z}) \mid \det((C_M)_4) \neq 0\}$$

eine Äquivalenzrelation wie folgt definiert:

$$M \approx N :\Leftrightarrow (\exists g \in GL_{n-r}(\mathbb{Z}), S \in Sym_n(\mathbb{Z})) : gM^{\downarrow n-r} = N^{\downarrow n-r} + (0_{n-r,n}, C_N^{\downarrow n-r} S)$$

Die kann man auch gruppentheoretisch definieren mittels

$$C_{n,r} \setminus \sigma_{n,r} / \left(\begin{array}{cc} 1_n & Sym_n(\mathbb{Z}) \\ 0_n & 1_n \end{array} \right)$$

1.2 Wohldefiniertheit von $E_{n,r}(Z, s)$

Auf dem Bereich $\mathbb{H}_n \times \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > n + r + 1\}$ ist die Funktion $E_{n,r}(Z, s)$ wohldefiniert, da die sie konstituierende Reihe zum einen unabhängig vom Repräsentantensystem von $C_{n,r} \setminus \Gamma_n$ und zum anderen dort absolut konvergent ist.

Die Unabhängigkeit ergibt sich sofort aus Formel (32) in Satz 2.1.6 und der Tatsache, daß $\det((D_K)_4)^{-2s} = 1$ (wegen $K \in Sp_n^{0_{n-r}, n+r}(\mathbb{R})$ mit $(D_K)_4 \in GL_{n-r}(\mathbb{Z})$).

Um die Konvergenz zu belegen, benötigen wir folgende zwei Fakten aus [16, S. 33 ff.]:

Lemma 1.2.1 *Man definiere für $n \in \mathbb{N}$ und $d \in \mathbb{R}$ mit $d > 0$:*

$$\mathcal{B}_n(d) := \{Z \in \mathbb{H}_n \mid \operatorname{Spur}(X^2) \leq d^{-1}, Y \geq d1_n\}$$

Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$, so daß $(\forall Z \in \mathcal{B}_n(d)) : (\forall M \in Sp_n(\mathbb{R})) : (\forall r \leq n) :$

$$\begin{aligned} & \det(\operatorname{Im}(M \langle Z \rangle_1)) \mid \det(C_M Z + D_M) \mid^2 \geq \\ & \geq \det(\operatorname{Im}(M \langle i1_n \rangle_1)) c \mid \det(iC_M + D_M) \mid^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Lemma 1.2.2 *Für $n + r + 1 < k \in \mathbb{N}$ konvergiert folgende Reihe absolut:*

$$\sum_{M: C_{n,r} \setminus \Gamma_n} \det(\operatorname{Im}(M \langle Z \rangle_1))^{-\frac{k}{2}} \mid \det(C_M Z + D_M) \mid^{-k} \quad (2)$$

Satz 1.2.3 *Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\frac{s}{2}) > n + r + 1$, wobei $n > r \geq 1$ für n und r aus \mathbb{N} . Dann konvergiert die Reihe*

$$(\det(\operatorname{Im}(Z)))^{-s} \times E_{n,r}(Z, s) = \sum_{M: C_{n,r} \setminus \Gamma_n} \frac{1}{\det(\operatorname{Im}(M \langle Z \rangle_1))^{\frac{s}{2}} \mid \det(C_M Z + D_M) \mid^s}$$

absolut gleichmäßig auf jedem Vertikalstreifen $\mathcal{B}_n(d)$ positiver Mindesthöhe $d \in \mathbb{R}^+$.

Bew.: Von den beiden oben angeführten Lemmas belegt das erste, daß diese Reihe beschränkt wird durch den Fall $Z = i$. Das zweite hingegen belegt die Konvergenz für den Fall $\operatorname{Re}(\frac{s}{2}) > n + r + 1$.

q.e.d.

Anmerkung 1.2.4 Die Reihe $E_{n,r}(Z, s)$ konvergiert demnach für $\operatorname{Re}(\frac{s}{2}) > n + r + 1$ absolut gleichmäßig in Bereichen der Form:

$$\mathcal{B}_n(d) \cap \{X + iY = Z \in \mathbb{H}_n \mid \det(Y) \text{ beschränkt}\}$$

Da wir später aufgrund der Periodizität von $E_{n,r}(Z, s)$ dessen Fourierentwicklung nur bezüglich fixiertem $\operatorname{Im}(Z)$ betrachten, reicht diese Konvergenz von $E_{n,r}(Z, s)$ völlig aus.

1.3 Ein Teilorbit $T[U]$ zur Erhaltung der speziellen Isotropiebedingungen

Im vorliegenden Abschnitt sei für $n-r \leq r$ die Matrix $T \in \text{Sym}_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^*$ beliebig fixiert. Es sollen die Ähnlichkeitstransformationen $T[U]$ mit $U \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ untersucht werden, welche die Isotropiebedingungen erhalten, d.h. für die auch $T[U] \in \text{Sym}_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^*$ ist.

Man sieht sofort, daß bei beliebigem $T \in \text{Sym}_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^*$ für jedes $U \in \text{GL}_n^{\setminus 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$ gilt

$$T[U] = \begin{pmatrix} 0_r & {}^t U_1 T_2 U_4 \\ {}^t U_4 {}^t T_2 U_1 & * \end{pmatrix} \quad (3)$$

Also ist jede dieser Bahnen in $\text{Sym}_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^*$. Die Erhaltung der Isotropiebedingungen von T ist somit eine Eigenschaft, welche entweder für alle oder aber für keinen Repräsentanten einer Nebenklasse $\text{GL}_n(\mathbb{Z})/\text{GL}_n^{\setminus 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$ gilt. Für diejenige Nebenklassen, welche die Isotropiebedingung erhalten, suchen wir einen möglichst angenehmen Repräsentanten. Dabei suchen wir eine einfache Form sowohl des Vertreters U selbst als auch der Ähnlichkeitstransformation $T[U]$. Solche einfache Formen sollen in der folgenden Definition vorgestellt werden.

Definition 1.3.1 Für $k \in \{1, \dots, n\}$ sei die Menge

$$\mathcal{H}_k^n := \{M \in M_n(\mathbb{Z}) \mid M^{\setminus k} \text{ ist obere Dreiecksmatrix}\} \quad (4)$$

Jedes $U \in \mathcal{H}_k^n$ hat somit die Form:

$$U = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} (n-k) \times k \\ * \end{matrix}} & \overbrace{\begin{matrix} (n-k) \times (n-k) \\ * \\ * \end{matrix}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}}_{k \times k} & \underbrace{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}}_{k \times (n-k)} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Zu einem gegebenen $T \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{Z})^*$ suche man ein geeignetes $U \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ um folgende Standardform zu erhalten:

$$T[U] = \left(\begin{array}{c|c} \boxed{0_{2r-n}} & \boxed{0_{2r-n, 2(n-r)}} \\ \hline \boxed{0_{2(n-r), 2r-n}} & \begin{pmatrix} 0_{n-r} & (T[U])_\gamma^{\nearrow n-r} \\ (T[U])_\gamma^{\swarrow n-r} & (T[U])_\gamma^{\searrow n-r} \end{pmatrix} \end{array} \right) \quad (6)$$

D.h. es gibt ein $(T[U])_\gamma \in \text{Sym}_{2(n-r)}^{\searrow 0_{n-r}}(\mathbb{Z})^*$ mit $T[U] = \text{diag}(0_{2r-n}, (T[U])_\gamma)$.

Es gilt offensichtlich folgendes Lemma:

Lemma 1.3.2 Sei für gegebenes $n - r \leq r$ ein $\tilde{V} \in \text{GL}_{2r-n}(\mathbb{Z})$, so gilt für jedes $T_\gamma \in \text{Sym}_{2(n-r)}^{\searrow 0_{n-r}}(\mathbb{Z})^*$:

$$\text{diag}(0_{2r-n}, T_\gamma)[\text{diag}(\tilde{V}, 1_{2(n-r)})] = \text{diag}(0_{2r-n}, T_\gamma) \quad (7)$$

Satz 1.3.3 Sei $T \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{Z})^*$ und $V \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ mit $T[V] \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{Z})^*$. Dann gibt es ein $W \in \text{VGL}_n^{\swarrow 0_{n-r}, r}(\mathbb{Z})$ mit:

$$W \in \mathcal{H}_{2r-n}^n \quad (8)$$

$$T[W] \text{ wird durch (6) dargestellt.} \quad (9)$$

Bew.: Man sieht anhand von (3) sofort, daß durch geeignete Wahl von $U_1 \in \text{GL}_r(\mathbb{Z})$ und $U_4 \in \text{GL}_{n-r}(\mathbb{Z})$ man zu jedem $T \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{Z})^*$ ein $U \in \text{GL}_n^{\swarrow 0_{n-r}, r}(\mathbb{Z})$ findet, so daß $T[U]$ in der Standardform (6) vorliegt. Somit gibt es ein geeignetes $U \in \text{GL}_n^{\swarrow 0_{n-r}, r}(\mathbb{Z})$, so daß:

$$\underbrace{(T[V])}_{\in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})^*} [U] = T[\underbrace{VU}_{=: \tilde{W} \in \text{VGL}_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z})}] \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})^* \text{ auch in der Form (6)}$$

vorliegt.

Für beliebiges $\tilde{V} \in \text{GL}_{2r-n}(\mathbb{Z})$ ist $\text{diag}(\tilde{V}, 1_{2(n-r)}) \in \text{GL}_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z})$ und somit $\tilde{W} \text{diag}(\tilde{V}, 1_{2(n-r)}) =: W \in \text{VGL}_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z})$. Wegen (7) liegt auch $T[W]$ in der Form (6) vor.

Gemäß [28, S.15] kann man nun aber \tilde{V} so wählen, daß $W \in \mathcal{H}_{2r-n}^n$.

q.e.d.

Definition 1.3.4 Sind $T \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})^*$ und \mathcal{N} ein vollständiges Repräsentantensystem von $\text{GL}_n(\mathbb{Z})/\text{GL}_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z})$, so definieren wir:

$$\mathcal{N}(T) := \{V \in \mathcal{N} \mid T[V] \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})^*\} \quad (10)$$

Um Zweifel bezüglich der vorliegenden Dimensionen auszuräumen, kann man auch $\mathcal{N}_{n,r}(T)$ schreiben.

Wegen Satz 1.3.3 werden wir in Zukunft o.B.d.A. davon ausgehen, daß jedes $V \in \mathcal{N}(T)$ die Eigenschaften (8) und (9) hat.

1.4 Eine Determinantenmatrix und ihr Bezug zur Potenzfunktion

Sei $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \{1, \dots, l\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} \in M_{l,m}(\mathbb{C})$ und $l, m, p, q \in \mathbb{N}$, mit $l \geq p$ und $m \geq q$.

Wir definieren nun folgende Untermatrix: $A_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} = \begin{pmatrix} a_{i_1, j_1} & \cdots & a_{i_1, j_q} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p, j_1} & \cdots & a_{i_p, j_q} \end{pmatrix}$.

Für beliebige $p, q \in \{1, \dots, n\}$ bezeichne $(A)_{p,q}$ diejenige Matrix, welche aus A durch die Streichung der p -ten Zeile und q -ten Spalte entsteht. Bei iterativer Anwendung dieses Streichprozesses referiert man auf die Zeilen- bzw. Spaltennummer der ursprünglichen Matrix!

Gemäß [11, S.39] gilt:

Lemma 1.4.1 *Sind $n, p \in \mathbb{N}$ mit $n > p$, $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in \{1, \dots, l\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}} \in GL_n(\mathbb{C})$ und $\{i_1, \dots, i_p, \hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{n-p}\} = \{j_1, \dots, j_p, \hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{n-p}\} = \{1, \dots, n\}$, so gilt:*

$$\det \left(A^{-1} \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_p \end{pmatrix} \right) = (-1)^{\left(\sum_{\nu=1}^p i_\nu + j_\nu \right)} \cdot \left(\frac{\det \left(A_{\substack{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_{n-p} \\ \hat{i}_1, \dots, \hat{i}_{n-p}}} \right)}{\det(A)} \right)$$

Korollar 1.4.2

$$\det \left(A^{-1} \begin{pmatrix} 0_{r, n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right) = \frac{\det \left(A \begin{pmatrix} 1_r \\ 0_{n-r, r} \end{pmatrix} \right)}{\det(A)} \quad (11)$$

$$\left\| \left((A)_{n,n} \right)_{n-1, n-1} \right\| \cdot \|A\| = \left\| (A)_{n,n} \right\| \cdot \left\| (A)_{n-1, n-1} \right\| - \left\| (A)_{n, n-1} \right\| \cdot \left\| (A)_{n-1, n} \right\| \quad (12)$$

Bew.: ad (11): Da hier $\{\hat{i}_1, \dots, \hat{i}_r\} = \{\hat{j}_1, \dots, \hat{j}_r\} = \{1, \dots, r\}$ gilt, ist

$$\sum_{\nu=1}^p (i_\nu + j_\nu) \text{ eine gerade Zahl und somit } (-1)^{\left(\sum_{\nu=1}^p i_\nu + j_\nu \right)} = 1.$$

ad (12): Es sei $A^{-1} =: \tilde{A} = (\tilde{a}_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ so erhält man mittels zweifachen Anwendung von [11, S.39]:

$$\left\| \left((A)_{n,n} \right)_{n-1, n-1} \right\| \|A\|^{-1} = \left\| \begin{pmatrix} \tilde{a}_{n-1, n-1} & \tilde{a}_{n-1, n} \\ \tilde{a}_{n, n-1} & \tilde{a}_{n, n} \end{pmatrix} \right\| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \begin{array}{cc} \det(\tilde{A}) \det((A)_{n-1,n-1}) & \det(\tilde{A}) \det((A)_{n-1,n}) \\ \det(\tilde{A}) \det((A)_{n,n-1}) & \det(\tilde{A}) \det((A)_{n,n}) \end{array} \right\| \\
&= \|\tilde{A}\|^2 \left\| \begin{array}{cc} (A)_{n-1,n-1} & (V)_{n-1,n} \\ (V)_{n,n-1} & (V)_{n,n} \end{array} \right\| = \|A\|^{-2} \left\| \begin{array}{cc} \det((A)_{n-1,n-1}) & \det((A)_{n-1,n}) \\ \det((A)_{n,n-1}) & \det((A)_{n,n}) \end{array} \right\| \\
&\stackrel{\times(\|A\|^2)}{\Rightarrow} \left\| \begin{array}{cc} \det((A)_{n-1,n-1}) & \det((A)_{n-1,n}) \\ \det((A)_{n,n-1}) & \det((V)_{n,n}) \end{array} \right\| \\
&= \underbrace{\|A\|^{-2} \left\| \begin{array}{cc} \det((A)_{n-1,n-1}) & \det((A)_{n-1,n}) \\ \det((A)_{n,n-1}) & \det((A)_{n,n}) \end{array} \right\|}_{= \|(A)_{n,n}\| \|(A)_{n-1,n-1}\| - \|(A)_{n-1,n}\| \|(A)_{n,n-1}\|}
\end{aligned}$$

q.e.d.

Definition 1.4.3 Für $Y \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$ und $1 \leq m \leq n$ definiere man induktiv die Matrix $Y(m)$ durch:

$$Y(1) = (y(1)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} := Y^{-1}$$

und

$$\begin{aligned}
Y(k+1) &= (y(k+1)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \\
&= \begin{cases} y(k)_{k,k} y(k)_{j,i} - y(k)_{i,k} y(k)_{k,j} & : i, j \in \{k+1, \dots, n\} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Anmerkung 1.4.4 Alle oben definierten Matrizen $Y(m)$ bleiben symmetrisch und das jeweilige $Y(m) \setminus^{n-m+1, n-m+1}$ ist positiv definit. Es ist sofort ersichtlich, daß für $q \in \mathbb{C}$ folgender Bezug zur Potenzfunktion besteht:

$$y(1)_{1,1} = P_{\underbrace{(1,0,\dots,0)}_{(n-1) \times 0}}(Y(1)) \text{ und } y(1)_{1,1}^q = P_{\underbrace{(q,0,\dots,0)}_{(n-1) \times 0}}(Y(1)) \quad (13)$$

$$y(2)_{2,2} = P_{\underbrace{(0,1,0,\dots,0)}_{(n-2) \times 0}}(Y(1)) \text{ und } y(2)_{2,2}^q = P_{\underbrace{(0,q,0,\dots,0)}_{(n-2) \times 0}}(Y(1)) \quad (14)$$

Lemma 1.4.5 Für die unter 1.4.3 definierte Matrizen $Y(k+1)$ mit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und $i, j > k$ gilt:

$$y(k+1)_{i,j} = \left\| \begin{array}{ccc} Y(1) \setminus^{k,k} & & \\ & & \\ & & \\ y(1)_{j,1} & \dots & y(1)_{j,k} \end{array} \right\| \begin{array}{c} y(1)_{1,i} \\ \vdots \\ y(1)_{k,i} \\ y(1)_{i,j} \end{array} \left\| \prod_{l=1}^{k-1} \|Y(1) \setminus^{l,l}\|^{2^{k-1-l}} \right. \quad (15)$$

Bew.: Durch Induktion über k .

(I) $k=1$:

$$\begin{aligned} y(2)_{i,j} &= y(1)_{1,1}y(1)_{i,j} - y(1)_{1,i}y(1)_{j,1} = \begin{vmatrix} y(1)_{1,1} & y(1)_{1,i} \\ y(1)_{i,j} & y(1)_{j,1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge 1,1} & y(1)_{1,i} \\ y(1)_{i,j} & y(1)_{j,1} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^0 \|Y(1)^{\wedge l,l}\|^{2^{0-l}} \end{aligned}$$

(II) Annahmen:

Die Behauptung sei wahr für beliebiges, aber festes $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

(III) $k \rightarrow k+1$:

$$\begin{aligned} y((k+1)+1)_{i,j} &= y(k+2)_{i,j} = \\ &= y(k+1)_{k+1,k+1}y(k+1)_{i,j} - y(k+1)_{k+1,i}y(k+1)_{j,k+1} \stackrel{Y(1) \text{ symmetrisch}}{=} \\ &= y(k+1)_{k+1,k+1}y(k+1)_{i,j} - y(k+1)_{i,k+1}y(k+1)_{k+1,j} \stackrel{(II)}{=} \\ &= \prod_{l=1}^{k-1} \|Y(1)^{\wedge l,l}\|^{2^{k-1-l}} \times \\ &\left\{ \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge k,k} & y(1)_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ y(1)_{k+1,1} & \dots & y(1)_{k+1,k} & y(1)_{k+1,k+1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge k,k} & y(1)_{1,i} \\ \vdots & \vdots \\ y(1)_{j,1} & \dots & y(1)_{j,k} & y(1)_{j,i} \end{vmatrix} - \right. \\ &\left. \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge k,k} & y(1)_{1,i} \\ \vdots & \vdots \\ y(1)_{k+1,1} & \dots & y(1)_{k+1,k} & y(1)_{k+1,i} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge k,k} & y(1)_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ y(1)_{j,1} & \dots & y(1)_{j,k} & y(1)_{j,k+1} \end{vmatrix} \right\} \stackrel{(12)}{=} \\ &= \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge k+1,k+1} & y(1)_{1,i} \\ \vdots & \vdots \\ y(1)_{j,1} & \dots & y(1)_{j,k} & y(1)_{j,i} \end{vmatrix} \|Y(1)^{\wedge k,k}\| \prod_{l=1}^{k-1} \|Y(1)^{\wedge l,l}\|^{2^{k-1-l}} = \\ &= \begin{vmatrix} Y(1)^{\wedge k+1,k+1} & y(1)_{1,i} \\ \vdots & \vdots \\ y(1)_{j,1} & \dots & y(1)_{j,k} & y(1)_{j,i} \end{vmatrix} \prod_{l=1}^k \|Y(1)^{\wedge l,l}\|^{2^{k-1-l}} \end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 1.4.6 *Bezeichne $V_{l,m}$ diejenige Matrix, welche als Linksmultiplikator die Vertauschung der Spalten l und m verursacht. Seien $Y(1) \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$, $q \in$*

$\mathbb{C}, k \in \{3, \dots, n\}$ und $i, j \geq k$, so gelten:

$$y(k)_{i,j} = P_{\underbrace{(0, \dots, 0)_{(k-1) \times 0}, 0, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k) \times 0}}_{(k-1) \times 0, (n-k) \times 0}} (V_{j,k} Y(1) V_{i,k}) P_{\left(\underbrace{2^{k-3}, \dots, 2^0}_{(k-2) \times 2^{k-2} \text{-Spaltenr.}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+2-k) \times 0} \right)} (Y(1)) \quad (16)$$

$$y(k)_{i,j}^q = P_{\underbrace{(0, \dots, 0, q, 0, \dots, 0)_{(k-1) \times 0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-k) \times 0}}_{(k-1) \times 0, (n-k) \times 0}} (V_{j,k} Y(1) V_{i,k}) P_{\left(\underbrace{2^{(k-3) \cdot q}, \dots, 2^{0 \cdot q}}_{(k-2) \times 2^{(k-2) \cdot q} \text{-Spaltenr.}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+2-k) \times 0} \right)} (Y(1)) \quad (17)$$

Und somit gilt insbesondere für $k = i = j$:

$$y(k)_{k,k} = P_{\left(\underbrace{2^{k-3}, \dots, 2^0}_{(k-2) \times 2^{k-2} \text{-Spaltenr.}}, \underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{(n-k) \times 0} \right)} (Y(1)) \quad (18)$$

$$y(k)_{k,k}^q = P_{\left(\underbrace{2^{(k-3) \cdot q}, \dots, 2^{0 \cdot q}}_{(k-2) \times 2^{(k-2) \cdot q} \text{-Spaltenr.}}, \underbrace{0, q, 0, \dots, 0}_{(n-k) \times 0} \right)} (Y(1)) \quad (19)$$

Bew.: (16) \wedge (17) folgt aus (15), wenn man beachtet, daß:

$$\left\| \begin{array}{ccc} & y(1)_{1,i} & \\ Y(1)^{\setminus k-1, k-1} & \vdots & \\ & y(1)_{k,i} & \\ y(1)_{j,1} \dots y(1)_{j,k} & y(1)_{i,j} & \end{array} \right\| = \left\| (V_{j,k} Y(1) V_{i,k})^{\setminus k,k} \right\|$$

Für den Spezialfall $k = i = j$ bleibt nur zu beachten, daß $V_{k,k} = 1_n$ und für die Potenzfunktion gilt: $P_\alpha(Y(1)) P_\beta(Y(1)) = P_{\alpha+\beta}(Y(1)) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

q.e.d.

2 Fourierkoeffizienten von $E_{n,r}(Z, s)$

Sei I eine Indexmenge und $\{M_i \mid i \in I\}$ ein Repräsentantensystem von $C_{n,r} \setminus \Gamma_n$. Dann ist für jedes beliebig fixierte $N \in \Gamma_n$ auch $\{M_i N \mid i \in I\}$ dessen Repräsentantensystem. Daher gilt für beliebig fixiertes $N \in \Gamma_n$ auch:

$$\begin{aligned} E_{n,r}(N < Z >, s) &= \sum_{M \in C_{n,r} \setminus \Gamma_n} \left(\frac{\det(\text{Im}(M < N < Z >))}{\det(\text{Im}((M < N < Z >))[(\begin{smallmatrix} 1_r \\ 0_{n-r,r} \end{smallmatrix}])]} \right)^s = \\ &= \sum_{M \in C_{n,r} \setminus \Gamma_n} \left(\frac{\det(\text{Im}(MN < Z >))}{\det(\text{Im}(\underbrace{(MN < Z >)}_{=M})[(\begin{smallmatrix} 1_r \\ 0_{n-r,r} \end{smallmatrix}])]} \right)^s = \\ &= \sum_{\tilde{M} \in C_{n,r} \setminus \Gamma_n} \left(\frac{\det(\text{Im}(\tilde{M} < Z >))}{\det(\text{Im}((\tilde{M} < Z >))[(\begin{smallmatrix} 1_r \\ 0_{n-r,r} \end{smallmatrix}])]} \right)^s = E_{n,r}(Z, s) \end{aligned}$$

Die Funktion $E_{n,r}(Z, s)$ hat somit die Eigenschaft:

$$E_{n,r}(N < Z >, s) = E_{n,r}(Z, s) \quad (20)$$

und ist insbesondere eine automorphe Form mit Gewicht 0 bzgl. $\Gamma := Sp_n(\mathbb{Z})$. Nun ist $(\begin{smallmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{smallmatrix}) \in \Gamma_n$ für jedes $S \in Sym_n(\mathbb{Z})$, somit ist:

$$E_{n,r}(Z, s) = E_{n,r}(\begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} < Z >, s) = E_{n,r}(Z + S, s).$$

Also gilt

$$(\forall S \in Sym_n(\mathbb{Z})) : E_{n,r}(Z + S, s) = E_{n,r}(Z, s) \quad (21)$$

und die bzgl. jedem $S \in Sym_n(\mathbb{Z})$ periodische Funktion $E_{n,r}(Z, s)$ hat eine Fourierreentwicklung:

$$E_{n,r}(X + iY, s) = \sum_{T \in Sym_n(\mathbb{Z})^*} \alpha_{n,r,s}(T, Y) e^{2i\pi \text{Spur}(TX)}$$

Also gilt für $U \in GL_n(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} E_{n,r}(\underbrace{(X + iY)}_{=:Z}[U], s) &= \sum_{T \in Sym_n(\mathbb{Z})^*} \alpha_{n,r,s}(T, Y[U]) e^{2i\pi \text{Spur}(TX[U])} = \\ &= \sum_{T \in Sym_n(\mathbb{Z})^*} \alpha_{n,r,s}(T, Y[U]) e^{2i\pi \text{Spur}(T[{}^tU]X)} = \end{aligned}$$

$$T \rightarrow \tilde{T} := T[{}^t U] \quad \sum_{\tilde{T} \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} \alpha_{n,r,s}(\tilde{T}[{}^t U^{-1}], Y[U]) e^{2i\pi \text{Spur}(\tilde{T}X)} =$$

$$E_{n,r}(Z[U], s) = E_{n,r}(Z, s) \quad \sum_{\tilde{T} \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} \alpha_{n,r,s}(\tilde{T}, Y) e^{2i\pi \text{Spur}(\tilde{T}X)}$$

Daraus folgt also:

$$\alpha_{n,r,s}(\tilde{T}, Y) = \alpha_{n,r,s}(\tilde{T}[{}^t U^{-1}], Y[U]) \quad (22)$$

Für $\phi_{n,r,s} : \text{Sp}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch:

$$\phi_{n,r,s}(M, Z) := \left(\frac{\det(\text{Im}(M < Z >))}{\det(\text{Im}((M < Z >)) \begin{bmatrix} 1_r \\ 0_{n-r,r} \end{bmatrix})} \right)^s$$

und ein Repräsentantensystem \mathcal{L} von $C_{n,r} \setminus \Gamma_n$ ist

$$E_{n,r}(Z, s) = \sum_{M \in \mathcal{L}} \phi_{n,r,s}(M, Z)$$

Dessen Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha_{n,r,s}(\tilde{T}, Y) &:= \int_{\text{Sym}_n([0,1])} E_{n,r}(x + iY, s) e(TX) dX = \\ &= \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \sum_{M \in \mathcal{L}} \phi_{n,r,s}(M, x + iY) e(TX) dX \end{aligned}$$

sind somit abhängig sowohl von der Funktion $\phi_{n,r,s}(M, Z)$, welche im nächsten Abschnitt genauer untersucht wird, als auch vom (daran anschließend zu betrachtenden) Integral

$$\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \phi_{n,r,s}(M, X + iY) e(TX) dX$$

Anschließend soll die Funktion $E_{n,r}(Z, s)$ bezüglich einer speziellen Unterteilung von \mathcal{L} in $n - r + 1$ aufgespalten werden in Teilfunktionen $E_{n,r,k}(Z, s)$

mit $0 \leq k \leq n - r$, welche selbst in Fourierreihen mit den Koeffizienten $\alpha_{n,r,s}^{(k)}(T, Y)$ entwickelbar sind. Es werden dann folgende Relationen gelten:

$$\alpha_{n,r,s}(T, Y) = \sum_{0 \leq k \leq n-r} \alpha_{n,r,s}^{(k)}(T, Y)$$

Somit werden wir die zwei wesentlichen Aussagen dieses Kapitel bezüglich der Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}(T, Y)$ formulieren können:

Als erstes Satz 2.4.1, nach dem für $n - r \leq r$ die Koeffizienten $\alpha_{n,r,s}(\tilde{T}, Y)$ gleich Null sind für alle Koeffizientenmatrizen \tilde{T} , welche sich nicht mittels einer unimodularen Ähnlichkeitstransformation in den Raum $Sym_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^*$ überführen lassen.

Zum zweiten die Formel (51), nach der für alle Koeffizientenmatrizen T die zur Teilfunktion $E_{n,r,0}(Z, s)$ gehörigen Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}^{(0)}(T, Y)$ berechnet werden; diese sind im Fall $T = 0_n$ Selbergsche Zetafunktionen und sonst Nullfunktionen.

Die Teil-Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}^{(k)}(T, Y)$ für $1 \leq k \leq n - r$ sind bisher nur unzureichend beschrieben. Wir werden im darauf folgenden Kapitel den Wert $\alpha_{n,r,s}^{(n-r)}(T, Y)$ genauer untersuchen, wodurch natürlich der Gesamtkoeffizient $\alpha_{n,n-1,s}(T, Y)$ bereits ermittelt wäre.

2.1 Die Umformung von $\phi_{n,r,s}(M, Z)$

Lemma 2.1.1

$$(\forall M \in Sp_n(\mathbb{R})) : (\forall Z \in \mathbb{H}_n) : \phi_{n,r,s}(M, Z) = \det \left(\text{Im}(M < Z >)^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } \phi_{n,r,s}(M, Z) &= \left(\frac{\det(\text{Im}(M < Z >))}{\det \left(\text{Im}(M < Z >) \begin{bmatrix} 1_{r,r} \\ 0_{n-r,r} \end{bmatrix} \right)} \right)^s \stackrel{\text{Im}(M < Z >) > 0}{=} \\ &= \left(\frac{\det \left(\text{Im}(M < Z >) \begin{bmatrix} 1_{r,r} \\ 0_{n-r,r} \end{bmatrix} \right)}{\det(\text{Im}(M < Z >))} \right)^{-s} \stackrel{(11)}{=} \det \left(\text{Im}(M < Z >)^{-1} \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s}. \end{aligned}$$

q.e.d.

Nun gilt gemäß [10, S.26]:

Lemma 2.1.2

$$(\forall M \in Sp_n(\mathbb{R})) : (\forall X + iY =: Z \in \mathbb{H}_n) : \text{Im}(M < Z >) = Y [(C_M Z + D_M)^{-1}] \quad (24)$$

Korollar 2.1.3

$$(\forall M \in Sp_n(\mathbb{R})) : (\forall Z \in \mathbb{H}_n) : (\text{Im}(M < Z >))^{-1} = Y^{-1} [{}^t \overline{(C_M Z + D_M)}] \quad (25)$$

Bew.: $M \in Sp_n(\mathbb{R}), X + iY =: Z \in \mathbb{H}_n \Rightarrow \text{Im}(M < Z >)$ und Y invertierbar. Und somit gilt auch:

$$(\text{Im}(M < Z >))^{-1} \stackrel{(24)}{=} (Y [(C_M Z + D_M)^{-1}])^{-1} = Y^{-1} [{}^t \overline{(C_M Z + D_M)}]$$

q.e.d.

Satz 2.1.4 : Ist $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ und $X + iY =: Z \in \mathbb{H}_n$, so gilt:

$$\phi_{n,r,s}(M, Z) = \det \left((Y^{-1} [X {}^t C_M + {}^t D_M] + Y [{}^t C_M]) \left[\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } Y^{-1} [{}^t \overline{(C_M Z + D_M)}] &= \\ &= (C_M X + i C_M Y + D_M) Y^{-1} (X {}^t C_M - i Y {}^t C_M + {}^t D_M) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{(C_M XY^{-1} + iC_M + D_M Y^{-1}) (X {}^t C_M - iY {}^t C_M + {}^t D_M)}_{\substack{\text{es gilt} \\ iC_M {}^t D_M - iD_M {}^t C_M + iC_M X {}^t C_M - iC_M XY^{-1} Y {}^t C_M = 0}} = \\
&= Y^{-1} [{}^t (C_M X)] + C_M XY^{-1} {}^t D_M + D_M Y^{-1} X {}^t C_M + Y^{-1} [{}^t D_M] + Y [{}^t C_M] = \\
&= Y^{-1} [X {}^t C_M + {}^t D_M] + Y [{}^t C_M] \\
&\Rightarrow \phi_{n,r,s}(M, Z) \stackrel{(25)}{=} \det \left((Y^{-1} [{}^t (\overline{C_M Z + D_M})]) [{}^{(0_{r,n-r})}_{1_{n-r}}] \right)^{-s} \\
&= \det \left((Y^{-1} [X {}^t C_M + {}^t D_M] + Y [{}^t C_M]) [{}^{(0_{r,n-r})}_{1_{n-r}}] \right)^{-s}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 2.1.5 *Sind $L, M \in Sp_n(\mathbb{R})$, $U \in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{X} \in Sym_n(\mathbb{R})$ und $Z \in \mathbb{H}_n$, so gilt:*

$$\phi_{n,r,s}(ML, Z) = \phi_{n,r,s}(M, L < Z >) \quad (27)$$

$$\phi_{n,r,s} \left(M \begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, Z \right) = \phi_{n,r,s}(M, Z[U]) \quad (28)$$

$$\phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} M, Z \right) = \phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, iIm(M < Z >) \right) \quad (29)$$

$$\phi_{n,r,s} \left(M \begin{pmatrix} 1_n & \mathcal{X} \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, Z \right) = \phi_{n,r,s}(M, Z + \mathcal{X}) \quad (30)$$

Bew.: ad (27)

$$\phi_{n,r,s}(ML, Z) = \left(\frac{\det \left(\overbrace{Im((ML) < Z >)}^{=M < L < Z >} \right)}{\det \left(Im((ML) < Z >) \left[\begin{pmatrix} 1_r \\ 0_{n-r,r} \end{pmatrix} \right] \right)} \right)^s \quad \begin{matrix} L < Z > \equiv W \in \mathbb{H}_n \\ \equiv \end{matrix}$$

$$= \left(\frac{\det(\operatorname{Im}(M \langle W \rangle))}{\det\left(\operatorname{Im}(M \langle W \rangle) \begin{bmatrix} 1_r \\ 0_{n-r,r} \end{bmatrix}\right)} \right)^s = \phi_{n,r,s}(M, W) = \phi_{n,r,s}(M, L \langle Z \rangle).$$

q.e.d.

ad (28):

$$\phi_{n,r,s} \left(M \underbrace{\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}}_{\in Sp_n(\mathbb{R})}, Z \right) \stackrel{(27)}{=} \phi_{n,r,s} \left(M, \underbrace{\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} \langle Z \rangle}_{=Z[U]} \right) =$$

$$= \phi_{n,r,s}(M, Z[U]). \text{ q.e.d.}$$

ad (29):

$$\phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix} M, Z \right) \stackrel{(27)}{=} \phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, \underbrace{M \langle Z \rangle}_{=: Z_M \in \mathbb{H}_n} \right) =$$

$$\stackrel{(26)}{=} \det\left(\left(\operatorname{Im}(Z_M)\right)^{-1} [{}^t(0 \operatorname{Re}(Z_M) + U^{-1})] + \operatorname{Im}(Z_M)[0]_4\right)^{-s} =$$

$$= \det\left(\left(\operatorname{Im}(Z_M)\right)^{-1} [{}^t U^{-1}]_4\right)^{-s} = \det\left(\left(\operatorname{Im}(Z_M)[U]\right)^{-1}_4\right)^{-s} =$$

$$\stackrel{(26)}{=} \phi_{n,r,s} \left(1_{2n}, \underbrace{i \operatorname{Im}(Z_M)}_{=i \operatorname{Im}(M \langle Z \rangle)} [U] \right) = \phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, i \operatorname{Im}(M \langle Z \rangle) \right).$$

q.e.d.

ad (30): Es ist $\begin{pmatrix} 1_n & \mathcal{X} \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{R})$ und es gilt:

$$\phi_{n,r,s} \left(M \begin{pmatrix} 1_n & \mathcal{X} \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, Z \right) \stackrel{(27)}{=} \phi_{n,r,s} \left(M, \underbrace{\begin{pmatrix} 1_n & \mathcal{X} \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \langle Z \rangle}_{=Z+\mathcal{X}} \right) = \phi_{n,r,s}(M, Z + \mathcal{X}).$$

q.e.d.

q.e.d.

Satz 2.1.6 Seien $K \in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r, n+r}}(\mathbb{R})$, $M \in Sp_n(\mathbb{R})$, $N \in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r, r}}(\mathbb{R})$, $R \in Sym_{\swarrow r}^0(\mathbb{R})$ und $Z \in \mathbb{H}_n$. Dann gelten folgende Transformationsregeln:

$$\phi_{n,r,s}(K, Z) = \det((D_K)_4)^{-2s} \phi_{n,r,s}(1_{2n}, Z) \quad (31)$$

$$\phi_{n,r,s}(KM, Z) = \det((D_K)_4)^{-2s} \phi_{n,r,s}(M, Z) \quad (32)$$

$$\phi_{n,r,s}(N, Z + R) = \phi_{n,r,s}(N, Z) \quad (33)$$

$$(\forall P \in \sigma_{n,r}) : \left(\exists L \in Sp_n(\mathbb{R})^{\swarrow 0_{n-r, r}} \right) : \phi_{n,r,s}(P, Z) = \det((C_P)_4)^{-2s} \phi_{n,r,s}(L, Z) \wedge \\ L^{\downarrow n-r} = (0_{n-r, r}, 1_{n-r}, (C_P)_4^{-1} (D_P)_3, (C_P)_4^{-1} (D_P)_4) \quad (34)$$

Bew.: ad (31)

$$\begin{aligned} \text{i) } \phi_{n,r,s}(1_{2n}, Z) &\stackrel{(26)}{=} \det \left((Y^{-1} [X {}^t 0_n + 1_n] + Y [0_n]) \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} = \\ &= \det \left(Y^{-1} \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} = \det((Y^{-1})_4)^{-s}. \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \phi_{n,r,s}(K, Z) &\stackrel{(26)}{=} \det \left((Y^{-1} [X {}^t C_K + {}^t D_K] + Y [{}^t C_K]) \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} = \\ &= \det \left(Y^{-1} \left[X {}^t C_K \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} + {}^t D_K \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right] + Y \left[{}^t C_K \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right] \right)^{-s} = \\ &\stackrel{{}^t C_K \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} = 0_{n, n-r}}{=} \det \left(Y^{-1} \left[{}^t D_K \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right] \right)^{-s} = \\ &\stackrel{{}^t D_K \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0_{r, n-r}) \\ {}^t (D_K)_4 \end{bmatrix}}{=} \det \left((D_K)_4 (Y^{-1})_4 {}^t (D_K)_4 \right)^{-s} = \\ &= \det((D_K)_4)^{-s} \det((Y^{-1})_4)^{-s} \det({}^t (D_K)_4)^{-s} = \\ &= \det((D_K)_4)^{-2s} \det((Y^{-1})_4)^{-s} \end{aligned}$$

$\stackrel{\text{i) \wedge ii)}}{\Rightarrow}$ Beh.

ad (32)

$$\begin{aligned} \phi_{n,r,s}(KM, Z) &\stackrel{(27)}{=} \phi_{n,r,s} \left(K, \underbrace{M < Z >}_{=: W \in \mathbb{H}_n} \right) \stackrel{(31)}{=} \\ &= \det((D_K)_4)^{-2s} \phi_{n,r,s}(1_{2n}, M < Z >) \stackrel{(27)}{=} \underbrace{\det((D_K)_4)^{-2s}}_{=1 \forall K \in C_{n,r}} \phi_{n,r,s}(M, Z). \end{aligned}$$

q.e.d.

ad (33)

$$\phi_{n,r,s}(N, Z + R) = \phi_{n,r,s}(N \begin{pmatrix} 1_n & R \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, Z) = \phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} A_N & \mathcal{B}_N \\ C_N & \mathcal{D}_N \end{pmatrix}, Z \right)$$

mit $A_N R + B_N =: \mathcal{B}_N$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_N &:= \underbrace{\begin{pmatrix} (C_N)_1 & (C_N)_2 \\ 0_{n-r,r} & (C_N)_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} + D_N}_{= \begin{pmatrix} (D_N)_1 + (C_N)_1 R_1 & (D_N)_2 \\ (D_N)_3 & (D_N)_4 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{n,r,s}(N, Z + R) &= \phi_{n,r,s} \left(\begin{pmatrix} A_N & \mathcal{B}_N \\ C_N & \mathcal{D}_N \end{pmatrix}, Z \right) = \\ &\stackrel{(26)}{=} \det \left((Y^{-1} [X {}^t C_N + {}^t \mathcal{D}_N] + Y [{}^t C_N]) \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right)^{-s} = \\ &= \det \left(Y^{-1} \left[X {}^t C_N \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} + {}^t \mathcal{D}_N \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] + Y \left[{}^t C_N \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} = \\ &\stackrel{{}^t \mathcal{D}_N \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} = {}^t D_N \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \wedge (26)}{=} \phi_{n,r,s}(N, Z). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

ad (34)

Wegen $P \in \sigma_{n,r}$ ist $(C_P)_4 \in GL_{n-r}(\mathbb{R})$ und daher auch

$$F = \begin{pmatrix} 1_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & (C_P)_4 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$$

Somit haben wir $\mathcal{P} := \begin{pmatrix} {}^t F & 0_n \\ 0_n & F^{-1} \end{pmatrix}$, $L := \mathcal{P}P \in Sp_n(\mathbb{R})$ und $\mathcal{P}^{-1} \in Sp_n^{\sphericalangle 0_{n-r}, n+r}(\mathbb{R})$.

Es gilt also:

$$\phi_{n,r,s}(P, Z) = \phi_{n,r,s} \left(\mathcal{P}^{-1} \underbrace{\mathcal{P}P}_{=L}, Z \right) \stackrel{(32)}{=} \det \left(\underbrace{(D_{\mathcal{P}^{-1}})_4}_{=(C_P)_4} \right)^{-2s} \phi_{n,r,s}(L, Z)$$

Aus:

$$\begin{aligned} L^{\downarrow n-r} &= \mathcal{P}^{\downarrow n-r} P = \\ &= (0_{n-r, n+r}, ((C_P)_4)^{-1}) P = (C_P)_4^{-1} (0_{n-r, r}, (C_P)_4, (D_P)_3, (D_P)_4) = \\ &= (0_{n-r, r}, 1_{n-r}, (C_P)_4^{-1} (D_P)_3, (C_P)_4^{-1} (D_P)_4) \end{aligned}$$

folgt sofort die Behauptung.

q.e.d.

2.2 Transformationsformeln des Integrals über $\phi_{n,r,s}(M, Z)$

In diesem Abschnitt seien jeweils $U \in GL_n(\mathbb{Z})$, $T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*$ und $Y \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$ beliebig vorgegeben.

Definition 2.2.1 Für $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ und den Integrationsbereich $\mathcal{B} \subset \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ definiere man:

$$\delta_{\setminus 0_r}(T) := \begin{cases} 0 & : T \notin \text{Sym}_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^* \\ 1 & : T \in \text{Sym}_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{Z})^* \end{cases} \quad (35)$$

$$I_{\mathcal{B}}(M, T, Y) := \int_{\mathcal{B}} \phi_{n,r,s}(M, X + iY) e(TX) dX \quad (36)$$

Wir definieren rein formal für festes $\mathcal{M} \subset Sp_n(\mathbb{R})$ eine im allgemeinen nicht-konvergierende Reihe:

$$\Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z) := \sum_{M \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}(M, Z) \quad (37)$$

Anmerkung 2.2.2 Sei nun $\mathcal{M} \subset Sp_n(\mathbb{R})$ geeignet gewählt, so daß $\Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z)$ eine absolut konvergente und wohldefinierte Funktion von \mathbb{H}_n auf \mathbb{C} bildet, welche als Funktion des Realteils von $Z = X + iY$ periodisch bezüglich $\text{Sym}_n(\mathbb{Z})$ ist.

Dann hat $\Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z)$ eine Fourierreiheentwicklung mit den Koeffizienten:

$$b_{n,r,s;\mathcal{M}}(T, Y) := \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(X + iY) e(TX) dX \quad (38)$$

Lemma 2.2.3 Für $N \in Sp_n^{\setminus 0_{n-r,r}}(\mathbb{R})$ gilt:

$$I_{\text{Sym}_n([0,1])}(N, T, Y) = \delta_{\setminus 0_r}(T) I_{\text{Sym}_n^{\setminus 0_r}([0,1])}(N, T, Y) \quad (39)$$

$$\begin{aligned}
\text{Bew.: } I_{Sym_n([0,1])}(N, T, Y) &= \int_{Sym_n([0,1])} \phi_{n,r,s}(N, X + iY) e(TX) dX \stackrel{(33)}{=} \\
&= \int_{Sym_n([0,1])} \phi_{n,r,s} \left(N, \begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ tX_2 & X_4 \end{pmatrix} + iY \right) e \left(\underbrace{\begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ tT_2 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ tX_2 & X_4 \end{pmatrix}}_{=e(T_1 X_1) e \left(\begin{pmatrix} 0_r & T_2 \\ tT_2 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ tX_2 & X_4 \end{pmatrix} \right)} \right) d \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ tX_2 & X_4 \end{pmatrix} = \\
&= \underbrace{\int_{Sym_r([0,1])} e(T_1 X_1) dX_1}_{=\delta_{\setminus 0_r}(T)} \times \\
&\times \int_{Sym_{n-r}([0,1])} \int_{[0,1]^{r \times (n-r)}} \phi_{n,r,s} \left(N, \begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ tX_2 & X_4 \end{pmatrix} + iY \right) e \left(\begin{pmatrix} 0_r & T_2 \\ tT_2 & T_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ tX_2 & X_4 \end{pmatrix} \right) dX_2 dX_4 = \\
&= \delta_{\setminus 0_r}(T) I_{Sym_n \frown 0_r([0,1])}(N, T, Y).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 2.2.4 Für $S \in Sym_n(\mathbb{Z})$ und $N \in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{R})$ gilt:

$$I_{Sym_n([0,1])} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, T, Y \right) = \delta_{\setminus 0_r}(T) I_{Sym_n \frown 0_r([0,1]) + \begin{pmatrix} 0_r & S_2 \\ tS_2 & S_4 \end{pmatrix}}(N, T, Y) \quad (40)$$

Bew.: Es gilt $C_N = C_{N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}}$, also auch $N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
I_{Sym_n([0,1])} \left(\underbrace{N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}}_{\in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{R})}, T, Y \right) &\stackrel{(39)}{=} \delta_{\setminus 0_r}(T) I_{Sym_n \frown 0_r([0,1])} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, T, U \right) = \\
&= \delta_{\setminus 0_r}(T) \int_{Sym_n \frown 0_r([0,1])} \phi_{n,r,s} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, X + iY \right) e(TX) dX = \\
&= \delta_{\setminus 0_r}(T) \int_{Sym_n \frown 0_r([0,1])} \phi_{n,r,s} (N, X + S + iY) e(TX) dX = \\
&\stackrel{(33)}{=} \delta_{\setminus 0_r}(T) \int_{Sym_n \frown 0_r([0,1])} \phi_{n,r,s} \left(N, X + \begin{pmatrix} 0_r & S_2 \\ tS_2 & S_4 \end{pmatrix} + iY \right) e(TX) dX =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{\setminus 0_r}(T) \int_{\text{Sym}_n^{\setminus 0_r}([0,1]) + \binom{0_r \ S_2}{tS_2 \ S_4}} \phi_{n,r,s}(N, X + iY) \underbrace{e\left(T\left(X - \begin{pmatrix} 0_r \ S_2 \\ tS_2 \ S_4 \end{pmatrix}\right)\right)}_{=e(TX)e\left(T\begin{pmatrix} 0_r \ S_2 \\ tS_2 \ S_4 \end{pmatrix}\right)=e(TX)} dX = \\
&= \delta_{\setminus 0_r}(T) I_{\text{Sym}_n^{\setminus 0_r}([0,1]) + \binom{0_r \ S_2}{tS_2 \ S_4}}(N, T, Y).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Bei den folgenden Beweisen, wird mittels (*) darauf verwiesen, daß

$$\int_{\mathcal{F}_1} p(X + iY)e(TX)dX = \int_{\mathcal{F}_2} p(X + iY)e(TX)dX$$

gilt für die periodische Funktion p auf ihren Fundamentalbereichen \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 .

Lemma 2.2.5 $\mathcal{M} \subset Sp_n(\mathbb{R})$ erfülle die Rahmenbedingungen zu (38). Dann gilt für $T[{}^tU^{-1}] \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*$:

$$\sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(M \begin{pmatrix} {}^tU \ 0_n \\ 0_n \ U^{-1} \end{pmatrix}, T, Y \right) = \sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tU^{-1}], Y[U]) \quad (41)$$

Bew.: Wir zeigen zuerst, daß $\sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tU^{-1}], Y[U])$ wohldefiniert ist:

$$\begin{aligned}
b_{n,r,s,\mathcal{M}}(T[{}^tU^{-1}], Y[U]) &= \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(X + iY[U]) e(T[{}^tU^{-1}]X) dX = \\
&= \sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tU^{-1}], Y[U]).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Nun gilt: } \sum_{M \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tU^{-1}], Y[U]) = \\
&= \sum_{M \in \mathcal{M}} \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \phi_{n,r,s}(M, X + iY[U]) \underbrace{e(T[{}^tU^{-1}]X)}_{=e(TX[U^{-1}])} dX = \\
&= \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \sum_{M \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}(M, X + iY[U]) e(TX[U^{-1}]) dX =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{(Sym_n([0,1]))[U]} \underbrace{\sum_{M \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}(M, X[U] + iY[U]) e(TX)}_{=\Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z[U])} dX = \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_{Sym_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z[U]) e(TX) dX = \\
&= \int_{Sym_n([0,1])} \sum_{M \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}(M, Z[U]) e(TX) dX = \\
&= \int_{Sym_n([0,1])} \sum_{M \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}\left(M \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, Z\right) e(TX) dX = \\
&= \sum_{M \in \mathcal{M}} \int_{Sym_n([0,1])} \phi_{n,r,s}\left(M \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, Z\right) e(TX) dX = \\
&= \sum_{M \in \mathcal{M}} I_{Sym_n([0,1])}\left(M \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, T, Y\right)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 2.2.6 Sei $X + iY =: Z \in \mathbb{H}_n$ und für $\mathcal{M} \subset Sp_n(\mathbb{R})$ konvergiere die in (37) definierte Funktion $\Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z)$ absolut gleichmäßig. Zudem gelte, daß auch folgende Reihe absolut gleichmäßig konvergent sei:

$$\sum_{S \in Sym_n^{\leq 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{Sym_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z[U] + S) e(TX) dX \right)$$

Dann ist:

$$\begin{aligned}
&\sum_{S \in Sym_n^{\leq 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{N \in \mathcal{M}} I_{Sym_n([0,1])}\left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, T, Y\right) \\
&= \delta_{\leq 0r}(T[{}^tU^{-1}]) \sum_{N \in \mathcal{M}} I_{Sym_n^{\leq 0r}(\mathbb{R})}(N, T[{}^tU^{-1}], Y[U]) \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\text{Bew.:} \text{ Zum einen ist: } \sum_{S \in Sym_n^{\leq 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{Sym_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z[U] + S) e(TX) dX \right) =$$

$$= \sum_{S \in Sym_n^{\leq 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{Sym_n([0,1])} \sum_{N \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}(N, Z[U] + S) e(TX) dX \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{N \in \mathcal{M}} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \phi_{n,r,s}(N, Z[U] + S) e(TX) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{N \in \mathcal{M}} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \phi_{n,r,s} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, Z \right) e(TX) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{N \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, T, Y \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Zum anderen gilt: } \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}(Z[U] + S) e(TX) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}((X[U] + S) + iY[U]) e(TX) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{(\text{Sym}_n([0,1]))[U]} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}((X + S) + iY[U]) \underbrace{e(TX[U^{-1}])}_{e(T[{}^tU^{-1}]X)} dX \right) = \\
&\stackrel{(*)}{=} \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}}((X + S) + iY[U]) e(T[{}^tU^{-1}]X) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \sum_{N \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s}(N, (X + S) + iY[U]) e(T[{}^tU^{-1}]X) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \sum_{N \in \mathcal{M}} \phi_{n,r,s} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, X + iY[U] \right) e(T[{}^tU^{-1}]X) dX \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{N \in \mathcal{M}} I_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}, Y[U], T[{}^tU^{-1}] \right) = \\
&= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \delta_{\searrow 0r}(T[{}^tU^{-1}]) I_{\text{Sym}_n^{\searrow 0r}([0,1]) + S} I(N, Y[U], T[{}^tU^{-1}]) = \\
&= \delta_{\searrow 0r}(T[{}^tU^{-1}]) I_{\text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} I(N, Y[U], T[{}^tU^{-1}])
\end{aligned}$$

q.e.d.

2.3 Das Repräsentantensystem \mathcal{L} von $C_{n,r} \setminus \Gamma_n$

Definition 2.3.1 $GL_{n-r}(\mathbb{Z})$ operiere mittels Linksmultiplikation auf $M_{n-r,n}(\mathbb{Z})$ und es sei \mathcal{C} ein vollständiges Repräsentantensystem von $GL_{n-r}(\mathbb{Z}) \setminus M_{n-r,n}(\mathbb{Z})$. Für ein fixiertes $C^{\downarrow n-r} \in \mathcal{C}$ definiere man:

$$\mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}} := \{C_{n,r}L \in C_{n,r} \setminus \Gamma_n \mid (\exists N \in C_{n,r}) : C_{NL}^{\downarrow n-r} = C^{\downarrow n-r}\}$$

Somit ist $\mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}$ ein System von disjunkten Nebenklassen aus $C_{n,r} \setminus \Gamma_n$. Offensichtlich ist $\bigcup_{C^{\downarrow n-r} \in \mathcal{C}} \mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}} = C_{n,r} \setminus \Gamma_n$.

Lemma 2.3.2 Sei $C^{\downarrow n-r} \in \mathcal{C}$ beliebig fixiert. Dann erfüllt die Menge der Repräsentanten aus $\mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}$ die zur Formel (38) notwendigen Voraussetzungen.

Bew.: Die Konvergenzbedingungen sind bereits für $E_{n,r}(Z, s)$ erfüllt, und somit auch für deren Teilreihe $\Phi_{n,r,s;\mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}}(Z)$. Man muß also nur die Periodizität belegen.

Mittels der Transformationseigenschaft (30) der zugrundeliegenden Funktion $\phi_{n,r,s}(M, Z)$ kann man die Periodizität von $\Phi_{n,r,s;\mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}}(Z)$ bereits erreichen, wenn zu jedem Paar inkongruenter Elemente $N, \tilde{M} \in \mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}$ für beliebiges $S \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})$ sowohl $N \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} := \tilde{N}$, $\tilde{M} \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} := \tilde{\tilde{M}} \in \mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}$ als auch \tilde{N} inkongruent zu $\tilde{\tilde{M}}$ ist. Die erste Bedingung ist trivial weil

$$C_{\tilde{N}}^{\downarrow n-r} = C_N^{\downarrow n-r} = C_M^{\downarrow n-r} = C_{\tilde{M}}^{\downarrow n-r}$$

Die zweite Bedingung ergibt sich wie folgt.

$$(C_N^{\downarrow n-r} = C_M^{\downarrow n-r}) \Rightarrow (\exists g \in GL_{n-r}(\mathbb{Z})) : D_N^{\downarrow n-r} = gD_M^{\downarrow n-r}$$

$$\text{Nun gilt aber: } D_{\tilde{N}}^{\downarrow n-r} = C_N^{\downarrow n-r}S + D_N^{\downarrow n-r} \text{ und } D_{\tilde{M}}^{\downarrow n-r} = \underbrace{C_M^{\downarrow n-r}}_{=C_N^{\downarrow n-r}}S + D_M^{\downarrow n-r}$$

Annahme: Es gäbe $g \in GL_n(\mathbb{Z})$ mit $\tilde{N} = g\tilde{M}$.

$$C_{\tilde{N}}^{\downarrow n-r} = C_M^{\downarrow n-r} \Rightarrow \tilde{M} = 1_{n-r} \quad D_{\tilde{N}}^{\downarrow n-r} = D_M^{\downarrow n-r} \Rightarrow C_N^{\downarrow n-r}S + D_M^{\downarrow n-r} = \underbrace{C_M^{\downarrow n-r}}_{=C_N^{\downarrow n-r}}S + D_N^{\downarrow n-r}$$

$$\Rightarrow D_M^{\downarrow n-r} = D_N^{\downarrow n-r}. \text{ Widerspruch zu } (\exists g \in GL_{n-r}(\mathbb{Z})) : D_N^{\downarrow n-r} = gD_M^{\downarrow n-r}$$

Also sind auch \tilde{N} und $\tilde{\tilde{M}}$ inkongruent. **q.e.d.**

Damit wäre aber die Voraussetzung zur Formel (38) auch bezüglich jedem $\mathcal{M} := \bigcup_{C^{\downarrow n-r} \in \tilde{\mathcal{C}}} \mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}$ mit $\tilde{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ gegeben.

Wenn wir folgende Mengen zusammenfassen:

$$\mathcal{M}_k = \bigcup_{\substack{C^{\downarrow n-r} \in \mathcal{C} \\ Rg(C^{\downarrow n-r})=k}} \mathcal{L}_{C^{\downarrow n-r}}$$

Dann lassen sie sich wegen der Invarianz des Ranges unter der Operation von $GL_{n-r}(\mathbb{Z})$ auf $M_{n-r,n}(\mathbb{Z})$ auch einfacher schreiben als:

$$\mathcal{M}_k = \{M \in C_{n,r} \setminus \Gamma_n \mid Rg(C_M^{\downarrow n-r}) = k\} \quad (43)$$

Offensichtlich ist

$$\bigcup_{k=0}^{n-r} \mathcal{M}_k$$

eine disjunkte Vereinigung zu einem vollständigen Repräsentantensystem von $C_{n,r} \setminus \Gamma_n$.

Definition 2.3.3 *Man definiere für $0 \leq k \leq n - r$ die periodischen Funktionen*

$$E_{n,r,k} : \mathbb{H}_n \times \{s \in \mathbb{C} \mid Re(s) \gg 0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

durch

$$E_{n,r,k}(Z, s) := \sum_{M \in \mathcal{M}_k} \phi_{n,r,s}(M, Z) = \Phi_{n,r,s;\mathcal{M}_k}(Z)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\alpha^{(k)}(T) = \int_{X \in Sym_n([0,1])} E_{n,r,k}(X + iY, s) e(TX) dX \quad (44)$$

Falls die festen Werte von n, r, s und Y zweideutig erscheinen sollten, so kann man statt $\alpha^{(k)}(T)$ auch die vollständige Form $\alpha_{n,r,s}^{(k)}(T, Y)$ oder eine sinnvolle Verkürzung wie $\alpha^{(k)}(T, Y)$ schreiben.

Die Fourierentwicklung lautet nun:

$$E_{n,r,k}(X + iY, s) = \sum_{T \in Sym_n(\mathbb{Z})^*} \alpha^{(k)}(T) e^{2\pi i \text{Spur}(TX)} \quad (45)$$

Anmerkung 2.3.4 Die Funktionen $E_{n,r,k}(Z, s)$ sind offenbar Teilreihen von $E_{n,r}(Z, s)$ mit der Eigenschaft:

$$E_{n,r}(Z, s) = \sum_{k=0}^{n-r} E_{n,r,k}(Z, s) \quad (46)$$

und

$$\alpha(T) = \sum_{k=0}^{n-r} \alpha^{(k)}(T) \quad (47)$$

für die Fourierkoeffizienten $\alpha(T) := a_{n,r,s}(T, Y)$ von $E_{n,r}$.

Lemma 2.3.5 Für alle $k \in \{0, \dots, n-r\}$, $Y \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$, $V \in GL_n(\mathbb{Z})$ und $T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*$ gilt:

$$a_{n,r,s}^{(k)}(T, Y[V]) = a_{n,r,s}^{(k)}(T[{}^tV], Y) \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } a_{n,r,s}^{(k)}(T, Y[V]) &= \sum_{M \in \mathcal{M}_k} \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \phi_{n,r,s}(M, X + iY[V]) e(TX) dX \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_k} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T, Y[V]) = \sum_{M \in \mathcal{M}_k} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tV {}^tV^{-1}], Y[V]) \\ &\stackrel{(41)}{=} \sum_{M \in \mathcal{M}_k} I_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(M \begin{pmatrix} {}^tV & 0_n \\ 0_n & V^{-1} \end{pmatrix}, T[{}^tV], Y \right) \\ &= \sum_{M \begin{pmatrix} {}^tV & 0_n \\ 0_n & V^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tV], Y) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_k} I_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(M \begin{pmatrix} {}^tV^{-1} & 0_n \\ 0_n & V \end{pmatrix}, T[{}^tV], Y \right) \\ &= \sum_{M \in \mathcal{M}_k} I_{\text{Sym}_n([0,1])}(M, T[{}^tV], Y) = a_{n,r,s}^{(k)}(T[{}^tV], Y) \end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 2.3.6 Sind $k \in \{0, \dots, n-r\}$ und $V \in GL_n(\mathbb{Z})$, so gilt für alle $X \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$:

$$E_{n,r,k}(X + iY[V], s) = E_{n,r,k}(X[V^{-1}] + iY, s) \quad (49)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Bew:} \quad E_{n,r,k}(X + iY [V], s) &= \sum_{T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} a_{n,r,s}^{(k)}(T, Y [V]) e^{2\pi i \text{Spur}(TX)} = \\
&\stackrel{(48)}{=} \sum_{T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} a_{n,r,s}^{(k)}(T [{}^tV], Y) e^{2\pi i \text{Spur}(TX)} = \\
&= \sum_{T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} a_{n,r,s}^{(k)}(T [{}^tV], Y) e^{2\pi i \text{Spur}(T(X[V^{-1}][V]))} = \\
&= \sum_{T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} a_{n,r,s}^{(k)}(T [{}^tV], Y) e^{2\pi i \text{Spur}((T[{}^tV])(X[V^{-1}]))} = \\
&= \sum_{T[{}^tV] \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} a_{n,r,s}^{(k)}(T [{}^tV], Y) e^{2\pi i \text{Spur}((T[{}^tV])(X[V^{-1}]))} = E_{n,r,k}(X [V^{-1}] + iY, s).
\end{aligned}$$

q.e.d.

2.4 Verschwindungssatz für Fourierkoeffizienten

Satz 2.4.1 Sei $Y \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$ beliebig, aber $T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*$ so gewählt, daß $T[{}^tU^{-1}] \notin \text{Sym}_n^{\setminus 0r}(\mathbb{Z})^*$ für alle $U \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Dann erhält man:

$$\alpha_{n,r,s}(T, Y) = 0 \quad (50)$$

Bew.: Für jedes feste C operiert $\begin{pmatrix} 1_n & \text{Sym}_n(\mathbb{Z}) \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix}$ auf \mathcal{L}_C . Die Teilreihe

$$\mathcal{E}_C(Z) := \sum_{C_{n,r}M \in \mathcal{L}_C} \phi_{n,r,s}(M, Z)$$

ist demnach periodisch und hat also eine Fourierreihe

$$\mathcal{E}_C(Z) = \sum_{T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*} \alpha_C(T, Y) e(TX)$$

Andererseits gibt es zu jedem solchen C ein $U_C = U \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ mit

$$CU = \tilde{C} \quad \text{mit} \quad \tilde{C}^{\downarrow n-r} = (0_{n-r,r}, \underbrace{c}_{\in M_{n-r}(\mathbb{Z})})$$

Es gilt dann sowohl

$$\mathcal{L}_C = \mathcal{L}_{\tilde{C}} \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}$$

als auch

$$\mathcal{E}_C(Z) = \mathcal{E}_{\tilde{C}}(Z[U])$$

Für die Fourierkoeffizienten impliziert dies, daß

$$\alpha_C(T, Y) = \alpha_{\tilde{C}}(T, Y[U]) = \alpha_{\tilde{C}}(T[{}^tU^{-1}], Y)$$

Die $\alpha_{\tilde{C}}(T[{}^tU^{-1}], Y)$ sind gemäß (42) gleich Null, falls $T[{}^tU^{-1}] \notin \text{Sym}_n^{\setminus 0r}(\mathbb{Z})^*$. Da die in Frage stehenden Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}(T, Y)$ sich schreiben lassen als Summe über die $\alpha_C(T, Y)$ und damit auch über die $\alpha_{\tilde{C}}(T[{}^tU^{-1}], Y)$, ergibt sich sofort die Behauptung.

q.e.d.

Korollar 2.4.2 Für $n - r \leq r$, $T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*$ und $Y \in \text{Pos}_n(\mathbb{R})$ sei $\alpha_{n,r,s}(T, Y) \neq 0$. Dann gibt es ein $U \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$ mit $\alpha_{n,r,s}(T, Y) = \alpha_{n,r,s}(T[U], Y[{}^tU^{-1}])$ und $T[U]$ von der Form (6).

Bew.: Aufgrund des vorherigen Satzes existiert für solche $T \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})^*$ mit $\alpha_{n,r,s}(T, Y) \neq 0$ auch ein $V \in GL_n(\mathbb{Z})$, so daß $T[V] \in \text{Sym}_n^{\nwarrow 0_r}(\mathbb{Z})^*$. Für dieses gibt es gemäß Abschnitt 1.3 ein $W \in GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$ mit: $T[V][W] = T[VW]$ hat die Form (6).

Nun setze man $U := VW \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$. Nach der Anwendung von (22) haben wir $\alpha_{n,r,s}(T, Y) = \alpha_{n,r,s}(T[U], Y[{}^tU^{-1}])$.

q.e.d.

Anmerkung 2.4.3 Man kann o.B.d.A. von der Transformation $Y \rightarrow Y[{}^tU^{-1}]$ absehen und sich gleich auf die Fourierkoeffizienten \tilde{T} mit der Form (6) beschränken.

2.5 Die Fourierentwicklung von $E_{n,r,0}(Z, s)$

Satz 2.5.1 *Es gilt:*

$$\alpha^{(0)}(T) = \begin{cases} 0 & : T \neq 0_n \\ \sum_{M \in \mathcal{L}_0} \det \left(Y^{-1} \begin{bmatrix} {}^t D_M(0_{r,n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} & : T = 0_n \end{cases} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } \alpha^{(0)}(T) &= \int_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(\sum_{M \in \mathcal{L}_0} \phi_{n,r,s}(M, Z) \right) e(TX) dX \stackrel{(26)}{=} \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}_0} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \det \left((Y^{-1} [X {}^t C_M + {}^t D_M] + Y [{}^t C_M]) \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} e(TX) dX \right) = \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}_0} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \det \left(Y^{-1} [X {}^t C_M + {}^t D_M] \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} + Y [0^{n \times n-r}] \right)^{-s} e(TX) dX \right) = \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}_0} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \det \left(Y^{-1} \begin{bmatrix} X 0_{n,n-r} + {}^t D_M(0_{r,n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} e(TX) dX \right) = \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}_0} \left(\int_{\text{Sym}_n([0,1])} \det \left(Y^{-1} \begin{bmatrix} {}^t D_M(0_{r,n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} e(TX) dX \right) = \\ &= \sum_{M \in \mathcal{L}_0} \det \left(Y^{-1} \begin{bmatrix} {}^t D_M(0_{r,n-r}) \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} \underbrace{\int_{\text{Sym}_n([0,1])} e(TX) dX}_{= \begin{cases} 0 & : T \neq 0_n \\ 1 & : T = 0_n \end{cases}} \end{aligned}$$

q.e.d.

Anmerkung 2.5.2 $\alpha^{(0)}(T) \neq 0$ ist eine Selbergsche Zetafunktion, wie man sie z.B. unter [23] finden kann. Für $r = n - 1$ ist sie im Prinzip sogar eine Epsteinsche Zetafunktion:

$$\begin{aligned} a_{n,n-1,s}^{(0)}(0_n, Y) &= \sum_{D \in GL_1(\mathbb{Z}) \setminus \{D \in \mathbb{Z}^{n \times 1} \mid D \text{ primitiv}\}} \det(Y^{-1} [D])^{-s} \stackrel{1 = \frac{1}{\zeta(2s)} \sum_{m \in \mathbb{N}} m^{-2s}}{=} \\ &= \frac{1}{\zeta(2s)} \sum_{m \in \mathbb{N}} m^{-2s} \sum_{D \in GL_1(\mathbb{Z}) \setminus \{D \in \mathbb{Z}^n \mid D \text{ primitiv}\}} (Y^{-1} [Dm])^{-s} = \frac{1}{2\zeta(2s)} \sum_{D \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0_{n,1}\}} (Y^{-1} [D])^{-s}. \end{aligned}$$

3 Die Fourierentwicklung von $E_{n,r,n-r}(Z, s)$

Wenn wir bei den in (43) dargestellten Unterrepräsentantensystemen von $C_{n,r} \backslash \Gamma_n$ den Fall $k = n - r$ betrachten, so kann man auf folgende Darstellung aus [13, S.100] zurückgreifen:

$$\bigcup_{N \in \Gamma_n \text{ mit } \text{Rang}(C_N^{\downarrow n-r}) = n-r} C_{n,r} N = \bigcup C_{n,r} M \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}$$

wobei M über ein Repräsentantensystem aus $\sigma_{n,r}/\approx$ sowie S über $\text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})$ als auch ${}^t U$ über des Repräsentantensystem von $GL_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z}) \backslash GL_n(\mathbb{Z})$ läuft.

Deswegen gilt: $E_{n,r,n-r}(Z, s) =$

$$= \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{M \in \sigma_{n,r}/\approx} \sum_{{}^t U \in GL_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z}) \backslash GL_n(\mathbb{Z})} \phi_{n,r,s} \left(M \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, Z \right)$$

und damit gilt wegen (44):

$$\alpha^{(n-r)}(T) = \int_{\text{Sym}_n([0,1])} e(TX) \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{M \in \sigma_{n,r}/\approx} \times \\ \times \sum_{{}^t U \in GL_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z}) \backslash GL_n(\mathbb{Z})} \phi_{n,r,s} \left(M \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, Z \right) dX$$

was gleichbedeutend ist mit:

$$\alpha^{(n-r)}(T) = \sum_{S \in \text{Sym}_n^{\searrow 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{M \in \sigma_{n,r}/\approx} \sum_{{}^t U \in GL_n^{\swarrow 0n-r,r}(\mathbb{Z}) \backslash GL_n(\mathbb{Z})} \times \\ \times I_{\text{Sym}_n([0,1])} \left(M \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t U & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, T, Y \right) \quad (52)$$

Wir wissen aus Korollar 2.4.2, daß bei $n - r \leq r$ nur die Koeffizienten T von der Form (6) betrachtet werden müssen.

Im restlichen Teil dieser Arbeit gehen wir nun von

$$n - r \leq r$$

aus und somit soll T auch mit dieser Form vorausgesetzt werden. Wir erinnern an das in Definition 1.3.4 erläuterte $\mathcal{N}(T)$ und formulieren den folgenden Satz, welcher sich letztendlich auf alle zu betrachtenden T auswirkt.

Satz 3.0.3 Sei T von der Form (6). Dann gilt:

$$\alpha^{(n-r)}(T) = \sum_{\substack{M \in \\ \sigma_{n,r}/\approx}} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{Sym_n^{\wedge 0r}(\mathbb{R})}(M, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) \quad (53)$$

Bew: Es gilt: $(\forall V \in GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})) : V^{-1} \in GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$.

Somit folgt für das Repräsentantensystem $\{U_i \mid i \in I\}$ von $GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z}) \setminus GL_n(\mathbb{Z})$ bzgl. der Indexmenge I , daß $\{U_i^{-1} \mid i \in I\}$ auch ein Repräsentantensystem ist von:

$$\begin{aligned} & GL_n(\mathbb{Z}) / GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z}) \\ \alpha^{(n-r)}(T) & \stackrel{(44)}{=} \int_{Sym_n([0,1])} E_{n,r,n-r} \left(\underbrace{X + iY}_{=Z}, s \right) e(TX) dX \stackrel{(52)}{=} \\ & = \sum_{S \in Sym_n^{\wedge 0r}(\mathbb{Z})} \sum_{M \in \sigma_{n,r}/\approx} \sum_{{}^tU \in GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z}) \setminus GL_n(\mathbb{Z})} \times \\ & \times I_{Sym_n([0,1])} \left(M \begin{pmatrix} 1_n & S \\ 0_n & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^tU & 0_n \\ 0_n & U^{-1} \end{pmatrix}, T, Y \right) = \\ & \stackrel{(42) \wedge W := {}^tU^{-1}}{=} \sum_{\substack{M \in \\ \sigma_{n,r}/\approx}} \sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z}) / GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} \delta_{\setminus 0r}(T) I_{Sym_n^{\wedge 0r}(\mathbb{R})}(M, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) \\ & \stackrel{(10)}{=} \sum_{\substack{M \in \\ \sigma_{n,r}/\approx}} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{Sym_n^{\wedge 0r}(\mathbb{R})}(M, T[W], Y[{}^tW^{-1}]). \end{aligned}$$

q.e.d.

Auf Grundlage des im nächsten Abschnitt eingeführten speziellen Repräsentantensystems von $\sigma_{n,r}/\approx$ verbessern wir die Aussage des vorherigen Satzes im übernächsten Abschnitt zu:

$$\begin{aligned} \alpha^{(n-r)}(T) & = \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} \underbrace{I_{Sym_n^{\wedge 0r}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}])}_{\mathcal{A}(T, W)} \\ & = \int_{Sym_n^{\wedge 0r}(\mathbb{R})} \det \left((Y^{-1}[WX] + Y[{}^tW^{-1}]) \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right)^{-s} e(T[W]X) dX \end{aligned}$$

wobei in $I_{Sym_n \setminus 0_r(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}])$, dem sogenannten archimedischen Teil, im Gegensatz zum sogenannten arithmetischen Teil $\mathcal{A}(T, W)$ die Abhängigkeit von den Repräsentanten aus $\sigma_{n,r}/\approx$ entfällt.

Darauf aufbauend erhalten wir zum Abschluß dieses Kapitels für $r \geq n - r$ eine verbesserte Darstellung sowohl des Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}^{n-r}(0_n, Y)$ als auch des arithmetischen Anteils $\mathcal{A}(T, W)$ von $\alpha_{n,r,s}^{n-r}(T, Y)$ für $T \in Sym_n \setminus 0_r(\mathbb{Z})^*$. Im Fall $r = n - 1$ führen wir diese Aussage im nächsten Kapitel zu einer befriedigenden Beschreibung des Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,n-1,s}(T, Y)$ fort.

3.1 Ein spezielles Repräsentantensystem von $\sigma_{n,r}/\approx$

Definition 3.1.1

$$\mathbb{A} := \{M \in \sigma_{n,r} \mid \det(C_M) \neq 0\} \quad (54)$$

In [13] und [15] gibt Kitaoka in unzusammenhängender Weise, eingestreut in verschiedenen Beweisabschnitten, implizit das folgende Konstruktionsverfahren an, um zu einem beliebigen $P \in \sigma_{n,r}$ ein entsprechendes $M \in \mathbb{A}$ mit $M \approx P$ zu finden, und somit mit dem Repräsentantensystem von \mathbb{A}/\approx auch eines von $\sigma_{n,r}/\approx$. In der folgenden Anmerkung soll dieses in kompakter Form zusammengefaßt werden.

Anmerkung 3.1.2 Sei $P \in \sigma_{n,r}$. Dann ist $((C_P)_4, (D_P)_3, (D_P)_4)$ und damit auch $((D_P)_3, (C_P)_4, (D_P)_4)$ primitiv.

Mit $\det((C_P)_4) \neq 0$ ist $\text{Rang}((C_P)_4, (D_P)_4) = n - r$.

Also gibt es $U_4 \in M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q}), W \in GL_{2(n-r)}(\mathbb{Z})$ mit

$$((C_P)_4, (D_P)_4) = U_4(0_{n-r}, 1_{n-r})W$$

und daher ist für $U_3 := (D_P)_3$ mittels der Primitivität von $((D_P)_3, U_4(0_{n-r}, 1_{n-r})W)$ auch (U_3, U_4) primitiv.

Es gibt also $(U_1, U_2) \in M_{r,n}(\mathbb{Z})$, so daß $\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{Z})$. Für das invertierbare U setzt man $V = {}^tU^{-1}$. Andererseits gibt es ein primitives symmetrisches Paar (c_4, d_4) mit $((C_P)_4, (D_P)_4) = U_4(c_4, d_4)$, welches mittels $(a_4, b_4) \in M_{n-r,2(n-r)}(\mathbb{Z})$ ergänzbar ist zu $\begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix} \in Sp_{n-r}(\mathbb{Z})$.

Man definiere nun:

$$\begin{aligned} M &:= \underbrace{\begin{pmatrix} & 1_n & & 0_n \\ \begin{pmatrix} 1_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix} & & & 1_n \end{pmatrix}}_{\in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r,n+r}}(\mathbb{Z})} \underbrace{\begin{pmatrix} {}^tU^{-1} & 0_n \\ 0_n & U \end{pmatrix}}_{\in Sp_n^{\swarrow 0_{n,n}}(\mathbb{Z})} \underbrace{\begin{pmatrix} 1_r & 0_{r,n-r} & 0_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & a_4 & 0_{n-r,r} & b_4 \\ 0_r & 0_{r,n-r} & 1_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & c_4 & 0_{n-r,r} & d_4 \end{pmatrix}}_{\in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} = \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 & V_2 a_4 & 0_r & V_2 b_4 \\ V_3 & V_4 a_4 & 0_{n-r,r} & V_4 b_4 \\ V_1 & V_2 a_4 + U_2 c_4 & U_1 & V_2 b_4 + U_2 d_4 \\ 0_{n-r,r} & U_4 c_4 & U_3 & U_4 d_4 \end{pmatrix}}_{\in Sp_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} \end{aligned}$$

Es gilt einerseits $M \approx P$. Und andererseits wäre $M \in \mathbb{A}$, falls $\det(V_1) \neq 0$.

Nun ist aber $\det(U_4) \neq 0$ und somit ist $\begin{pmatrix} 1_r & -U_2U_4^{-1} \\ 0_{n-r,r} & 1_{n-r} \end{pmatrix} U = \overbrace{\begin{pmatrix} U_1 - U_2U_4^{-1}U_3 & 0_{r,n-r} \\ * & * \end{pmatrix}}^{\in GL_r(\mathbb{Q})}$.
Wir haben also $(U^{-1})_1 = (U_1 - U_2U_4^{-1}U_3)^{-1}$ und wegen $V = {}^tU^{-1}$ ist auch $V_1 = {}^t(U_1 - U_2U_4^{-1}U_3)^{-1}$ invertierbar.

Offensichtlich laufen wir über ganz \mathbb{A} wenn wir mittels obiger Matrixdarstellung laufen über:

$$\{(U_3, U_4) \in M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \times (M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})) \mid (U_3, U_4) \text{ primitiv}\} \times \\ \{(c_4, d_4) \in (GL_{n-r}(\mathbb{Z}) \setminus \{M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})\}) \times M_{n-r}(\mathbb{Z}) \mid (c_4, d_4) = 1\}$$

Für

$$M = \begin{pmatrix} V_1 & V_2a_4 & 0_r & V_2b_4 \\ V_3 & V_4a_4 & 0_{n-r,r} & V_4b_4 \\ V_1 & V_2a_4 + U_2c_4 & U_1 & V_2b_4 + U_2d_4 \\ 0_{n-r,r} & U_4c_4 & U_3 & U_4d_4 \end{pmatrix}$$

und

$$N = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2\alpha_4 & 0_r & \mathcal{V}_2\beta_4 \\ \mathcal{V}_3 & \mathcal{V}_4\alpha_4 & 0_{n-r,r} & \mathcal{V}_4\beta_4 \\ \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2\alpha_4 + U_2\gamma_4 & \mathcal{U}_1 & \mathcal{V}_2\beta_4 + U_2\delta_4 \\ 0_{n-r,r} & \mathcal{U}_4\gamma_4 & \mathcal{U}_3 & \mathcal{U}_4\delta_4 \end{pmatrix}$$

aus \mathbb{A} gilt:

$$M \approx N : \Leftrightarrow (\exists g \in GL_{n-r}(\mathbb{Z}) \wedge S_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \wedge S_4 \in \text{Sym}_{n-r}(\mathbb{Z})) :$$

$$g(U_4c_4, U_3, U_4d_4) = (\mathcal{U}_4\gamma_4, \mathcal{U}_3 + \mathcal{U}_4\gamma_4S_3, \mathcal{U}_4\delta_4 + \mathcal{U}_4\gamma_4S_4)$$

3.2 Separation des archimedischen vom arithmetischen Teil

Satz 3.2.1 *Sei T in der Form (6) und $\mathcal{N}(T)$ das in Definition 1.3.4 dazu angegebene spezifische Teilrepräsentantensystem von $GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\not\sim 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})$. Dann gilt:*

$$\alpha^{(n-r)}(T) = \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{Sym_n^{\not\sim 0_r}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) \mathcal{A}(T, W) \quad (55)$$

wobei unter dem gemäß (54) mit \mathbb{A}/\approx bezeichneten Repräsentantensystem zu $\sigma_{n,r}/\approx$ nun der sogenannte arithmetische Teil $\mathcal{A}(T, W)$ definiert wird durch:

$$\mathcal{A}(T, W) = \sum_{M \in \mathbb{A}/\approx} \det((C_M)_4)^{-2s} e(T[W]C_M^{-1}D_M) \quad (56)$$

Bew: $\alpha^{(n-r)}(T) \stackrel{(53)}{=} \sum_{\substack{P \in \\ \sigma_{n,r}/\approx}} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{Sym_n^{\not\sim 0_r}(\mathbb{R})}(P, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) =$

$$\stackrel{(36)}{=} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} \sum_{\substack{P \in \\ \sigma_{n,r}/\approx}} \int_{Sym_n^{\not\sim 0_r}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(P, X + iY[{}^tW^{-1}]) e(T[W]X) dX$$

Es gilt für $P \in Sp_n^{\not\sim 0_{n-r,r}}(\mathbb{Q})$, ${}^tW^{-1} =: U \in GL_n(\mathbb{Z})$ und $Y \in Pos_n(\mathbb{R})$:

$$\phi_{n,r,s}(P, X + iY[U]) = \det \left((Y^{-1}[W][X {}^tC_P + D_P] + Y[U][{}^tC_P]) \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} =$$

$$\stackrel{(C_P)_3=0_{n-r,r}}{=} \det \left(Y^{-1}[W] \left[X \underbrace{\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ {}^t(C_P)_4 \end{pmatrix}}_{= \begin{bmatrix} X_2 + {}^t(D_P)_3 \\ X_4 + {}^t(D_P)_4 \end{bmatrix} [{}^t(C_P)_4]^{-1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} {}^t(D_P)_3 \\ {}^t(D_P)_4 \end{pmatrix}}_{= Y[U] \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} [{}^t(C_P)_4]} \right] \right)^{-s} =$$

$$= \det \left((Y^{-1}[W] \begin{bmatrix} X_2 + {}^t(D_P)_3 \\ X_4 + {}^t(D_P)_4 \end{bmatrix} [{}^t(C_P)_4]^{-1}) + Y[U] \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right) [{}^t(C_P)_4]^{-s} =$$

$$= \det((C_P)_4)^{-2s} \det \left(\underbrace{Y^{-1}[W] \left[\begin{pmatrix} X_2 + {}^t(D_P)_3 {}^t(C_P)_4^{-1} \\ X_4 + {}^t(D_P)_4 {}^t(C_P)_4^{-1} \end{pmatrix} \right]}_{=(Y^{-1}[W][X+S(P)]+Y[U])\left[\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix}\right]} + Y[U] \left[\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] \right)^{-s}$$

$$\text{mit } S(P) := \begin{pmatrix} 0_r & {}^t(D_P)_3 {}^t(C_P)_4^{-1} \\ (C_P)_4^{-1}(D_P)_3 & {}^t(D_P)_4 {}^t(C_P)_4^{-1} \end{pmatrix} \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R}).$$

Also gilt insbesondere für ein T in der Form (6):

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(P, X + iY[U]) e(T[W]X) dX = \det((C_P)_4)^{-2s} \times \\ & \times \int_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R})} \det \left(\left(\underbrace{Y^{-1}[W][X + S(P)]}_{X \rightarrow X - S(P)} + Y[U] \right) \left[\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} e(T[W]X) dX = \\ & = \det((C_P)_4)^{-2s} \times \\ & \times \int_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R})} \underbrace{\det \left((Y^{-1}[W][X] + Y[U]) \left[\begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \right] \right)^{-s}}_{=\phi_{n,r,s}(J, X + iY[U])} \underbrace{e(T[W](X + S(P)))}_{=e(T[W]X)e(T[W]S(P))} dX = \\ & = \det((C_P)_4)^{-2s} e(T[W]S(P)) \int_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(J, X + iY[U]) e(T[W]X) dX = \end{aligned}$$

Somit haben wir:

$$\alpha^{(n-r)}(T) = \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) \sum_{\substack{P \in \\ \sigma_{n,r}/\approx}} \det((C_P)_4)^{-2s} e(T[W]S(P))$$

Der Satz ist also bewiesen, wenn man zeigt, daß es zu jedem $P \in \sigma_{n,r}$ ein $M \in \mathbb{A}$ gibt mit: $e(T[W]S(P)) \stackrel{!}{=} e(T[W]C_M^{-1}D_M)$ und $M \approx P$
Es gilt $T[W]_1 = 0_r$ und somit auch die erste Bedingung für jedes

$$C_M^{-1}D_M = \begin{pmatrix} * & {}^t(D_P)_3 {}^t(C_P)_4^{-1} \\ (C_P)_4^{-1}(D_P)_3 & {}^t(D_P)_4 {}^t(C_P)_4^{-1} \end{pmatrix} \quad (57)$$

Für jedes $M \in \mathbb{A}$ ist $\det(C_M) \neq 0$ und es gilt:

$$C_M^{-1}D_M = {}^t(C_M^{-1}D_M) \quad (58)$$

Es gibt also $V_1 \in M_r(\mathbb{Z}) \cap GL_r(\mathbb{Q})$, $D_1 \in M_r(\mathbb{Z})$ und $C_2, D_2 \in M_{r,n-r}(\mathbb{Z})$ mit:

$$C = \begin{pmatrix} V_1 & C_2 \\ 0_{n-r,r} & (D_P)_4 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ (D_P)_3 & (D_P)_4 \end{pmatrix}$$

In der Anmerkung unter 3.1 haben wir explizit für gegebene $P \in \sigma_{n,r}/\approx$ Matrizen $M \in \mathbb{A}$ mit $M \approx P$ konstruiert, somit gilt für diese $(C, D) = (C_M, D_M)$. Wenn wir nun $\mathcal{T} := T[W]$ setzen, so gilt für solche $M \in \mathbb{A}$ aber auch:

$$\begin{aligned} & e \left(\begin{pmatrix} 0_r & \mathcal{T}_2 \\ {}^t\mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & C_2 \\ 0_{n-r,r} & (C_P)_4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ (D_P)_3 & (D_P)_4 \end{pmatrix} \right) = \\ & = e \left(\begin{pmatrix} 0_r & \mathcal{T}_2 \\ {}^t\mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^{-1} & -V_1^{-1}C_2(C_P)_4^{-1} \\ 0_{n-r,r} & (C_P)_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ (D_P)_3 & (D_P)_4 \end{pmatrix} \right) = \\ & = e \left(\begin{pmatrix} 0_r & \mathcal{T}_2 \\ {}^t\mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & V_1^{-1}D_2 - V_1^{-1}C_2(C_P)_4^{-1}(D_P)_4 \\ (C_P)_4^{-1}(D_P)_3 & (C_P)_4^{-1}(D_P)_4 \end{pmatrix} \right) \stackrel{(58)}{=} \\ & = e \left(\begin{pmatrix} 0_r & \mathcal{T}_2 \\ {}^t\mathcal{T}_2 & \mathcal{T}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & {}^t((C_P)_4^{-1}(D_P)_3) \\ (C_P)_4^{-1}(D_P)_3 & (C_P)_4^{-1}(D_P)_4 \end{pmatrix} \right) \stackrel{(57)}{=} e(\mathcal{T}S(P)) \end{aligned}$$

q.e.d.

3.3 Der Wert des Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,r,s}^{(n-r)}(0_n, Y)$

Definition 3.3.1 In [31] wird für $k \in \mathbb{N}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, g \in \text{Sym}_k(\mathbb{R})$ und $h \in \text{Pos}_k(\mathbb{R})$ folgende Funktion definiert:

$$\xi_k(h, g, \alpha, \beta) = \int_{\text{Sym}_k(\mathbb{R})} e(g\mathcal{X}) \det(\mathcal{X} + ih)^{-\alpha} \det(\mathcal{X} - ih)^{-\beta} d\mathcal{X} \quad (59)$$

Lemma 3.3.2 Betrachtet man den Spezialfall $\alpha = \beta$ und $h = 1_k$, hat man also:

$$\xi_k(1_k, g, \alpha, \alpha) = \int_{\text{Sym}_k(\mathbb{R})} e(g\mathcal{X}) \det(1_k + \mathcal{X}^2)^{-\alpha} d\mathcal{X} \quad (60)$$

Bew.: $\xi_k(1_k, g, \alpha, \alpha) = \int_{\text{Sym}_k(\mathbb{R})} e(g\mathcal{X}) \det(\mathcal{X} + i1_k)^{-\alpha} \det(\mathcal{X} - i1_k)^{-\alpha} d\mathcal{X} =$
 $= \int_{\text{Sym}_k(\mathbb{R})} e(g\mathcal{X}) \det(\underbrace{(\mathcal{X} + i1_k)(\mathcal{X} - i1_k)}_{=\mathcal{X}^2 + 1_k})^{-\alpha} d\mathcal{X}$

q.e.d.

Anmerkung 3.3.3 Mittels [31, S.275] zeigt man leicht daß:

$$\xi_{n-r}(\sqrt{h}, 0_{n-r}, \alpha, \alpha) = f_{n,r,\alpha} \det(h)^{\frac{n-r+1}{4} - \alpha} \quad (61)$$

mit

$$f_{n,r,\alpha} := 2^{(n-r)(1-2\alpha)} (2\pi)^{\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}} \frac{\Gamma_{n-r}(2\alpha - \frac{n-r+1}{2})}{\Gamma_{n-r}(\alpha)^2} \quad (62)$$

und

$$\Gamma_{n-r}(\alpha) := \pi^{\frac{(n-r)(n-r-1)}{4}} \prod_{k=0}^{n-r-1} \Gamma(\alpha - \frac{k}{2}) \quad (63)$$

Satz 3.3.4 *Bezüglich eines Repräsentantensystems \mathbb{A}/\approx gilt:*

$$\alpha_{n,r,s}^{(n-r)}(0_n, Y) = \sum_{M \in \mathbb{A}/\approx} \det((C_M)_4)^{-2s} \sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} \mathcal{A}_{Y,W} \quad (64)$$

mit :

$$\mathcal{A}_{Y,W} = \frac{\det(Y)^{\frac{n-r}{2}} f_{n,r,s-\frac{r}{2}}}{\det((Y[{}^tW^{-1}])_4)^{s-\frac{r+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{(n-r) \times r}} \det(1_{n-r} + {}^tX_2 X_2)^{-s} d {}^tX_2 \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } \alpha_{n,r,s}^{(n-r)}(0_n, Y) &\stackrel{(55)}{=} \sum_{W \in \mathcal{N}(0_n)} I_{Sym_n \setminus 0_r(\mathbb{R})}(J, 0_n, Y[{}^tW^{-1}]) \mathcal{A}(0_n, W) \stackrel{(56)}{=} \\ &= \sum_{W \in \mathcal{N}(0_n)} I_{Sym_n \setminus 0_r(\mathbb{R})}(J, 0_n, Y[{}^tW^{-1}]) \sum_{M \in \mathbb{A}} \det((C_M)_4)^{-2s} e(0_n) = \\ &= \sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} I_{Sym_n \setminus 0_r(\mathbb{R})}(J, 0_n, Y[{}^tW^{-1}]) \sum_{M \in \mathbb{A}} \det((C_M)_4)^{-2s} = \\ &\stackrel{(36)}{=} \sum_{M \in \mathbb{A}} \det((C_M)_4)^{-2s} \sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} \times \\ &\times \int_{Sym_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(J, X + iY[{}^tW^{-1}]) \underbrace{e(0_n)}_{=1} dX = \\ &= \sum_{M \in \mathbb{A}} \det((C_M)_4)^{-2s} \sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\swarrow 0_{n-r,r}}(\mathbb{Z})} \underbrace{\int_{Sym_n^{\setminus 0_r}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(J, X + iY[{}^tW^{-1}]) dX}_{\stackrel{!}{=} \mathcal{A}_{Y,W}} \end{aligned}$$

In analoger Weise wie in [9, S.69] gibt es eine Jacobi-Transformation von $Y[{}^tW^{-1}] =: \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 & \mathcal{Y}_2 \\ {}^t\mathcal{Y}_2 & \mathcal{Y}_4 \end{pmatrix} \in Pos_n(\mathbb{R})$ mittels:

$$Y[{}^tW^{-1}] = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 - \mathcal{Y}_4^{-1} [{}^t\mathcal{Y}_2] & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \mathcal{Y}_4 \end{pmatrix}}_{=:P} \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1_r & 0_{r,n-r} \\ \mathcal{Y}_4^{-1} {}^t\mathcal{Y}_2 & 1_{n-r} \end{pmatrix}}_{=:Q} \right] \quad (66)$$

Außerdem haben $P \in Pos_n(\mathbb{R}), P_1 \in Pos_r(\mathbb{R}), P_4 \in Pos_{n-r}(\mathbb{R})$ eindeutige Wurzeln mit:

$$\sqrt{P} = \begin{pmatrix} \sqrt{P_1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \sqrt{P_4} \end{pmatrix} \quad (67)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
& \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(J, \mathcal{X} + iY[{}^tW^{-1}]) d\mathcal{X} = \\
& \stackrel{(26)}{=} \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left(\left((Y[{}^tW^{-1}])^{-1}[\mathcal{X}] + Y[{}^tW^{-1}] \right) \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} d\mathcal{X} = \\
& \stackrel{(66)}{=} \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left(\left((P[Q])^{-1}[X] + P[Q] \right) \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} dX = \\
& = \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left((P^{-1}[{}^tQ^{-1}X] + P[Q]) \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} dX = \\
& = \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left((P^{-1}[{}^tQ^{-1}XQ^{-1}] + P)[Q] \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} dX = \\
& \stackrel{\det(Q)=1}{=} \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left((P^{-1}[X] + P)[Q] \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} dX = \\
& = \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left((P^{-1}[X] + P) \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1_r & 0_{r,n-r} \\ \mathcal{Y}_4 {}^t\mathcal{Y}_2 & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix}} \right] \right)^{-s} dX = \\
& = \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left(\left({}^t(X[\sqrt{P^{-1}}]) X[\sqrt{P^{-1}}] + 1_n \right) [\sqrt{P} \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix}] \right)^{-s} dX = \\
& = \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left(\left({}^t(X[\sqrt{P^{-1}}]) X[\sqrt{P^{-1}}] + 1_n \right) \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{P_1} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \sqrt{P_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ \sqrt{P_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{pmatrix} \sqrt{P_4}} \right] \right)^{-s} dX = \\
& = \underbrace{\det(\sqrt{P_4})^{-2s}}_{=\det(P_4)^{-s}} \int_{Sym_n^{\searrow 0r}(\mathbb{R})} \det \left(\left({}^t(X[\sqrt{P^{-1}}]) X[\sqrt{P^{-1}}] + 1_n \right) \begin{bmatrix} 0_{r,n-r} \\ 1_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-s} dX =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \det(P_4)^{-s} \int_{\text{Sym}_{n-r}(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^{r \times n-r}} \det \left(\begin{pmatrix} 0_r & \sqrt{P_1}^{-1} X_2 \sqrt{P_4}^{-1} \\ \sqrt{P_4}^{-1} {}^t X_2 \sqrt{P_1}^{-1} & X_4 [\sqrt{P_4}^{-1}] \end{pmatrix} \right) \times \\
&\quad \times \left(\begin{pmatrix} 0_r & \sqrt{P_1}^{-1} X_2 \sqrt{P_4}^{-1} \\ \sqrt{P_4}^{-1} {}^t X_2 \sqrt{P_1}^{-1} & X_4 [\sqrt{P_4}^{-1}] \end{pmatrix} + 1_n \right) \left[\begin{pmatrix} 0_r & n-r \\ & 1_{n-r} \end{pmatrix} \right]^{-s} d {}^t X_2 d X_4 = \\
&= \det(P_4)^{-s} \int_{\text{Sym}_{n-r}(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}^{r \times n-r}} \underbrace{\det(\sqrt{P_1})^{n-r} \det(\sqrt{P_4})^r}_{n-r \leq r \det(\sqrt{Y})^{n-r} \det(\sqrt{P_4})^{2r-n}} \times \\
&\quad \times \det \left(\begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ {}^t X_2 & X_4 [\sqrt{P_4}^{-1}] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ {}^t X_2 & X_4 [\sqrt{P_4}^{-1}] \end{pmatrix} + 1_n \right) \begin{pmatrix} 0_r & n-r \\ & 1_{n-r} \end{pmatrix} \right)^{-s} d {}^t X_2 d X_4 = \\
&= \det(P_4)^{r-\frac{n}{2}-s} \det(\sqrt{Y})^{n-r} \int_{\text{Sym}_{n-r}(\mathbb{R})} \det(\sqrt{P_4})^{n-r+1} \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^{r \times n-r}} \det \left(\begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ {}^t X_2 & X_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_r & X_2 \\ {}^t X_2 & X_4 \end{pmatrix} + 1_n \right) \begin{pmatrix} 0_r & n-r \\ & 1_{n-r} \end{pmatrix} \right)^{-s} d {}^t X_2 d X_4 = \\
&= \det(P_4)^{\frac{r+1}{2}-s} \det(\sqrt{Y})^{n-r} \int_{\text{Sym}_{n-r}(\mathbb{R})} \int_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_r}(\mathbb{R})} \det \left({}^t X_2 X_2 + \underbrace{X_4^2 + 1_{n-r}}_{\in \text{Pos}_{n-r}(\mathbb{R})} \right)^{-s} d {}^t X_2 d X_4 = \\
&= \det \left(\underbrace{P_4}_{=(Y[{}^t W^{-1}])_4} \right)^{-(s-\frac{r+1}{2})} \det(Y)^{\frac{n-r}{2}} \int_{\text{Sym}_{n-r}(\mathbb{R})} \det(X_4^2 + 1_{n-r})^{-s} \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^{(n-r) \times r}} \frac{\det(X_4^2 + 1_{n-r} + {}^t X_2 X_2)^{-s}}{\underbrace{\det(\sqrt{X_4^2 + 1_{n-r}})^{-s} \det(\sqrt{X_4^2 + 1_{n-r}})^{-s}}_{=\det(1_{n-r} + (X_4^2 + 1_{n-r})^{-\frac{1}{2}} {}^t X_2 X_2 (X_4^2 + 1_{n-r})^{-\frac{1}{2}})^{-s}}} d {}^t X_2 \right) d X_4 = \\
&= \frac{\det(Y)^{\frac{n-r}{2}}}{\det((Y[{}^t W^{-1}])_4)^{s-\frac{r+1}{2}}} \underbrace{\int_{\text{Sym}_{n-r}(\mathbb{R})} \det(X_4^2 + 1_{n-r})^{\frac{r}{2}-s} d X_4}_{\stackrel{(60)}{=} \xi_{n-r}(1_{n-r}, 0_{n-r}, s-\frac{r}{2}, s-\frac{r}{2})} \times \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^{(n-r) \times r}} \det(1_{n-r} + {}^t X_2 X_2)^{-s} d {}^t X_2 =
\end{aligned}$$

$$(61) \quad \frac{\det(Y)^{\frac{n-r}{2}} f_{n,r,s-\frac{r}{2}}}{\det((Y[{}^tW^{-1}])_4)^{s-\frac{r+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{(n-r) \times r}} \det(1_{n-r} + {}^tX_2X_2)^{-s} d{}^tX_2 = \mathcal{A}_{Y,W}.$$

q.e.d.

3.4 Auswertung des arithmetischen Anteils

Im vorliegenden Abschnitt interessiert der durch $\mathcal{A}(T, W)$ bezeichnete arithmetische Teil des Fourierkoeffizienten:

$$\mathcal{A}(T, W) = \sum_{P \in \mathbb{A} \setminus \approx} \det((C_P)_4)^{-2s} e \left(\underbrace{T[W]C_P^{-1}D_P}_{=: \mathcal{A}(T, W, P)} \right)$$

Definition 3.4.1 Man bezeichne für die quadratischen Matrizen c, d durch das Symbol $(c, d) = 1$ die Eigenschaft, daß sie sowohl primitiv zueinander sind als auch $c^t d = d^t c$ gilt.

Anmerkung 3.4.2 Seien nun $U_4 \in M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})$ und c aus

$$GL_{n-r}(\mathbb{Z}) \setminus \{M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})\} \quad (68)$$

Wir wählen beliebige Repräsentantensysteme der folgenden Nebenklassen:

$$\{d \in M_{n-r}(\mathbb{Z}) \mid (c, d) = 1\} \bmod c \text{Sym}_{n-r}(\mathbb{Z}) \quad (69)$$

$$\{U_3 \in M_{n-r,r} \mid (U_3, U_4) \text{ primitiv}\} \bmod U_4 c M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \quad (70)$$

Wir wissen, daß jede Matrix aus $\sigma_{n,r}$ und damit auch jede aus \mathbb{A} durch ihre letzten $(n-r) \times (2n)$ Spalten $(0_{n-r,r}, C_4, D_3, D_4)$ charakterisiert ist, wobei $C_4, D_4 \in M_{n-r}(\mathbb{Z})$ mit $\det(C_4) \neq 0$ und $D_3 \in M_{n-r,r}(\mathbb{Z})$. Desweiteren gilt $C_4^t D_4 = D_4^t C_4$ und die Matrix (C_4, D_3, D_4) ist primitiv. Setze $(C_4, D_4) = U_4(c, d)$ und $D_3 = U_3$ für $(c, d) = 1$, so gilt $(C_4, D_3, D_4) = (U_4 c, U_3, U_4 d)$ und es gibt gemäß [15] eine bijektive Zuordnung: $\sigma_{n,r} \rightarrow \tau_{n,r}$. Dabei sei

$$\begin{aligned} \tau_{n,r} := & \left(\bigcup_{c \text{ über (68)}} \{(c, d) \in M_{n-r, 2(n-r)} \mid (c, d) = 1\} \right) \times \\ & \times \left(\bigcup_{U_4 \in M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})} \{(U_3, U_4) \in M_{n-r,n} \mid (U_3, U_4) \text{ primitiv}\} \right) \end{aligned}$$

Für $(C_4, D_3, D_4), (\tilde{C}_4, \tilde{D}_3, \tilde{D}_4) \in \sigma_{n,r}$ gibt es also eindeutig bestimmte $(C_4, D_4) = U_4(c, d), U_3 = D_3$ bzw. $(\tilde{C}_4, \tilde{D}_4) = \tilde{U}_4(\tilde{c}, \tilde{d}), \tilde{U}_3 = \tilde{D}_3 \in \tau_{n,r}$, so daß man auch die Äquivalenzrelation \approx von $\sigma_{n,r}$ bzw. \mathbb{A} auf $\tau_{n,r}$ übertragen kann mittels:
 $(C_4, D_3, D_4) \approx (\tilde{C}_4, \tilde{D}_3, \tilde{D}_4) :\Leftrightarrow (\exists g \in GL_{n-r}(\mathbb{Z}), S \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})) :$

$$\begin{aligned} g(\tilde{C}_4, \tilde{D}_3, \tilde{D}_4) &= (C_4, D_3 + C_4 S_3, D_4 + C_4 S_4) \\ \Leftrightarrow (\exists g \in GL_{n-r}(\mathbb{Z}), S \in \text{Sym}_n(\mathbb{Z})) : g\tilde{U}_4(\tilde{c}, \tilde{d}) &= U_4(c, d + cS_4) \wedge g\tilde{U}_3 = \\ &= U_3 + U_4 c S_4 \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der obigen bijektiven Zuordnung gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T, W) &= \sum_{P \in \mathbb{A} \setminus \approx} \det((C_P)_4)^{-2s} e(2(T[W])_2 (C_P)_4^{-1} (D_P)_3) e((T[W])_4 (C_P)_4^{-1} (D_P)_4) = \\ &= \sum_{c \text{ über (68)}} \sum_{d \text{ über (69)}} \sum_{U_4 \text{ über (68)}} \underbrace{\det(U_4 c)^{-2s}}_{=\det(U_4)^{-2s} \det(c)^{-2s}} \times \\ &\times \sum_{U_3 \text{ über (70)}} e(2(T[W])_2 \underbrace{(U_4 c)^{-1} U_3}_{=c^{-1} U_4^{-1} U_3}) e((T[W])_4 \underbrace{(U_4 c)^{-1} (U_4 d)}_{=c^{-1} d}) = \\ &= \sum_{c \text{ über (68)}} \det(c)^{-2s} \sum_{d \text{ über (69)}} e((T[W])_4 c^{-1} d) \times \\ &\times \sum_{U_4 \text{ über (68)}} \det(U_4)^{-2s} \sum_{U_3 \text{ über (70)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} U_4^{-1} U_3) \end{aligned}$$

Lemma 3.4.3 *Es sei T in der Form (6) und $W \in \mathcal{N}(T)$. Man läßt c und d (in Abhängigkeit des jeweiligen c 's) über folgende Repräsentantensysteme laufen:*

$$(68) \text{ mit } 2(T[W])_2 c^{-1} \in M_{r, n-r}(\mathbb{Z}) \quad (71)$$

$$\{d \in M_{n-r}(\mathbb{Z}) \mid c^t d = d^t c\} \text{ mod } c \text{Sym}_{n-r}(\mathbb{Z}) \quad (72)$$

Dann gilt:

$$\left(\sum_{K \text{ über (68)}} \det(K)^{-2s} \right) \times \mathcal{A}(T, W) = \sum_c |\det(c)|^{r-2s} \sum_d e((T[W])_4 c^{-1} d)$$

Bew.: Nach obiger Anmerkung gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{K \text{ über (68)}} \det(K)^{-2s} \mathcal{A}(T, W) &= \sum_{c \text{ über (68)}} \det(c)^{-2s} \sum_{d \text{ über (69)}} e((T[W])_4 c^{-1} d) \times \\ \times \underbrace{\sum_{K \text{ über (68)}} \sum_{U_4 \text{ über (68)}} \det(KU_4)^{-2s} \sum_{U_3 \text{ über (70)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} U_4^{-1} U_3)}_{=: S(T, W)} \end{aligned}$$

Mittels der Transformation $K(U_3, U_4) \rightarrow (V_3, V_4)$ können wir nun $S(T, W)$ übergehen lassen zu $\sum_{V_4} \det(V_4)^{-2s} \sum_{V_3} e(2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} V_3)$, wobei V_4 über (68) läuft und V_3 über:

$$M_{n-r,r} \bmod V_4 c M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \quad (73)$$

Man stelle nun die V_3 für beliebig fixiertes $c, V_4 \in (68)$ dar mittels $V_3 = u + V_4 v$ und lasse u und v laufen über:

$$M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \setminus V_4 M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \quad (74)$$

$$M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \setminus c M_{n-r,r}(\mathbb{Z}) \quad (75)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} &\sum_{V_3 \text{ über (73)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} V_3) = \\ &= \sum_{u \text{ über (74)}} \sum_{v \text{ über (75)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} (u + V_4 v)) = \\ &= \sum_{u \text{ über (74)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} u) \sum_{v \text{ über (75)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} v) = \\ &= \sum_{u \text{ über (74)}} e(2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} u) \times \begin{cases} |\det(c)|^r & : 2(T[W])_2 c^{-1} \in M_{r,n-r}(\mathbb{Z}) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zur späteren Verwendung führen wir bezüglich V_4 noch nun folgendes Repräsentantensystem ein:

$$(68) \text{ mit } 2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} \in M_{r,n-r}(\mathbb{Z}) \quad (76)$$

Dann kann man nun die Laufbedingung für c auf (71) modifizieren, und erhält:

$$\begin{aligned}
& \sum_{K \text{ über (68)}} \det(K)^{-2s} \mathcal{A}(T, W) = \\
&= \sum_{c \text{ über (71)}} |\det(c)|^{r-2s} \sum_{d \text{ über (69)}} e((T[W])_4 c^{-1} d) \sum_{V_4 \text{ über (68)}} \det(V_4)^{-2s} \times \\
&\times \underbrace{\sum_{u \text{ über (74)}} e\left(\underbrace{2(T[W])_2 c^{-1}}_{\in M_{r,n-r}(\mathbb{Z}) \text{ wegen (71)}} V_4^{-1} u\right)}_{=} = \\
&= \begin{cases} |\det(V_4)|^r & : 2(T[W])_2 c^{-1} V_4^{-1} \in M_{r,n-r}(\mathbb{Z}) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \\
&= \sum_{c \text{ über (71)}} |\det(c)|^{r-2s} \sum_{d \text{ über (69)}} e((T[W])_4 c^{-1} d) \sum_{V_4 \text{ über (76)}} \det(V_4)^{r-2s} = \\
&= \sum_{c \text{ über (71)}} \sum_{V_4 \text{ über (76)}} |\det(V_4 c)|^{r-2s} \sum_{d \text{ über (69)}} e((T[W])_4 c^{-1} V_4^{-1} V_4 d)
\end{aligned}$$

Man kann nun das Paar $(V_4 c, V_4 d)$, für welches $(c, d) = 1$ gilt, überführen zu (\tilde{c}, \tilde{d}) , wobei letzteres Paar nur noch symmetrisch, aber nicht mehr primitiv ist. Somit erhält man die Behauptung:

$$\sum_{K \text{ über (68)}} \det(K)^{-2s} \mathcal{A}(T, W) = \sum_{\tilde{c} \text{ über (71)}} |\det(\tilde{c})|^{r-2s} \sum_{\tilde{d} \text{ über (72)}} e((T[W])_4 \tilde{c}^{-1} \tilde{d})$$

q.e.d.

Anmerkung 3.4.4 Zur endlichen Summe $\sum_{d \text{ über (72)}} e((T[W])_4 c^{-1} d)$ fassen wir wegen der Bedingung, daß (c, d) ein symmetrisches Paar ist, keine allgemeine Beschreibung. Im wesentlichen darauf begründete sich die Entscheidung nur die Eisensteinreihen $E_{n,n-1}(Z, s)$ eingehender zu untersuchen. Denn im Fall $r = n - 1$ ist die Symmetriebedingung trivial. Natürlich gibt es auch noch andere Vereinfachungen, wie z.B. die Tatsache, daß im erwähnten Fall neben $E_{n,n-1,0}(Z, s)$ nur noch $E_{n,n-1,1}(Z, s)$ als Teilreihe zu berücksichtigen ist.

4 Die Fourierentwicklung von $E_{n,n-1}$

In diesem Kapitel gelte durchgängig $n - r = 1$ und somit auch:

$$\alpha(T) = \alpha^{(1)}(T) + \alpha^{(0)}(T) \stackrel{(51)}{=} \alpha^{(1)}(T) + \begin{cases} 0 & : T \neq 0_r \\ \frac{1}{2\zeta(2s)} \sum_{d \in \mathbb{Z}^n} (Y^{-1}[d])^{-s} & : T = 0_n \end{cases}$$

Der Fourierkoeffizient für $T = 0_n$ wird im anschließenden Abschnitt berechnet. Bei den übrigen Fourierkoeffizienten reicht es aus nur $\alpha^{(1)}(T) (= \alpha(T))$ zu ermitteln, wobei die in Frage kommenden Koeffizientenmatrizen T beschränkt sind auf die Form gemäß (6) mit $r = n - 1$, also auf:

$$T = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,1} \\ 0_{1,n-2} & T_\gamma \end{pmatrix} \text{ mit } T_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{n-1,n}}{2} \\ \frac{t_{n-1,n}}{2} & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \text{Sym}_2^{\searrow 0_1}(\mathbb{Z})^*.$$

Und damit gilt in allen nun zu betrachtenden Fällen $1 \leq \text{Rg}(T) \leq 2$ die Formel:

$$\alpha(T) = \alpha^{(1)}(T) \stackrel{(55)}{=} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) \mathcal{A}(T, W) \quad (77)$$

Im übernächsten Abschnitt wird festgestellt, das $\mathcal{A}(T, W)$ weder von der in Frage stehenden Nebenklasse $\mathcal{N}(T)$ noch von der verwendeten Repräsentantenmatrix W abhängt. Somit kann für $T \neq 0_n$ dieser arithmetische Faktor ausgeklammert werden, und man erhält die bestmögliche repräsentantenunabhängige Darstellung dieser Fourierkoeffizienten:

$$\alpha(T) = \frac{\sigma_{n-2s}(ggT(t_{n-1,n}, t_{n,n}))}{\zeta(2s)} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}])$$

dabei verwendet man die Teilerpotenzfunktion $\sigma_z(t) = \sum_{\mathbb{N} \ni c|t} c^z$.

Zur weiteren Berechnung der Summanden $I_{\text{Sym}_n^{\searrow 0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}])$ muß man aber die Menge $\mathcal{N}(T)$ näher untersuchen, insbesondere hinsichtlich eines möglichst geschickten Repräsentantensystems, wie es bereits bei der Anmerkung zur dessen Definition in 1.3.4 erwähnt wurde. Bezüglich dieser Repräsentation können wir dann zeigen, daß es durch ein entsprechende $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ des Falles $n = 2$ und $r = 1$ bestimmt ist.

Anschließend untersuchen wir diesen Spezialfall und erkennen, daß man hierbei neben dem Repräsentanten der Nebenklasse $GL_2^{\searrow 0_1}(\mathbb{Z})$ im Fall $\text{Rg}(T) = 2$ nur genau einen Repräsentanten einer weiteren Nebenklasse berücksichtigen muß. Im Fall $\text{Rg}(T) = 1$ fällt letzterer sogar weg. Die Einheitsmatrix ist der kanonische Repräsentant der ersten Nebenklasse. Die andere Nebenklasse

wird dann auch noch geeignet repräsentiert.

Bei der Berechnung der achimedischen Anteile $I_{Sym_n^{\wedge 0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}])$ kann man feststellen, daß sie jeweils bestimmt sind durch das Produkt von π -Potenzen, Gammafaktoren, einer vom Y -Wert abhängigen Konstante und einer konfluenten hypergeometrischen Funktion.

4.1 Die Berechnung von $\alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y)$

Wir werden nun auf [12, Theorem 2.1.3] zurückgreifen:

Sei $\alpha > 0$, $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$ und $s > \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^s} = \alpha^{s-1} (\alpha\gamma - \beta^2)^{\frac{1}{2}-s} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s - \frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \quad (78)$$

In iterierter Anwendung folgt daraus sofort:

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + {}^t X_2 X_2)^{-s} d{}^t X_2 = \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \quad (79)$$

Anmerkung 4.1.1 Man kann gemäß [32] die Epstein'sche Zetafunktion $Z(Y, s) : \text{Pos}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch:

$$Z(Y, s) := \frac{1}{2} \sum_{v \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Y[v])^{-s} \quad (80)$$

analytisch auf \mathbb{C} fortsetzen, wobei man bei $\frac{n}{2}$ einen einfachen Pol hat. Es gilt die Funktionalgleichung:

$$\underbrace{\pi^{-s} \Gamma(s) Z(Y, s)}_{=: \Omega(Y, s)} = \underbrace{\pi^{s - \frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} - s) Z(Y^{-1}, \frac{n}{2} - s) \det(Y)^{-\frac{1}{2}}}_{= \frac{\Omega(Y^{-1}, \frac{n}{2} - s)}{\det(Y)^{\frac{1}{2}}}} \quad (81)$$

Satz 4.1.2 Für $T = 0_n$ gilt:

$$\alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) = \frac{1}{\zeta(2s)} \left(Z(Y^{-1}, s) + \det(Y)^{\frac{1}{2}} Z\left(Y, s - \frac{n}{2}\right) \tilde{f}_{n,n-1,s} \right) \quad (82)$$

mit dem nur von $n, r = n - 1$ und s abhängigen Faktor

$$\tilde{f}_{n,n-1,s} = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n}{2})}{\Gamma(s)} \quad (83)$$

Bew.: Zuerst die Auswertung eines die Formel (64) bestimmenden Ausdrucks für den Fall $r = n - 1$ mittels der Gamma-Multiplikations-Formel von Legendre (*):

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \det(1 + {}^t X_2 X_2)^{-s} d {}^t X_2}_{\stackrel{(79)}{=} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)}} \underbrace{f_{n,n-1,s - \frac{n-1}{2}}}_{\stackrel{(62)}{=} 2^{n-2s+1} \pi^{\frac{\Gamma(2(s - \frac{n}{2}))}{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})^2}}} \stackrel{(*)}{=} \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2}) \Gamma(s - \frac{n}{2})}{\Gamma(s - \frac{n-1}{2}) \Gamma(s)} = \\
& = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n}{2})}{\Gamma(s)} \stackrel{(83)}{=} \tilde{f}_{n,n-1,s}
\end{aligned}$$

Aus (64) und Anmerkung 2.5.2 folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) &= \zeta(2s)^{-1} \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{d \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Y^{-1} [d])^{-s}}_{\stackrel{(80)}{=} Z(Y^{-1}, s)} + \underbrace{\sum_{M \in \mathbb{A}/\approx} \det((C_M)_4)^{-2s}}_{= \frac{\zeta(2s-n)}{\zeta(2s)}} \times \\
&\times \sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\sphericalangle 01,n-1}(\mathbb{Z})} \frac{\det(Y)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_{n,n-1,s}}{((Y[{}^t W^{-1}])_4)^{s - \frac{n}{2}}} = \\
&= \frac{Z(Y^{-1}, s)}{\zeta(2s)} + \frac{\zeta(2s-n)}{\zeta(2s)} \det(Y)^{\frac{1}{2}} \tilde{f}_{n,n-1,s} \underbrace{\sum_{W \in GL_n(\mathbb{Z})/GL_n^{\sphericalangle 01,n-1}} ((Y[{}^t W^{-1}])_4)^{-(s - \frac{n}{2})}}_{= \zeta(2s-n)^{-1} \frac{1}{2} \sum_{d \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Y[d])^{-(s - \frac{n}{2})}} \\
&\qquad\qquad\qquad = \zeta(2s-n)^{-1} \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{d \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} (Y[d])^{-(s - \frac{n}{2})}}_{= Z(Y, s - \frac{n}{2})} \\
&= \frac{1}{\zeta(2s)} \left(Z(Y^{-1}, s) + \det(Y)^{\frac{1}{2}} Z(Y, s - \frac{n}{2}) \tilde{f}_{n,n-1,s} \right)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Korollar 4.1.3 Mit $\Lambda(s) := \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s)$ gilt die Funktionalgleichung:

$$\Lambda(s) \alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) = \Lambda(n-s) \alpha_{n,n-1,n-s}(0_n, Y) \quad (84)$$

Bew.: Aus (64) und Anmerkung 2.5.2 folgt sofort:

$$\begin{aligned}
\Lambda(s) \alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) &\stackrel{(82)}{=} \pi^{-s} \Gamma(s) Z(Y^{-1}, s) + \pi^{-s} \Gamma(s) \det(Y)^{\frac{1}{2}} Z(Y, s-1) \pi^{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(s - \frac{n}{2})}{\Gamma(s)} = \\
&= \Omega(Y^{-1}, s) + \Omega(Y, s - \frac{n}{2}) \det(Y)^{\frac{1}{2}} = \\
&\stackrel{(81)}{=} \Omega(Y, \underbrace{\frac{n}{2} - s}_{=(n-s) - \frac{n}{2}}) \det(Y)^{\frac{1}{2}} + \Omega(Y^{-1}, n-s) = \Lambda(n-s) \alpha_{n,n-1,n-s}(0_n, Y). \quad \mathbf{q.e.d.}
\end{aligned}$$

4.2 Reduktion des arithmetischen Anteils

Definition 4.2.1 Für $k, l \in \mathbb{N}$ seien gegeben ein k -reihiger Vektor $v \in M_{k,1}(\mathbb{Z})$ und ein l -reihiger Vektor $w \in M_{l,1}(\mathbb{Z})$ Zeile. Dann bezeichnen wir mit $ggT(v)$ bzw. $ggT(v, w)$ den größten gemeinsamen Teiler aller Zeilenelemente von v bzw. von (v, w) .

Man definiere für ein $z \in \mathbb{C}$ die Teilerpotenzfunktion

$$\sigma_z(t) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \text{ durch } \sigma_z(t) = \sum_{\mathbb{N} \ni c|t} c^z.$$

Lemma 4.2.2 Seien $T_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{n-1,n}}{2} \\ \frac{t_{n-1,n}}{2} & t_{n,n} \end{pmatrix} \in \text{Sym}_2^{\wedge 0_1}(\mathbb{Z})^*$ und ${}^tW^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$ mit $\text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma)[{}^tW^{-1}] := \tilde{T} \in \text{Sym}_n^{\wedge 0_{n-1}}(\mathbb{Z})^*$. Dann gilt:

$$\mathcal{A}(\text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma), W) = \frac{\sigma_{n-2s}(ggT(t_{n-1,n}, t_{n,n}))}{\zeta(2s)} \quad (85)$$

Bew.: In Lemma 3.4.3 wurde für allgemeines r folgende Auswertung vorgenommen:

$$\sum_K |\det(K)|^{-2s} \mathcal{A}(\text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma), W) = \sum_c |\det(c)|^{r-2s} \sum_d e(\tilde{T}_4 c^{-1} d)$$

Dabei läuft K über:

$$GL_{n-r}(\mathbb{Z}) / \{M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})\}$$

c über:

$$GL_{n-r}(\mathbb{Z}) / \{M_{n-r}(\mathbb{Z}) \cap GL_{n-r}(\mathbb{Q})\} \text{ mit } 2\tilde{T}_2 c^{-1} \in M_{r, n-r}(\mathbb{Z})$$

und d über:

$$\{d \in M_{n-r}(\mathbb{Z}) \mid c^t d = d^t c\} \text{ mod } c \text{Sym}_{n-r}(\mathbb{Z})$$

Im vorliegenden Fall gilt $r = n - 1$ und somit:

$$\begin{aligned} \zeta(2s) \mathcal{A}(\text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma), W) &= \sum_{c \in \mathbb{N} \text{ mit } c|ggT(2\tilde{T}_2)} \underbrace{(|\det(c)|)^{r-2s}}_{=c} \sum_{d \in \mathbb{Z}/c\mathbb{Z}} e(\tilde{T}_4 c^{-1} d) = \\ &= \begin{cases} c & : \tilde{T}_4 c^{-1} \in \mathbb{Z} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \\ &= \sum_{c \in \mathbb{N} \text{ mit } c|ggT(2^t \tilde{T}_2) \wedge c|ggT(\tilde{T}_4)} \overbrace{c^{r+1}}^{=n}^{-2s} = \sum_{c \in \mathbb{N} \text{ mit } c|\mathcal{I}(\tilde{T})} c^{n-2s} \end{aligned}$$

Aufgrund des Elementarteilersatzes gilt nun: $\mathcal{I}(\tilde{T}) = \mathcal{I}(T)$.
 Desweiteren ist $\mathcal{I}(T) = ggT(2^{\frac{t_{n-1,n}}{2}}, t_{n,n})$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma), W) = \zeta(2s)^{-1} \overbrace{\sum_{c \in \mathbb{N} \text{ mit } c|ggT(t_{n-1,n}, t_{n,n})} c^{n-2s}}^{= \sigma_{n-2s}(ggT(t_{n-1,n}, t_{n,n}))}$$

q.e.d.

Korollar 4.2.3 *Es gilt somit offensichtlich für $T \neq 0_n$:*

$$\alpha(T) = \frac{\sigma_{n-2s}(ggT(t_{n-1,n}, t_{n,n}))}{\zeta(2s)} \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{\text{Sym}_n \curvearrowright^{0_{n-1}}(\mathbb{R})} (J, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) \quad (86)$$

Anmerkung 4.2.4 *Also ist im Fall $r = n - 1$ der arithmetische Anteil $\mathcal{A}(T, W)$ von der Matrix W unabhängig und wird nun durch $\mathcal{A}(T)$ bezeichnet. Nun ist $\mathcal{A}(T)$ gemäß obiger Formel aber nur von T_γ abhängig und man kann $\mathcal{N}(T)$ so wählen, daß es eine Bijektion $b : \mathcal{N}(T_\gamma) \rightarrow \mathcal{N}(T)$ mittels $b(W_\gamma) = \text{diag}(1_{n-2}, W_\gamma)$ gibt, so daß gilt $\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}(\text{diag}(1_{n-2}, T_\gamma))$. Man sieht nun sofort, daß $\mathcal{A}_{n,n-1,s}(\text{diag}(1_{n-2}, T_\gamma)) = \frac{\zeta(2s-n+2)}{\zeta(2s)} \mathcal{A}_{2,1,s-\frac{n}{2}+1}(T_\gamma)$ und so gilt auch:*

$$\begin{aligned} a_{n,n-1,s}(Y, T) &= \frac{\zeta(2s-n+2)}{\zeta(2s)} \mathcal{A}_{2,1,s-\frac{n}{2}}(T_\gamma) \times \\ &\times \sum_{W_\gamma \in \mathcal{N}(T_\gamma)} I_{\text{Sym}_n \curvearrowright^{0_{n-1}}(\mathbb{Z})} (J, \text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma[W_\gamma]), Y[\underbrace{\text{diag}(1_{n-2}, {}^tW_\gamma^{-1})}_{= \begin{pmatrix} Y_\alpha & Y_\beta \\ {}^tY_\beta & Y_\gamma[{}^tW_\gamma^{-1}] \end{pmatrix}}]). \end{aligned}$$

4.3 Rückführung von $\mathcal{N}_{n,n-1}(T)$ auf $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ für halb- ganze symmetrische Matrizen \mathbf{T}

Für $0_n \neq T = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,1} \\ 0_{1,n-2} & T_\gamma \end{pmatrix} \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_{n-1}}(\mathbb{Z})^*$ mit $T_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{n-1,n}}{2} \\ \frac{t_{n-1,n}}{2} & 2t_{n,n} \end{pmatrix} \in$

$\text{Sym}_2^{\searrow 0_1}(\mathbb{Z})^*$ und $W \in \mathcal{N}(T)$ gibt es ein $0_n \neq \tilde{T}_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\tilde{t}_{n-1,n}}{2} \\ \frac{\tilde{t}_{n-1,n}}{2} & 2\tilde{t}_{n,n} \end{pmatrix} \in \text{Sym}_2^{\searrow 0_1}(\mathbb{Z})$

mit $T[W] =: \tilde{T} = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & 0_{n-2,1} \\ 0_{1,n-2} & \tilde{T}_\gamma \end{pmatrix} \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_{n-1}}(\mathbb{Z})^*$.

Wegen $\tilde{T} \in \text{Sym}_n^{\searrow 0_{n-1}}(\mathbb{Z})^*$ gilt also:

$$(\forall 1 \leq i, j \leq n-1) : \tilde{t}_{i,j} = 0 = w_{n-1,i}w_{n,j} \frac{t_{n-1,n}}{2} + w_{n,i}(w_{n-1,j} \frac{t_{n-1,n}}{2} + w_{n,j}t_{n,n}) \quad (87)$$

Für den Fall $i = j$ ergibt dies sofort:

$$(\forall 1 \leq i \leq n-1) : \tilde{t}_{i,i} = 0 = w_{n,i}(w_{n-1,i}t_{n-1,n} + w_{n,i}t_{n,n}) \quad (88)$$

Also gilt:

$$(\forall 1 \leq i \leq n-1) : (w_{n,i} = 0) \vee (t_{n,n} = -\frac{w_{n-1,i}t_{n-1,n}}{w_{n,i}}) \quad (89)$$

Andererseits gilt wegen $\tilde{T} \in \text{Sym}_n^{\swarrow 0_{1,n-2}}(\mathbb{Z})$ auch:

$$(\forall 1 \leq j \leq n-2) : \tilde{t}_{n,j} = 0 = w_{n-1,n}w_{n,j} \frac{t_{n-1,n}}{2} + w_{n,n}(w_{n-1,j} \frac{t_{n-1,n}}{2} + w_{n,j}t_{n,n}) \quad (90)$$

Alle $W \in GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$ sind in der Nebenklasse von $1_n GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$. Wir untersuchen nun Matrizen $W \notin GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$, für welche es also ein $\tau \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt mit $w_{n,\tau} \neq 0$, woraus mit (88) folgt:

$$t_{n,n} = -\frac{w_{n-1,\tau}t_{n-1,n}}{w_{n,\tau}} \quad (91)$$

Lemma 4.3.1 Falls T von der Form (6) mit $\text{Rg}(T) = 1$ ist, dann enthält $\mathcal{N}(T)$ ausschließlich die Nebenklasse $1_n GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$.

Bew.: $\xRightarrow{\text{Rg}(T)=1} (t_{n-1,n} = 0 \wedge t_{n,n} \neq 0)$

Annahme $\rightarrow (\exists W \in \mathcal{N}(T)) : W \notin GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$

$$\Rightarrow (\exists 1 \leq \tau \leq n-1) : w_{n,\tau} \neq 0$$

$$\stackrel{(91) \wedge t_{n-1,n}=0}{\Rightarrow} t_{n,n} = 0$$

Für $Rg(T) = 1$ gilt aber notwendiger Weise $t_{n,n} \neq 0$.

$$\Rightarrow (\forall W \in \mathcal{N}(T)) : (1 \leq \tau \leq n-1) : w_{n,\tau} = 0$$

$$\Rightarrow W \in GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow (\forall W \in \mathcal{N}(T)) : W \in 1_n GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z}).$$

q.e.d.

Lemma 4.3.2 Falls T von der Form (6) mit $Rg(T) = 2$ ist, dann gibt es zu jedem $W \in \mathcal{N}(T)$ ein $V_\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$ mit $W \in \text{diag}(1_{n-2}, V_\gamma) GL_n^{\swarrow 0_{1,n-1}}(\mathbb{Z})$ und $T[W] = T[\text{diag}(1_{n-2}, V_\gamma)]$.

Bew.: $\stackrel{Rg(T)=2}{\Rightarrow} t_{n-1,n} \neq 0$

Für $n=2$ ist die Behauptung sofort klar. Sei nun $n > 2$, so kann man aufgrund der Anmerkung in Definition 1.3.4 annehmen, daß jedes $W \in \mathcal{N}(T)$ auch in \mathcal{H}_{n-2}^n ist.

$$\stackrel{(89)}{\Rightarrow} (w_{n,n-2} = 0) \vee (t_{n,n} = -\frac{w_{n-1,n-2}t_{n-1,n}}{w_{n,n-2}})$$

1. Fall $\rightarrow w_{n,n-2} = 0$:

$$\stackrel{(87) \wedge (90)}{\Rightarrow} (\forall 1 \leq i \leq n) : \tilde{t}_{i,n-2} = 0 = w_{n,i} w_{n-1,n-2} t_{n-1,n}$$

$$\stackrel{t_{n-1,n} \neq 0}{\Rightarrow} w_{n,i} w_{n-1,n-2} = 0$$

$$\Rightarrow (w_{n-1,n-2} = 0) \vee ((\forall 1 \leq i \leq n) : w_{n,i} = 0)$$

$$\stackrel{W \in GL_n(\mathbb{Z})}{\Rightarrow} w_{n-1,n-2} = 0.$$

Für $n > 3$ ist also $w_{n,n-3} = 0$. Aus den gleichen Gründen, nach denen aus $w_{n,n-2} = 0$ folgt $w_{n-1,n-2} = 0$, ist nun auch $w_{n-1,n-3} = 0$. Somit hat man $W \in \mathcal{H}_{n-2}^n \cap GL_n^{\swarrow 0_{2,n-2}}(\mathbb{Z})$.

2. Fall $\rightarrow w_{n,n-2} \neq 0$: (also $t_{n,n} = -\frac{w_{n-1,n-2}t_{n-1,n}}{w_{n,n-2}}$)

$$\stackrel{(87)\wedge(90)}{\Rightarrow} (\forall 1 \leq i \leq n) : \tilde{t}_{i,n-2} = 0 = t_{n-1,n}w_{n-1,i}w_{n,n-2}$$

$$\stackrel{w_{n,n-2}t_{n-1,n} \neq 0}{\Rightarrow} (\forall 1 \leq i \leq n) : w_{n-1,i} = 0 \Rightarrow \det(W) = 0$$

Dies widerspricht aber der Tatsache, daß $W \in GL_n(\mathbb{Z})$. Somit gibt es kein solches W mit $w_{n-1,n-2} \neq 0$.

Wir haben also ein $W \in GL_n^{\swarrow 02,n-2}(\mathbb{Z})$, welches wir in der Form $W = \begin{pmatrix} W_\alpha & W_\beta \\ 0_{2,n-2} & W_\gamma \end{pmatrix} \in GL_n^{\swarrow 02,n-2}(\mathbb{Z})$ mit $W_\alpha \in GL_{n-2}(\mathbb{Z})$, $W_\beta \in M_{n-2,2}(\mathbb{Z})$ und $W_\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$ schreiben. Wir definieren nun $P := \begin{pmatrix} W_\alpha^{-1} & -W_\alpha^{-1}W_\beta \\ 0_{2,n-2} & 1_2 \end{pmatrix} \in GL_n^{\swarrow 01,n-1}(\mathbb{Z})$. Nun leistet $V := WP = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & W_\gamma \end{pmatrix}$ das Gewünschte.

q.e.d.

Lemma 4.3.3 Seien $W = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & W_\gamma \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & V_\gamma \end{pmatrix}$ mit $V_\gamma, W_\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$ und $W \in VGL_n^{\swarrow 01,n-1}(\mathbb{Z})$. Dann gilt:

$$W_\gamma \in V_\gamma GL_2^{\swarrow 01}(\mathbb{Z}) \quad (92)$$

Bew: Sei $P = \begin{pmatrix} P_\alpha & P_\beta \\ P_\delta & P_\gamma \end{pmatrix} \in GL_n^{\swarrow 01,n-1}(\mathbb{Z})$ mit $P_\alpha \in M_{n-2}(\mathbb{Z})$, $P_\beta \in M_{n-2,2}(\mathbb{Z})$, $P_\delta \in M_{2,n-2}(\mathbb{Z})$, $P_\gamma \in M_2(\mathbb{Z})$ und $W = VP$.

Dann gelten sofort $P_\alpha = 1_n$, $P_\beta = 0_{n-2,2}$, $P_\delta = 0_{2,n-2}$ und $P_\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$. Wegen $P \in GL_n^{\swarrow 01,n-1}(\mathbb{Z})$ ist insbesondere $p_{n,n-1} = 0$, also auch $P_\gamma \in GL_2^{\swarrow 01}(\mathbb{Z})$. Die Behauptung folgt sofort aus $W = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & V_\gamma P_\gamma \end{pmatrix}$.

q.e.d.

Satz 4.3.4 Sei $Sym_n^{\wedge n-1}(\mathbb{Z})^* \ni T = \text{diag}(0_{n-2}, T_\gamma) \neq 0_n$ mit $T_\gamma := \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{n-1,n}}{2} \\ \frac{t_{n-1,n}}{2} & t_{n,n} \end{pmatrix}$ für $t_{n-1,n}, t_{n,n} \in \mathbb{Z}$, so gibt es zu $\mathcal{N}_{n,n-1}(T)$ ein äquivalentes $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$. D.h. zu jedem $N \in \mathcal{N}_{n,n-1}(T)$ gibt es genau ein $N_\gamma \in \mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ mit $T[N] = \text{diag}(1_{n-2}, T_\gamma[N_\gamma])$.

Bew.: Wegen 4.3.1 und 4.3.2 wissen wir, daß zu jedem $N \in \mathcal{N}(T)$ ein $N_\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})$ gibt, so daß $N \in \text{diag}(1_{n-2}, N_\gamma)GL_n^{\swarrow 01,n-1}(\mathbb{Z})$.

Wegen 4.3.3 können wir $\text{diag}(1_{n-2}, N_\gamma)$ aus den Nebenklassen

$$\{\text{diag}(1_{n-2}, U_\gamma) \mid U_\gamma \in GL_2(\mathbb{Z})/GL_2^{\swarrow 01}(\mathbb{Z}) \text{ mit } T[U] \in \mathcal{H}_{n-2}^n \cap Sym_n^{\wedge n-1}(\mathbb{Z})^*\}$$

annehmen und uns somit auf ein entsprechendes $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ zurückziehen.

q.e.d.

Anmerkung 4.3.5 Wir können mit 4.3.4 ein Nebenklassensystem $\mathcal{N}_{n,n-1}(T)$ mit einem entsprechenden $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ identifizieren.

Genauso können wir ein $T \in \mathcal{H}_{n-2}^n \cap \text{Sym}_n^{\setminus 0_{n-1}}(\mathbb{Z})$ mit einem $T_\gamma \in \text{Sym}_2^{\setminus 0_1}(\mathbb{Z})$ identifizieren. Offensichtlich kann man für $Y = \begin{pmatrix} Y_\alpha & Y_\beta \\ {}_tY_\beta & Y_\gamma \end{pmatrix}$ und $U = \begin{pmatrix} 1_{n-2} & 0_{n-2,2} \\ 0_{2,n-2} & U_\gamma \end{pmatrix}$ mit $U_\gamma \in \mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ folgende Vereinfachung treffen: $Y[{}^tU^{-1}] = \begin{pmatrix} Y_\alpha & Y_\beta \\ {}_tY_\beta & Y_\gamma[{}^tU_\gamma^{-1}] \end{pmatrix}$.

4.4 Das System $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ für halbganze symmetrische Matrizen T_γ

Lemma 4.4.1 Sind $T_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & g\frac{t}{2} \\ g\frac{t}{2} & gp \end{pmatrix}$ mit $g, t, p \in \mathbb{Z}$, $ggT(p, t) = 1$, $Rg(T_\gamma) \neq 0$ und $V_\gamma = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix}$ aus $\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$, so gilt:

$$pt \neq 0 \Rightarrow ((v_3 = 0) \vee (|v_3| = |t|)) \quad (93)$$

$$t = 0 \Rightarrow v_3 = 0 \quad (94)$$

$$p = 0 \Rightarrow \left((v_3 = 0) \vee \left(V_\gamma \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z}) \right) \right) \quad (95)$$

Bew: ad (93): Es sei also $pt \neq 0$.

Annahme $\rightarrow v_3 \neq 0$

$$\stackrel{(89)}{\Rightarrow} \left(p = -\frac{v_1}{v_3}t \in \mathbb{Z} \right) \stackrel{ggT(v_1, v_3)=1}{\Rightarrow} (v_3 | t)$$

Wegen $p \neq 0$ ist auch $v_1 \neq 0$, womit mit (89) gilt: $(v_1 = -v_3\frac{p}{t} \in \mathbb{Z})$

$$\stackrel{ggT(p, t)=1}{\Rightarrow} (t | v_3)$$

q.e.d.

ad (94): vgl. 4.3.1.

ad (95): Es sei also $p = 0 \wedge t \neq 0$.

Annahme $\rightarrow v_3 \neq 0$

$$\stackrel{(88) \wedge p=0 \wedge t \neq 0}{\Rightarrow} v_1 v_3 = 0$$

$$\Rightarrow V_\gamma \in GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z})$$

Es gibt also o.B.d.A. ein $d \in \mathbb{Z}$, so daß $V_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$.

Wähle hierzu $P := \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z})$, dann gilt: $V_\gamma P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Damit ist $V_\gamma \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z})$. q.e.d.

q.e.d.

Anmerkung 4.4.2 Für $Rg(T_\gamma) = 0$ ist $\mathcal{N}(T_\gamma) = GL_2(\mathbb{Z})/GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z})$. Aus (94) und (95) folgt sofort, daß $\mathcal{N}(T_\gamma)$ für $t = 0$ o.B.d.A. nur die Matrix 1_2 bzw. für $t \neq 0 \wedge p = 0$ o.B.d.A. nur die Matrizen 1_2 und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ enthält. Es bleibt nur noch $\mathcal{N}(T_\gamma)$ zu beschreiben für $pt \neq 0$.

Satz 4.4.3 Sei $T_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & g\frac{t}{2} \\ g\frac{t}{2} & gp \end{pmatrix}$ mit $t, p, g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $ggT(t, p) = 1$.

Dann ist:

$$\mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma) \equiv \begin{cases} GL_2(\mathbb{Z})/GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z}) & : Rg(T_\gamma) = 0 \\ \{1_2\} & : Rg(T_\gamma) = 1 \\ \left\{ 1_2, \begin{pmatrix} -p & b \\ t & d \end{pmatrix} \right\} & : Rg(T_\gamma) = 2 \end{cases}$$

Dabei wähle man im gegebenen Fall mit b, d eine einzige der Lösungen für die diophantische Gleichung $-px - ty = 1$ aus.

Bew.: Die ersten zwei Fälle folgen aus der vorherigen Anmerkung. Nun sei also $Rg(T_\gamma) = 2$. Falls dabei $pg = 0$, so gilt wegen der Rangbedingung $g \neq 0$, womit $p = 0$ und $t = 1$. In der vorherigen Anmerkung wurde angegeben, daß die Lösung in diesem Fall nur die Einheitsmatrix 1_2 und die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & b \\ t & d \end{pmatrix}$ enthält und somit der hier angegebenen Lösung entspricht.

Wir können nun annehmen $pt \neq 0$ und $Rg(T) = 2$. Alle $V_\gamma \in \mathcal{N}_{2,1}(T_\gamma)$ mit $v_3 = 0$ sind durch 1_2 abgedeckt. Und somit sind die restlichen für $v_3 \neq 0$ gemäß (93) gekennzeichnet durch $|t| = |v_3|$, womit $v_3 \in \{-t, t\}$.

Gemäß (91) ist nun auch $v_1 = -\frac{pv_3}{t}$, also $(v_1, v_3) \in \{(-p, t), (p, -t)\}$

Beide Möglichkeiten für die erste Spalte lassen sich mit $b, d \in \mathbb{Z}$ zu einer 2-dimensionalen Modulmatrix ergänzen, so daß gleichzeitig die diophantische Gleichung $-px - ty = 1$ bzw. $px + ty = 1$ erfüllt ist. Für eine Lösung (b, d) der ersten Gleichung ist $(-b, -d)$ Lösung der zweiten. Wegen

$$\begin{pmatrix} -p & b \\ t & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & -b \\ -t & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sind dies modulo $GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z})$ die gleichen Ergebnisse, wodurch man sich auf die Ergebnisse der ersten Gleichung beschränken kann.

Aber bei festen (v_1, v_3) sind auch die verschiedenen Ergebnisse der ersten Gleichung modulo $GL_2^{\not\sim 01}(\mathbb{Z})$ identisch. Eine Lösung der diophantischen Gleichung $-px - ty = 1$ konstituiert also die neben 1_2 einzige weitere (verschiedene) Lösungsmatrix.

q.e.d.

4.5 Der archimedische Anteil als konfluente hypergeometrische Funktion

Lemma 4.5.1 Für $t, v \in \mathbb{Z}$ mit $tv \neq 0$ seien $-\frac{v}{2t} =: p \in \mathbb{Q}$, $P := \text{diag} \left(1_{n-2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix} \right)$, $T := \text{diag} \left(0_{n-2}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & v \end{pmatrix} \right)$ und $\tilde{T} = T[{}^tP] := \text{diag} \left(0_{n-2}, \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \right)$. Dann gilt:

$$I_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T, Y) = I_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, \tilde{T}, Y[P^{-1}]) \quad (96)$$

Bew.: Offensichtlich ist $P^{-1} = \text{diag} \left(1_{n-2}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix} \right)$ und es gilt:

$$e(TX) = e(TX[P^{-1}P]) = e(T[{}^tP]X[P^{-1}]) = e(\tilde{T}X[P^{-1}]) \quad (97)$$

Die Matrizen $X \in Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{Z})$ und $X[P]$ unterscheiden sich nur in 3 Einträgen, anstatt $x_{n,n-1} = x_{n-1,n}$ steht an den entsprechenden Stellen von $X[P]$ jeweils der Eintrag $x_{n,n-1} + px_{n,n}$ und statt $x_{n-1,n-1} = 0$ steht $p^2x_{n,n} + 2x_{n-1,n}$. Es sei nun $\widehat{X[P]}$ bis auf das $(n-1)$ -te Diagonalelement identisch mit $X[P]$, dort hingegen trage $\widehat{X[P]}$ den Wert Null. Dann gibt es offensichtlich eine Bijektion zwischen $Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})$ und dem Raum der mittels der obigen Operation gebildeten Matrizen $\widehat{X[P]}$. Nun gilt wegen (33), daß:

$$\begin{aligned} & \int_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})[P]} \det \left(((Y[P^{-1}])^{-1}[X] + Y[P^{-1}]) \left[\begin{pmatrix} 0_n & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} e(\tilde{T}X) dX = \\ & = \int_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})} \det \left(((Y[P^{-1}])^{-1}[X] + Y[P^{-1}]) \left[\begin{pmatrix} 0_n & -1 \\ & 1 \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} e(\tilde{T}X) dX \end{aligned} \quad (98)$$

da die Funktionaldeterminante gleich Eins ist.

Somit haben wir:

$$\begin{aligned} & I_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T, Y) \stackrel{(97)}{=} \int_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s}(J, X + iY) e(\tilde{T}X[P^{-1}]) dX = \\ & = \int_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})} \det \left((Y^{-1}[{}^tP{}^tP^{-1}X] + Y) [P^{-1} \begin{pmatrix} 0_n & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}] \right)^{-s} e(\tilde{T}X[P^{-1}]) dX = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} \det \left(((Y[P^{-1}])^{-1}[X[P^{-1}]] + Y[P^{-1}]) \left[\begin{pmatrix} 0_n & \\ & -1 \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} e \left(\tilde{T}X [P^{-1}] \right) dX = \\
&= \underbrace{\det(P)^2}_{=1} \int_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})[P]} \det \left(((Y[P^{-1}])^{-1}[X] + Y[P^{-1}]) \left[\begin{pmatrix} 0_n & \\ & -1 \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} e \left(\tilde{T}X \right) dX = \\
&\stackrel{(98)}{=} \int_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} \det \left(((Y[P^{-1}])^{-1}[X] + Y[P^{-1}]) \left[\begin{pmatrix} 0_n & \\ & -1 \end{pmatrix} \right] \right)^{-s} e \left(\tilde{T}X \right) dX = \\
&= \int_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} \phi_{n,r,s} (J, X + iY[P^{-1}]) e \left(\tilde{T}X \right) dX = \\
&= I_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} \left(J, \tilde{T}, Y[P^{-1}] \right).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Lemma 4.5.2 Sei im Fall $r = n - 1$ die Matrix $T \in Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{Z})^* \cap Sym_n \overset{\curvearrowleft}{\setminus} 0_{1,m-1}(\mathbb{Z})^*$ und man definiere zu $Y(1) := Y^{-1}$ analog zu (1.4.3) die Matrizen $Y(m)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
I_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} (J, T, Y) &= \sqrt{\pi}^{m-1} \frac{\Gamma(s - \frac{m-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}^{n-(m-1)}} \left(y_{n,n} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j} + \sum_{k=m}^n \sum_{l=m}^n x_{n,k} x_{n,l} y(m)_{k,l} \right)^{\frac{m-1}{2} - s} \times \\
&\times e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) \prod_{\mu=m}^n dx_{n,\mu} \quad (99)
\end{aligned}$$

Bew.: Durch Induktion. (I) $m = 1$:

Nach Definition gilt: $I_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} (J, T, Y) =$

$$\begin{aligned}
&= \int_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} e(TX) \phi_{n,n-1,s} (J, X + iY) dX = \\
&= \int_{Sym_n \overset{\curvearrowright}{\setminus} 0_{n-1}(\mathbb{R})} e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) ((Y(1)[X])_4 + y_{n,n})^{-s} \prod_{\mu=m}^n dx_{n,\mu} =
\end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=m}^n \sum_{l=m}^n x_{n,k} x_{n,l} y(m)_{k,l} + y_{n,n} \right)^{-s} e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) \prod_{\mu=m}^n dx_{n,\mu}$$

Wegen $\sqrt{\pi}^{m-1} \frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} \stackrel{m=1}{=} 1$ gilt die Behauptung.

(II) Es gelte die Behauptung für beliebiges, aber fixiertes $1 \leq m < n$.

(III) $m \rightarrow m+1$: Nach (II) gilt: $I_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{Z})}(J, T, Y) =$

$$= \sqrt{\pi}^{m-1} \frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-(m-1)}} e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) \times \\ \times \left(y_{n,n} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j} + \sum_{k=m}^n \sum_{l=m}^n x_{n,k} x_{n,l} y(m)_{k,l} \right)^{\frac{m-1}{2}-s} \prod_{\mu=m}^n dx_{n,\mu} =$$

$$\stackrel{\dot{t}_{n,m}=0}{=} \sqrt{\pi}^{m-1} \frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-(m-1)}} e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m+1}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) \times \\ \times \left(y_{n,n} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j} + \sum_{k=m}^n \sum_{l=m}^n x_{n,k} x_{n,l} y(m)_{k,l} \right)^{\frac{m-1}{2}-s} \prod_{\mu=m}^n dx_{n,\mu} =$$

$$= \sqrt{\pi}^{m-1} \frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-(m-1)}} e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m+1}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) \times \\ \times (x_{n,m}^2 \alpha + 2x_{n,m} \beta + \gamma)^{\frac{m-1}{2}-s} \prod_{\mu=m}^n dx_{n,\mu}$$

Mit $\alpha := y(m)_{m,m} > 0$, $\beta := \sum_{l=m+1}^n x_{n,l} y(m)_{m,l}$ und

$$\gamma := y_{n,n} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j} + \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n x_{n,k} x_{n,l} y(m)_{k,l}.$$

Nach (78) gilt nun: $I_{Sym_n \setminus^{0_{n-1}}(\mathbb{R})}(J, T, Y) =$

$$= \sqrt{\pi}^{m-1} \frac{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-(m)}} e \left(t_{n,n} x_{n,n} + \sum_{i=m+1}^{n-1} 2t_{i,n} x_{i,n} \right) \times \\ \times \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s-\frac{m}{2})}{\Gamma(s-\frac{m-1}{2})} \underbrace{\alpha^{s-\frac{m-1}{2}-1}}_{=y(m)_{m,m}^{\frac{m+1}{2}}} (\alpha\gamma - \beta^2)^{\frac{1}{2}-(s-\frac{m-1}{2})} \prod_{\mu=m+1}^n dx_{n,\mu} =$$

$$= \sqrt{\pi}^m \frac{\Gamma(s-\frac{m}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^m y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-(m)}} e\left(t_{n,n}x_{n,n} + \sum_{i=m+1}^{n-1} 2t_{i,n}x_{i,n}\right) \times \\ \times (\alpha\gamma - \beta^2)^{\frac{1}{2}-(s-\frac{m-1}{2})} \prod_{\mu=m+1}^n dx_{n,\mu}$$

Mit $\frac{1}{2} - (s - \frac{m-1}{2}) = \frac{m}{2} - s$ bleibt zu zeigen, daß $\alpha\gamma - \beta^2 > 0$ mit dem Wert:

$$y_{n,n} \prod_{j=1}^m y(j)_{j,j} + \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n x_{n,k}x_{n,l}y(m+1)_{k,l}$$

Nun gilt aber: $\alpha\gamma - \beta^2 =$

$$= y(m)_{m,m} \left(y_{n,n} \prod_{j=1}^{m-1} y(j)_{j,j} + \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n x_{n,k}x_{n,l}y(m)_{k,l} \right) - \left(\sum_{l=m+1}^n x_{n,l}y(m)_{m,l} \right)^2 = \\ = y_{n,n} \prod_{j=1}^m y(j)_{j,j} + \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n x_{n,k}x_{n,l} \underbrace{(y(m)_{m,m}y(m)_{k,l} - y(m)_{m,l}y(m)_{m,k})}_{=y(m+1)_{k,l}} \\ = y_{n,n} \prod_{j=1}^m y(j)_{j,j} + \sum_{k=m+1}^n \sum_{l=m+1}^n x_{n,k}x_{n,l}y(m+1)_{k,l} > 0.$$

q.e.d.

Korollar 4.5.3 Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $T := \text{diag}(0_{n-1}, t)$. Dann gilt:

$$I_{\text{Sym}_n \setminus 0_{n-1}(\mathbb{R})}(J, T, Y) = \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} P_\tau(Y(1)) \times \\ \times \xi_1 \left(y_{n,n} P_{\tilde{\tau}}(Y(1)), t, s - \frac{n-1}{2}, s - \frac{n-1}{2} \right) \quad (100)$$

mit $\tau = \tau(1) + \tau(2)$ und $\tilde{\tau}$ wie folgt:

$$\tau(1) = \left(s - \frac{2}{2} + 2^{(n-3) \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, \dots, s - \frac{n-1}{2} + 2^{0 \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, s - \frac{n}{2}, \frac{n-1}{2} - s \right) \quad (101)$$

$$\tau(2) = \left(\sum_{j=3}^{n-1} 2^{(j-3) \cdot (s - \frac{j+1}{2})}, \dots, \sum_{j=n-1}^{n-1} 2^{(j-3) \cdot (s - \frac{j+1}{2})}, 0, 0, 0 \right) \quad (102)$$

$$\tilde{\tau} = \left(1 - 2^{n-2} + \sum_{j=3}^{n-1} 2^{j-3}, \dots, 1 - 2^1 + \sum_{j=n-1}^{n-1} 2^{j-3}, 0, 1, -1 \right) \quad (103)$$

$$\begin{aligned}
\text{Bew.: } I_{\text{Sym}_{n \setminus 0_{n-1}(\mathbb{Z})}}(J, T, Y) &\stackrel{(99)}{=} \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}} e(tx_{n,n}) \left(y_{n,n} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j} + x_{n,n}^2 y(n)_{n,n} \right)^{\frac{n-1}{2} - s} dx_{n,n} = \\
&= \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2} - s} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}} e(tx_{n,n}) \left(\frac{y_{n,n} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}} + x_{n,n}^2 \right)^{\frac{n-1}{2} - s} dx_{n,n} = \\
&= \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2} - s} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \times \\
&\times \int_{\mathbb{R}} e(tx_{n,n}) \left(\underbrace{\frac{y_{n,n} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}}}_{>0} + x_{n,n}^2 \right)^{\frac{n-1}{2} - s} dx_{n,n} = \\
&= \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2} - s} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \xi_1 \left(\frac{y_{n,n} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}}, t, s - \frac{n-1}{2}, s - \frac{n-1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, daß $P_\tau(Y(1)) = y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2} - s} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}}$ und $P_{\tilde{\tau}}(Y(1)) =$

$$\frac{\prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}}.$$

Für erstere gilt nach (19):

$$\begin{aligned}
y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2} - s} \prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} &= P_{\underbrace{(2^{(n-3) \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, \dots, 2^{0 \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, 0, \frac{n-1}{2} - s)}_{(n-2) \times 2^{(n-2 - \text{Spaltenr.}) \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}})}(Y(1)) \times \\
&\times \underbrace{y(1)_{1,1}^{s-1} y(2)_{2,2}^{s - \frac{3}{2}}}_{\stackrel{(13) \wedge (14)}{=} P_{(s-1, s - \frac{3}{2}, 0, \dots, 0)}(Y(1))}} \prod_{j=3}^{n-1} P_{\underbrace{(2^{(j-3) \cdot (s - \frac{j+1}{2})}, \dots, 2^{0 \cdot (s - \frac{j+1}{2})}, 0, s - \frac{j+1}{2}, 0, \dots, 0)}_{(j-2) \times 2^{(j-2 - \text{Spaltenr.}) \cdot (s - \frac{j+1}{2})}}}_{(n-j) \times 0}}(Y(1)) = \\
&= P_{(s-1+2^{(n-3) \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, s - \frac{3}{2} + 2^{(n-4) \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, 2^{(n-5) \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, \dots, 2^{0 \cdot (\frac{n-1}{2} - s)}, 0, \frac{n-1}{2} - s)}(Y(1)) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{i=3}^{n-1} P_{\underbrace{(0, \dots, 0)_{(i-1) \times 0}, \underbrace{0, s - \frac{i+1}{2}, 0, \dots, 0}_{(n-i) \times 0}}_{=P_{(0,0, s-\frac{4}{2}, s-\frac{5}{2}, \dots, s-\frac{n}{2}, 0)}(Y(1))}}(Y(1)) \prod_{j=3}^{n-1} P_{\underbrace{(2^{(j-3) \cdot (s-\frac{i+1}{2})}, \dots, 2^{0 \cdot (s-\frac{i+1}{2})}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+2-j) \times 0})}_{(n+2-j) \times 0}}(Y(1)) = \\
& = P_{\underbrace{(s-\frac{n}{2}+2)^{(n-3) \cdot (\frac{n-1}{2}-s)}, s-\frac{3}{2}+2^{(n-4) \cdot (\frac{n-1}{2}-s)}, \dots, s-\frac{n-1}{2}+2^{0 \cdot (\frac{n-1}{2}-s)}, s-\frac{n}{2}, \frac{n-1}{2}-s)}_{=:P_{\tau(1)}(Y((1)))}}(Y(1)) \times \\
& \times \prod_{j=3}^{n-1} P_{\underbrace{(2^{(j-3) \cdot (s-\frac{i+1}{2})}, \dots, 2^{0 \cdot (s-\frac{i+1}{2})}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+2-j) \times 0})}_{(n+2-j) \times 0}}(Y(1)) = P_{\tau(1)}(Y((1))) \times \\
& \underbrace{P_{\left(\sum_{j=3}^{n-1} 2^{(j-3) \cdot (s-\frac{i+1}{2})}, \dots, \sum_{j=n-1}^{n-1} 2^{(j-3) \cdot (s-\frac{i+1}{2})}, 0, 0, 0\right)}}_{=:P_{\tau(2)}(Y((1)))}}(Y(1)) = P_{\tau(1)+\tau(2)}(Y((1)))
\end{aligned}$$

Für letzteres gilt gemäß (18):

$$\begin{aligned}
& \frac{\prod_{j=1}^{n-1} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}} = y(1)_{1,1} y(2)_{2,2} \frac{\prod_{j=3}^{n-1} P_{\left(\underbrace{2^{j-3}, \dots, 2^0}_{(j-2) \times 2^{j-2} \text{-Spaltennr.}}, \underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{(n-j) \times 0}\right)}(Y(1))}{P_{\left(\underbrace{2^{n-3}, \dots, 2^0}_{(n-2) \times 2^{n-2} \text{-Spaltennr.}}, 0, 1\right)}(Y(1))} = \\
& = \underbrace{y(1)_{1,1} y(2)_{2,2}}_{\stackrel{(13) \wedge (14)}{=} P_{(1,1,0, \dots, 0)}(Y(1))} P_{(0,0,1, \dots, 1, -1)}(Y(1)) \frac{\prod_{j=3}^{n-1} P_{\left(\underbrace{2^{j-3}, \dots, 2^0}_{(j-2) \times 2^{j-2} \text{-Spaltennr.}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n+2-j) \times 0}\right)}(Y(1))}{P_{\left(\underbrace{2^{n-3}, \dots, 2^0}_{(n-2) \times 2^{n-2} \text{-Spaltennr.}}, 0, 0\right)}(Y(1))} = \\
& = P_{(1, \dots, 1, -1)}(Y(1)) P_{\left(-2^{n-2} + \sum_{j=3}^{n-1} 2^{j-3}, \dots, -2^1 + \sum_{j=n-1}^{n-1} 2^{j-3}, -2^0, 0, 0\right)}(Y(1)) = \\
& = P_{\left(1-2^{n-2} + \sum_{j=3}^{n-1} 2^{j-3}, \dots, 1-2^1 + \sum_{j=n-1}^{n-1} 2^{j-3}, \underbrace{1-2^0}_{=0}, 1, -1\right)}(Y(1))
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 4.5.4 Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei $T := \text{diag} (0_{n-2}, \binom{0}{t} \ 0)$. Dann gilt:

$$I_{\text{Sym}_n \setminus 0_{n-1}(\mathbb{R})}(J, T, Y) = \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} P_\tau(Y(1)) \frac{P_{(0, \dots, 0, s - \frac{n}{2}, 0)}(Y(1))}{P_{(0, \dots, 0, s - \frac{n}{2}, 0)}(Y(1)[V_{n, n-1}])} \times \\ \times \xi_1 \left(\frac{y_{n,n} P_{\tilde{\tau}}(Y(1)) P_{(0, \dots, 0, 1, 0)}(Y(1))}{P_{(0, \dots, 0, 1, 0)}(Y(1)[V_{n, n-1}])}, 2t, s - \frac{n-1}{2}, s - \frac{n-1}{2} \right) \quad (104)$$

Hier sind τ und $\tilde{\tau}$ gemäß (100) definiert.

$$\text{Bew.: } I_{\text{Sym}_n \setminus 0_{n-1}(\mathbb{Z})}(J, T, Y) \stackrel{(99)}{=} \sqrt{\pi}^{n-2} \frac{\Gamma(s - \frac{n-2}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} e(2tx_{n,n-1}) \times \\ \times \left(y_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j} + \sum_{k=n-1}^n \sum_{l=n-1}^n x_{n,k} x_{n,l} y(n-1)_{k,l} \right)^{\frac{n-2}{2} - s} dx_{n,n-1} dx_{n,n} = \\ \stackrel{(78)}{=} \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e(2tx_{n,n-1}) \alpha^{s - \frac{n-2}{2} - 1} (\alpha\gamma - \beta^2)^{\frac{1}{2} - (s - \frac{n-2}{2})} dx_{n,n-1}$$

dabei sind $\alpha = y(n-1)_{n,n} > 0$, $\beta = y(n-1)_{n,n-1} x_{n,n-1}$ und $\gamma = y_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j} +$

$y(n-1)_{n-1,n-1} x_{n,n-1}^2$.

Es gilt nun: $\alpha\gamma - \beta^2 =$

$$= y_{n,n} y(n-1)_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j} + x_{n,n-1}^2 \underbrace{\left(y(n-1)_{n,n} y(n-1)_{n-1,n-1} - y(n-1)_{n,n-1}^2 \right)}_{=y(n)_{n,n}}$$

$$= y_{n,n} y(n-1)_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j} + x_{n,n-1}^2 y(n)_{n,n} > 0$$

Somit haben wir: $I_{\text{Sym}_n \setminus 0_{n-1}(\mathbb{Z})}(J, T, Y) = \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \times$

$$\times \int_{\mathbb{R}} e(2tx_{n,n-1}) y(n-1)_{n,n}^{s - \frac{n}{2}} \left(y_{n,n} y(n-1)_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j} + x_{n,n-1}^2 \underbrace{y(n)_{n,n}}_{>0} \right)^{\frac{n-1}{2} - s} dx_{n,n-1} =$$

$$= \sqrt{\pi}^{n-1} \frac{\Gamma(s - \frac{n-1}{2})}{\Gamma(s)} y(n-1)_{n,n}^{s - \frac{n}{2}} y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2} - s} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}^{s - \frac{j+1}{2}} \times$$

$$\times \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e(2tx_{n,n-1}) \left(\frac{y_{n,n}y(n-1)_{n,n} \prod_{k=1}^{n-2} y(k)_{k,k}}{y(n)_{n,n}} + x_{n,n-1}^2 \right)^{\frac{n-1}{2}-s} dx_{n,n-1}}_{= \xi_1 \left(\frac{y_{n,n}y(n-1)_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}}, 2t_{n,n-1}, s - \frac{n-1}{2}, s - \frac{n-1}{2} \right)}$$

$$\text{Es gilt: } y(n-1)_{n,n}^{s-\frac{n}{2}} y(n)_{n,n}^{\frac{n-1}{2}-s} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}^{s-\frac{j+1}{2}} = P_{\tau}(Y(1)) \frac{y(n-1)_{n-1,n-1}^{s-\frac{n}{2}}}{\tilde{y}(n-1)_{n-1,n-1}^{s-\frac{n}{2}}} =$$

$$\stackrel{(19)}{=} P_{\tau}(Y(1)) \frac{P_{(0,\dots,0,s-\frac{n}{2},0)}(Y(1))}{P_{(0,\dots,0,s-\frac{n}{2},0)}(Y(1)[V_{n,n-1}]}$$

$$\text{Genauso gilt: } \frac{y(n-1)_{n,n} \prod_{j=1}^{n-2} y(j)_{j,j}}{y(n)_{n,n}} = P_{\tilde{\tau}}(Y(1)) \frac{y(n-1)_{n,n}}{y(n-1)_{n-1,n-1}} =$$

$$\stackrel{(18)}{=} P_{\tilde{\tau}}(Y(1)) \frac{P_{(0,\dots,0,1,0)}(Y(1))}{P_{(0,\dots,0,1,0)}(Y(1)[V_{n,n-1}]}$$

q.e.d.

4.6 Zusammenfassung

Die Fourierkoeffizienten $\alpha_{n,n-1,s}(T, Y)$ sind somit bestimmt. Wegen Korollar 2.4.2 gilt für Koeffizientenmatrizen, welche nicht mittels unimodularer Ähnlichkeitstransformation auf die Form (6) gebracht werden können (also insbesondere wenn $Rg(T) > 2$), daß $\alpha_{n,n-1,s}(T, Y) = 0$.

Für die restlichen Matrizen gibt es nun aber ein $U \in GL_n(Z)$, so daß $T[U]$ in der Standardform (6) vorliegt. Wegen (48) kann man aber o.B.d.A. davon ausgehen, daß T bereits in Standardform (6) ist.

Bezüglich dieser Form muß man nun die verschiedenen Ränge von T unterscheiden. Bei einem Nullrang gilt mit Satz 4.1.2:

$$\alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) = \frac{1}{\zeta(2s)} \left(Z(Y^{-1}, s) + \det(Y)^{\frac{1}{2}} Z\left(Y, s - \frac{n}{2}\right) \tilde{f}_{n,n-1,s} \right)$$

Hier kommt neben der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$, der Epsteinschen Zetafunktion $Z(Y, s)$ auch der in (83) definierte Faktor $\tilde{f}_{n,n-1,s}$ vor, welcher ein Produkt aus π -Potenzen sowie aus Gammafaktoren ist.

Ausgehend von der Funktionalgleichung der Epsteinschen Zetafunktion und der Funktion $\Lambda(s) := \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(2s)$ konnten wir für den nullten Fourierkoeffizienten in (84) folgende Funktionalgleichung formulieren:

$$\Lambda(s) \alpha_{n,n-1,s}(0_n, Y) = \Lambda(n-s) \alpha_{n,n-1,n-s}(0_n, Y)$$

Für die anderen Fourierkoeffizienten ist dies nicht explizit gelungen. Aber wir können sie auch in Funktionen ausdrücken, welche selbst wiederum Funktionalgleichungen erfüllen, so daß sich in der Gesamtheit die in [20] formulierte Funktionalgleichung $\Lambda(s) E_{n,n-1}(Z, s) = \Lambda(n-s) E_{n,n-1}(Z, s)$ ergeben sollte. Bei der Darstellung der anderen Fourierkoeffizienten berücksichtigen wir, daß man von Koeffizientenmatrizen T (vom Rang Eins oder Zwei) ausgehen kann, welche von folgender Form sind:

$$T = \begin{pmatrix} 0_{2r-n} & 0_{2r-n, 2(n-r)} \\ 0_{2(n-r), 2r-n} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & g\frac{t}{2} \\ g\frac{t}{2} & gp \end{pmatrix}}_{=T_\gamma} \end{pmatrix}$$

wobei für die ganzen Zahlen p, t, g folgende Einschränkungen gelten: $g \neq 0$, $gpT(t, p) = 1$ und außerdem sollen nicht gleichzeitig t und p den Wert Null haben. Für dieser Matrix T gilt gemäß (86):

$$\alpha_{n,n-1,s}(T, Y) = \frac{\sigma_{n-2s}(g)}{\zeta(2s)} \times$$

$$\times \sum_{W \in \mathcal{N}(T)} I_{Sym_n \frown^{0r}(\mathbb{R})} \left(\begin{pmatrix} 0_n & -1_n \\ 1_n & 0_n \end{pmatrix}, T[W], Y[{}^tW^{-1}] \right)$$

Mit Anmerkung 4.3.5 zusammen mit Satz 4.4.3 ergibt dies sofort folgenden Satz, mit dem alle ausstehenden Koeffizienten des Falles $r = n - 1$ berechnet werden können:

Satz 4.6.1 *Sei T wie oben mit $T_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \frac{gt}{2} \\ \frac{gt}{2} & gp \end{pmatrix}$, $g \neq 0$ und $ggT(t,p) = 1$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \alpha_{n,n-1,s}(T, Y) &= \zeta(2s)^{-1} \sigma_{n-2s}(g) \left(I_{Sym_n \frown^{0n-1}(\mathbb{R})}(J, T, Y) + \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \begin{array}{ll} 0 & : Rg(T) = 1 \\ I_{Sym_n \frown^{0n-1}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}]) & : Rg(T) = 2 \end{array} \right\} \right) \end{aligned} \quad (105)$$

Dabei seien $W = \text{diag}((1_{n-2}, \begin{pmatrix} -p & b \\ t & d \end{pmatrix}))$, wobei $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ eine unimodulare Ergänzung von $\begin{pmatrix} -p \\ t \end{pmatrix}$ darstellt.

Den Wert von $I_{Sym_n \frown^{0n-1}(\mathbb{R})}(T, Y)$ für $Rg(T) = 1$ berechnet man anhand der Formel (100). Für $Rg(T) = 2$ kann man im Fall $p = 0$ die Werte $I_{Sym_n \frown^{0n-1}(\mathbb{R})}(T, Y)$ und $I_{Sym_n \frown^{0n-1}(\mathbb{R})}(J, T[W], Y[{}^tW^{-1}])$ sofort durch (104) explizit ausrechnen, sonst muß man diese Integrale mittels Lemma 4.5.1 erst geeignet umformen, um dann das Ergebnis mittels (104) zu ermitteln.

In jedem dieser Fälle kann man die archimedischen Anteile ausdrücken durch ein Produkt aus π -Potenzen, Gammafaktoren, einer vom Y -Wert abhängigen Konstanten und einer konfluenten hypergeometrischen Funktion.

Literatur

- [1] ANDRIANOV, A. N.: Euler Products Corresponding to Siegel Modular Forms of Genus 2, Russian Math. Surveys 29:3, 1974, p. 45-110.
- [2] ANDRIANOV, A. N.; KALININ, V.L. : On the Analytic Properties of Standart Zeta Functions of Siegel Modular Forms, Math. USSR Sbornik, Vol. 35, 1979, p. 1-17.
- [3] BÖCHERER, Siegfried: Über das Verhalten der Fourierentwicklung bei Liftung von Modulformen, Dissertation, Freiburg, 1982.
- [4] BÖCHERER, Siegfried: Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades, Mathematische Annalen 261, 1982, p. 23-41.
- [5] BÖCHERER, Siegfried: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegel-scher Eisensteinreihen, Math. Zeitschrift, 183, 1983, p. 21-46.
- [6] BÖCHERER, Siegfried: Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 362, 1985, p. 146-168.
- [7] BÖCHERER, Siegfried: Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56, 1986, p. 35-47.
- [8] BÖCHERER, Siegfried; SCHULZE-PILLOT, R.: On the theorem of Waldspurger and on Eisenstein series of Klingen type, Mathematische Annalen 228,1990, p. 361-388.
- [9] CHRISTIAN, Ulrich: Siegelsche Modulformen, Vorlesungsskript, 2. Auflage, Mathematische Fakultät der Universität Göttingen, 1980.
- [10] FREITAG, Eberhard: Siegelsche Modulformen, Springer Verlag, 1983.
- [11] GANTMACHER, Felix : Matrizentheorie, Springer Verlag, 1986.
- [12] HUA, L.K.: Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Translations of Mathematical Monographs Vol. 6, American Mathematical Society, Providence RI, 1963.

- [13] KITAOKA, Yoshiyuki: Modular Forms Of Degree n And Representation By Quadratic Forms, Nagoya Math. J., Vol. 74, 1979, p. 95-122.
- [14] KITAOKA, Yoshiyuki: A Note on Local Densities of Quadratic Forms, Nagoya Math. J., Vol. 92, 1979, p. 145-152.
- [15] KITAOKA, Yoshiyuki: A Note On Klingen's Eisenstein Series, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg Vol. 60, 1990, p. 95-114.
- [16] KLINGEN, Helmut: Zum Darstellungssatz Für Siegelsche Modulformen, Math. Zeitschrift, Vol. 102, 1967, p. 30-43.
- [17] KLINGEN, Helmut: Introductory lectures on Siegel modular forms, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [18] KOBLITZ, Neal: Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms, Springer Verlag, 2. Auflage, 1993.
- [19] KOHNEN, W; SKORUPPA, N.P.: A Certain Dirichlet Series Attached To Siegel Modul Form Of Degree Two, Invent. Math. Vol. 95, 1989, p.541-558.
- [20] KRIEG, Alois: A Dirichlet for Modular Form Of Degree n , Acta ARITHMETICA Vol. LIX.3, 1991, p.243-259.
- [21] LANGLANDS, R.P.: On the functional equations satisfied by the Eisenstein Series, Lecture Notes 544, Springer, 1976.
- [22] LORENZ, Falko: Lineare Algebra I, B-I Wissenschaftsverlag, 2.Auflage, 1989.
- [23] MAASS, H.: Siegel's modular forms and Dirichlet series, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 216, Springer, 1971.
- [24] MIYAKE, Toshitsune: Modular Forms, Springer Verlag, 1989.
- [25] MIZUMOTO, Shin-ichiro: Fourier Coefficients of General Eisenstein series of degree two, I, Inventiones mathematicae 65, 1981, p. 115-135.
- [26] MIZUMOTO, Shin-ichiro: Eisenstein series for Siegel modular groups, Mathematische Annalen 297, 1993, p. 581-625.

- [27] NEUKIRCH, Jürgen: Algebraische Zahlentheorie, Springer Verlag, 1992.
- [28] NEWMAN, Morris: Integral Matrices, Pure und Applied Mathematics" Vol. 45, American Press, New York, London, 1972.
- [29] LANG, Serge: Introduction to Modular Forms, Springer Verlag, 2. Druck, 1995.
- [30] SERRE, Jean-Pierre: A Course in Arithmetic, Springer Verlag, 4. Druck, 1993.
- [31] SHIMURA, Goro: Confluent Hypergeometric Functions on Tube Domain, Math. Analen, 260, p. 269-302.
- [32] TERRAS, Audrey: Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I, Springer Verlag, 1985.
- [33] YAMAZAKI, Tadashi: Rankin-Selberg Method for Siegel Cusp Forms, Nagoya Math. J., Vol. 120, 1990, p. 35-49.
- [34] ZAGIER, Don Bernard: Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer Verlag, 1981.