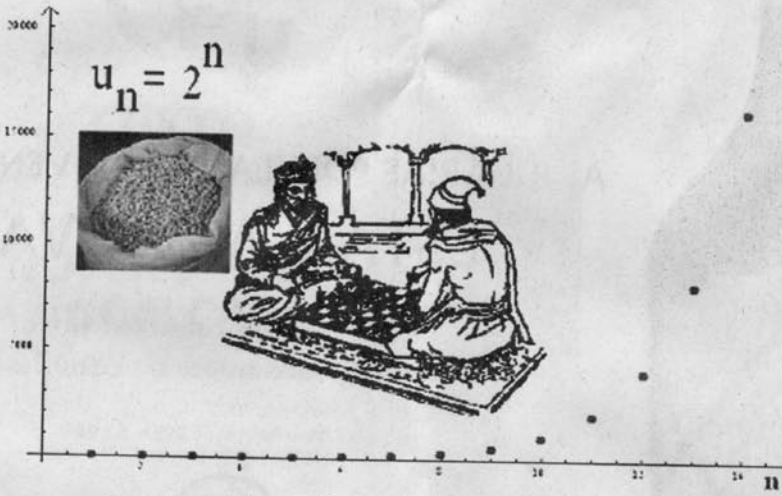
O Xadrez, as Sucessões e o Crescimento Populacional

João Cabral*



Atualmente não existem registos suficientes, que sirvam de prova, para afirmar em que país nasceu o conhecido jogo do xadrez. Supõe-se que nasceu na Índia e que foi inventado por um Brâmane da corte do Rajá Balhait, um elemento da casta sacerdotal Hindu, chamado de Sissa. Associado ao nascimento do xadrez existe uma lenda, muito interessante, que vem sendo transcrita nos livros da especialidade.

O Rajá Balhait pediu aos sábios da sua corte que criassem um jogo capaz de desenvolver os valores da Prudência, da Inteligência, da Visão e do Conhecimento, que concorresse diretamente com o Nard, o atual gamão, em que o resultado final é decidido pela sorte nos dados e não pela destreza e estratégia usada pelos jogadores. Após algum tempo, Sissa apresentou ao Rajá um tabuleiro quadriculado com casas escuras e casas claras, e peças que representavam os quatro elementos do exército indiano: Carros, Cavalos, Elefantes e Soldados a pé, comandados pelo Rajá e o seu Vizir. Sissa explicou que escolhera a guerra como modelo porque entendia ser a escola mais eficiente na aprendizagem dos valores da Decisão, do Vigor, da Persistência, da Ponderação e da Coragem. Balhait, encantado com o jogo, ordenou que fosse preservado a sua prática nos templos, por considerar que os seus princípios eram o fundamento de toda a justiça. O Rajá acreditava que este jogo era o melhor treino na arte da guerra. Como recompensa o Rajá ofereceu ao sábio a satisfação de um desejo. Sendo um cientista, Sissa sentia-se recompensado pelo simples facto de que a sua invenção estava sendo reconhecida por todos. Mas, após a insistência do Rajá, Sissa pediu a sua recompensa em grãos de milho, da seguinte forma: Pela primeira casa do tabuleiro receberia um grão, pela segunda dois, pela terceira quatro, pela quarta oito, e assim sucessivamente, até a sexagésima quarta casa do tabuleiro. O Rajá não entendeu porque Sissa havia escolhido uma recompensa tão humilde, quando até poderia pedir o próprio reino para si. Assim, o Rajá ordenou aos responsáveis pelo celeiro que satisfizessem o pedido de Sissa. Mas, o que parecia ser um pedido humilde mostrou-se impossível de ser atendido, mesmo antes da trigésima casa. Os matemáticos do reino calcularam que o total de trigo existente na Índia era insuficiente para pagar a recompensa.

Preocupado, o Rajá olhou para Sissa, mas este disse sorrindo que já sabia que não seria possível atender o seu pedido porque a quantidade de milho exigida seria, no total, de 18.446.774.073.709.551.615 grãos de milho.

Apesar de simples, Sissa efetuou o seu pedido baseando-se numa regra matemática que é conhecida por progressão geométrica. As progressões geométricas são um grupo muito especial das sequências numéricas na Matemática. Uma sequência numérica pode ser entendida, de forma simples, como sendo a listagem sequencial de números, escritos de uma determinada forma.

Cada um dos elementos da sequência é conhecido por termos da sequência. As sequências podem ser construídas com uma certa ordem na apresentação dos termos, de forma crescente ou decrescente, designando-se de monótonas, mas também podem ser totalmente aleatórias, sem qualquer ordem aparente entre os seus termos. Quando, nas sequências ordenadas, a passagem de termo para termo é feita de forma constante, criando um novo termo adicionando ao termo já existente o mesmo valor, obtemos uma progressão aritmética, mas se ao invés de adicionarmos, usarmos a multiplicação por um valor constante, obtemos uma progressão geométrica. Por exemplo a sequência 2, 7, 12, 17, ... é uma progressão aritmética pois é uma sequência crescente, em que o termo subsequente é determinado pela adição de 5 ao termo precedente. Este valor 5 é conhecido como sendo a razão da progressão aritmética. A sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ... é uma progressão geométrica, a usada por Sissa, pois é uma sequência crescente, em que o termo subsequente é determinado multiplicando por 2 o termo precedente.

O valor 2 é a razão da progressão geométrica. Através do conhecimento da razão é fácil auscultar a monotonia de cada progressão. Por exemplo, no caso das progressões aritméticas se a razão for um número positivo, então a progressão é crescente, se for negativo, a progressão é decrescente. No caso das progressões geométricas, se a razão for um número positivo maior do que 1, a progressão é crescente, se a razão for um número positivo menor do que um esta é uma progressão decrescente. A regra que define a construção de cada termo a partir da ordem que surge na sequência é conhecida por termo geral.

Quando criamos uma sequência de valores, escrevemos os termos, seguindo a ordem dos números naturais, criando uma associação imediata entre o primeiro termo da sequência e o número natural 1, o segundo termo da sequência e o número natural 2, o terceiro termo da sequência e o número natural 3, e assim sucessivamente, logo podemos dizer que existe uma relação entre o conjunto dos números naturais e os termos de uma sequência. Ao estabelecer esta relação nas sequências ordenadas estas assumem o nome de sucessão. Na linguagem Matemática é muito usual escrever-se u:A-B, para dizer que a sucessão u relaciona elementos do conjunto A com elementos do conjunto B. O conjunto A é designado de domínio e o conjunto B é designado de contra-domínio de u. Cada sucessão é catalogada consoante o seu contra-domínio seja o conjunto dos números naturais – sucessão natural; o conjunto dos números inteiros – sucessão inteira; dos números racionais – sucessão racional; dos números reais – sucessão real. O domínio das sucessões mantém-se sempre o conjunto dos números naturais.

Se, na relação u:A-B, o conjunto A já for o conjunto dos números reais, bem como o conjunto

B, então já teremos uma função real, de variável real. Aos elementos de A chamamos de objetos e aos elementos de B chamamos imagens da função. Normalmente escreve-se u(x), em que o x pertence ao domínio de u. Assim a grande diferença entre as funções e as sucessões é que as sucessões têm sempre domínio natural, enquanto as funções podem ter outro tipo de conjunto, para além do conjunto dos números naturais, como domínio.

Designando por c^d, a potência de base c e expoente d, a progressão geométrica usada por Sissa, 1 = 2^0, 2=2^1, 4=2^2, 8=2^3,... é uma sucessão de termo geral u(n)=2^n, começando a contagem em zero. A soma pedida por Sissa ao Rajá foi 2^0+2^1 +2^2+2^3+...+2^64. Mas se o domínio não for o conjunto dos números naturais reunido com o zero, mas sim o conjunto dos números reais teremos uma função u(x)=2^x, que é um representante do grande grupo das funções exponenciais. Funções em que a variável surge em expoente. O gráfico destas funções, quando crescentes, assemelha-se a um "J".

As funções exponenciais têm uma importância muito grande na construção de modelos matemáticos ligados à evolução temporal de ecossistemas biológicos; do crescimento populacional; de sistemas físico-químicos; sistemas sócio-económicos, etc. Entre estas, a mais usada é a função f(x)=e^x, em que o "e" representa o valor de Napier, uma constante irracional matemática, com valor aproximado de 2,17. Note-se que o crescimento de 2^x é inferior a e^x, apesar de ambas as funções possuirem crescimento exponencial. Fala-se em crescimento exponencial, quando o modelo assenta numa função exponencial.

Um dos modelos matemáticos que é usado para estudar os fenómenos de crescimento populacional é o modelo de crescimento exponencial, que se adapta a populações com gerações sobrepostas e de reprodução contínua em ambiente ilimitado, sendo um processo contínuo no tempo. O modelo é descrito pela equação diferencial dN/dt=RxN, cuja solução é uma função exponencial de base "e", com N a representar o tamanho da população; dN a mudança na população; dt a mudança no tempo; R a taxa máxima de crescimento per capita. Uma taxa exponencial de crescimento populacional só acontece em alguns períodos limitados de tempo, quando as condições ambientais são favoráveis e os recursos abundantes, bem como se existir um baixo crescimento populacional inicial. O crescimento populacional exponencial é importante para estudar populações que estão colonizando novos habitats, explorando condições ambientais favoráveis transitórias ou recuperando de alguma forma de stress. Este modelo não é o mais adequado para se estudar o crescimento populacional humano, mas caso queiramos estudar a população de uma colónia de batérias, o modelo adapta-se perfeitamente conseguindo prever com grande precisão a evolução do número de batérias.

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
Diretor do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação
jcabral@uac.pt