

# Matrizes e Quadrados Mágicos

DR



Ricardo Cunha Teixeira

Na sociedade atual, completamente dominada pela constante procura de informação, faz todo o sentido recorrer a formas organizadas de apresentar os dados recolhidos que permitam uma leitura rápida e acessível. As matrizes, pela sua estrutura, possibilitam este tipo de abordagem com vista ao tratamento de uma grande quantidade de informação.

Chamamos matriz do tipo  $M \times N$  a uma tabela retangular de números com  $M$  linhas e  $N$  colunas. Uma matriz consiste, portanto, numa forma simples de organizar a informação, facilitando, com isso, a leitura e interpretação dos dados. Na figura 1, apresentamos um exemplo simplificado que retrata a forma como um determinado estabelecimento comercial pode registar o seu inventário de acordo com o dia da semana (considerou-se a título de exemplo apenas quatro produtos). Também se pode considerar uma tabela semanal que registre as entradas (reposição do *stock*) ou as saídas (vendas realizadas) de cada item ao longo da semana. Aqui surge naturalmente a necessidade de adicionar e subtrair matrizes. De facto, a teoria de matrizes permite efetuar diferentes operações aritméticas com essas tabelas. A diferença é que agora não estamos a falar em adicionar ou multiplicar números simples, mas em adicionar ou multiplicar tabelas de números, ou seja, “entidades multidimensionais”.

Poucas áreas da Matemática sofreram nos últimos 30 anos uma evolução tão significativa como a Teoria de Matrizes. Isto deve-se ao desenvolvimento de computadores cada vez mais potentes do ponto de vista da capacidade computacional, bem como à introdução de métodos matriciais em diferentes áreas de aplicação. Atualmente, a Teoria de Matrizes é utilizada com frequência para modelar muitos fenómenos do mundo real. Mas quando é que surgiu este ramo da Matemática?

Em 1850, num artigo intitulado “Sobre

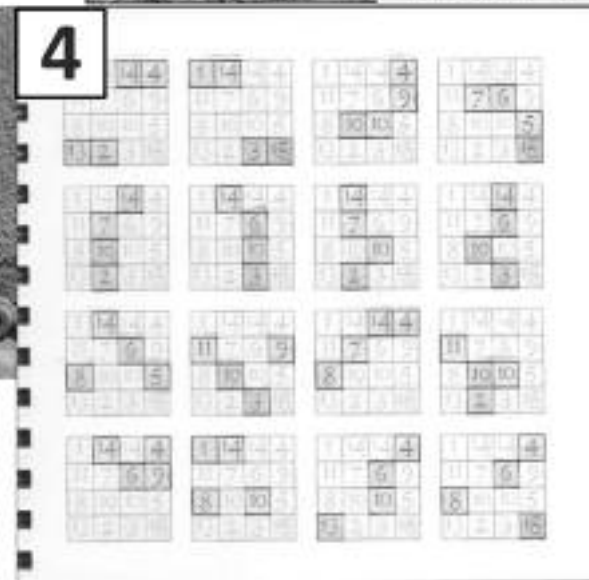
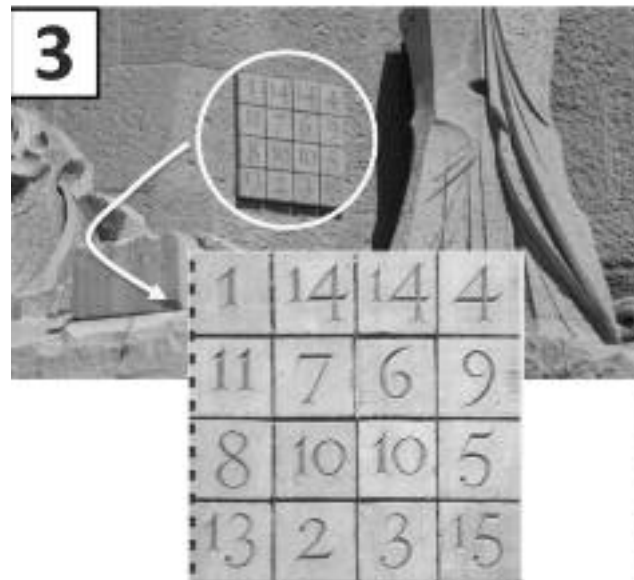
uma nova classe de teoremas”, o matemático de origem britânica James Sylvester introduziu pela primeira vez o termo matriz ao referir-se a uma disposição retangular de elementos que podem ser adicionados ou multiplicados. Por sua vez, Arthur Cayley, outro matemático britânico, é reconhecido por ter estabelecido as principais propriedades algébricas das matrizes, num artigo publicado em 1855. Sylvester e Cayley mantiveram durante vários anos uma proveitosa parceria e são considerados os fundadores da Teoria de Matrizes.

Embora este ramo da Matemática tenha sido desenvolvido a partir de meados do século XIX, conceitos elementares de matrizes remontam ao período anterior ao nascimento de Cristo, uma vez que os chineses aplicavam métodos matriciais para resolver certos sistemas de equações. Os quadrados mágicos constituem outro exemplo de aplicação rudimentar do conceito de matriz. As lendas sugerem que os quadrados mágicos são originários da China, tendo sido referidos pela primeira vez num manuscrito do tempo do imperador Yu, cerca de 2200 a. C.

Um quadrado mágico é uma tabela quadrangular  $N \times N$ , com  $N$  linhas e  $N$  colunas, sendo  $N$  um determinado número natural. A tabela deve ser preenchida com números inteiros de forma a que a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais do quadrado seja sempre a mesma. Esse valor chama-se constante mágica. Sabe-se que, se os números utilizados na construção do quadrado mágico forem os primeiros números naturais de 1 a  $N \times N$  (usam-se todos os números de 1 a  $N \times N$ , sem repetição de qualquer número), então a constante mágica é dada por  $N(N \times N + 1)/2$ . Por exemplo, para  $N=4$ , obtemos uma constante mágica igual a  $4(4 \times 4 + 1)/2 = 34$ .

Em 1514, Albrecht Dürer, conhecido artista da Renascença, pintou um quadro intitulado “Melancolia”, onde figura um quadrado mágico, precisamente de ordem

1	S	T	Q	Q	S	S	D
Ovos	51	48	41	68	59	48	31
Leite	120	108	99	140	128	101	87
Maçãs	32	58	55	52	47	38	24
Pêras	85	82	78	112	107	92	77



4 (figura 2). De notar que os dois números centrais da última linha do quadrado permitem ler “1514”, o ano em que o quadro foi pintado. O leitor pode comprovar que a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada uma das duas diagonais desse quadrado é sempre igual a 34, a constante mágica. Além disso, 34 é a soma dos números dos cantos ( $16+13+4+1=34$ ) e do quadrado central  $2 \times 2$  ( $10+11+6+7=34$ ).

Bernard Frénicle de Bessy (1602-1675), matemático francês e um dos principais investigadores em quadrados mágicos de todos os tempos, encontrou ao todo 880 quadrados mágicos de ordem 4! Contudo, esta descoberta só foi publicada depois da sua morte.

Ao longo dos tempos, os quadrados mágicos foram venerados pelas mais variadas civilizações. Há evidências que comprovam a utilização de quadrados mágicos simples, de ordem 3 (com constante mágica igual a 15) pelos índios maias e pelo povo hausa de África. Hoje em dia, investigadores estudam estes objetos matemáticos em dimensões muito elevadas. Trabalham mesmo com os chamados hipercubos mágicos, por exemplo a quatro dimensões, em que é possível obter a constante mágica em todas as direções correspondentes.

Quem for a Barcelona pode apreciar um quadrado mágico na parede da famosa basílica inacabada da Sagrada Família. Não é um quadrado mágico tradicional no

sentido em que se repetem números (o que implica que a constante mágica, ou seja, a soma única dos valores das linhas, das colunas e das diagonais do quadrado, não respeita a fórmula que apresentamos), mas não deixa de ser menos interessante. Trata-se de um quadrado mágico  $4 \times 4$  com constante mágica igual a 33, a idade em que Jesus Cristo morreu (figura 3). De notar também que é possível obter o valor 33 de outras formas para além das habituais somas de um quadrado mágico (alguns exemplos estão ilustrados na figura 4).

Numa próxima oportunidade, veremos outras aplicações da Teoria de Matrizes.

Departamento de Matemática  
da Universidade dos Açores,  
rteixeira@uac.pt