

Mais travessias com a Matemática Recreativa



Por: Ricardo Cunha Teixeira
Professor do Departamento de Matemática e Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt

No artigo publicado na edição do Correio dos Açores de 7 de abril de 2022, apresentei uma família de quebra-cabeças designada por “problemas de travessia de rio”, em que o objetivo consiste em levar itens de uma margem de um rio para a outra, com a ajuda de um barco, recorrendo ao menor número de travessias possível. Os itens são normalmente personagens de uma história que apresentam determinadas características. O grau de dificuldade do quebra-cabeças varia de acordo com as condições impostas, que estão relacionadas com quantos itens podem ser transportados ao mesmo tempo e com os itens que podem ser deixados numa mesma margem.

No presente texto, analiso outros desafios também relacionados com travessias, mas desta vez recorrendo a uma ponte pedonal. Neste tipo de desafios, as pontes estão danificadas e apresentam algumas limitações relativamente ao número de pessoas que podem suportar ao mesmo tempo. Para apimentar ainda mais a componente dramática, normalmente a ação passa-se à noite, a ponte não está iluminada e o número de lanternas é reduzido. O objetivo consiste em passar um grupo de indivíduos de um lado para o outro da ponte, no menor tempo possível.

Começo por apresentar um problema que chegou a ser usado nas entrevistas de emprego da Microsoft, como reportado por William Poundstone, no seu livro “How Would You Move Mount Fuji? Microsoft’s Cult of the Puzzle”. A situação é a seguinte.

Quatro amigos pretendem atravessar uma ponte estreita e danificada. O problema é que está escuro, pelo que não é possível atravessar a ponte sem uma fonte luminosa. Além disso, só existe uma lanterna e a ponte não pode suportar mais do que duas pessoas ao mesmo tempo. Os amigos já atravessaram essa ponte várias vezes e sabem quanto tempo cada um leva na travessia. A Maria demora 10 minutos a atravessar a ponte, o João demora 5 minutos, o Pedro demora 2 minutos e a Filipa 1 minuto. Como deve o grupo organizar as viagens, de modo a atravessar a fatídica ponte no mínimo tempo possível?

Desafio o leitor a tentar encontrar uma solução antes de continuar a ler este texto.

Em primeiro lugar, é importante salvaguardar que as travessias se efetuam todas com a única lanterna disponível. Além disso, a ponte apenas suporta duas pessoas de cada vez. Logo, as travessias de ida para o lado final da ponte devem ser feitas aos pares, em que dois amigos partilham a mesma lanterna (o par deve respeitar

A	LADO INICIAL	TRAVESSIAS	LADO FINAL	TEMPO GASTO
SOLUÇÃO ÓBVIA	F P J M			0 min
	P J	Filipa e Maria atravessam a ponte (10 min)	F M	10 min
	F P J	Filipa regressa (1 min)	M	11 min
	P	Filipa e João atravessam a ponte (5 min)	F J M	16 min
	F P	Filipa regressa (1 min)	J M	17 min
		Filipa e Pedro atravessam a ponte (2 min)	F P J M	19 min
B	LADO INICIAL	TRAVESSIAS	LADO FINAL	TEMPO GASTO
SOL. FORA DA CAIXA	F P J M			0 min
	J M	Filipa e Pedro atravessam a ponte (2 min)	F P	2 min
	F J M	Filipa regressa (1 min)	P	3 min
	F	João e Maria atravessam a ponte (10 min)	P J M	13 min
	F P	Pedro regressa (2 min)	J M	15 min
		Filipa e Pedro atravessam a ponte (2 min)	F P J M	17 min

o ritmo de cada um, pelo que o tempo total da travessia corresponde ao tempo do amigo mais demorado). Em seguida, um dos amigos tem de regressar ao lado inicial da ponte para levar a lanterna aos que ainda não efetuaram a travessia (não é, portanto, permitido atirar a lanterna de um lado da ponte para o outro). Tendo em conta estas considerações, resta saber qual a sequência de travessias e que pares devem ser formados, de modo a gastar o mínimo tempo possível neste processo.

Perante estas condições, quantas viagens devem ser realizadas e qual o tempo total gasto?

Como a Filipa é a mais rápida, o leitor pode optar por usar esta personagem em todas as viagens. Se assim for, temos: Viagem 1 (ida): Filipa e Maria, 10 minutos; Viagem 2 (regresso): Filipa, 1 minuto; Viagem 3 (ida): Filipa e João, 5 minutos; Viagem 4 (regresso): Filipa, 1 minuto; e Viagem 5 (ida): Filipa e Pedro, 2 minutos (ver Figura A).

Ficamos com cinco viagens e um total de $10+1+5+1+2=19$ minutos. Esta é a “solução óbvia”, mas será a solução ótima? Será que é possível apresentar uma solução com menos viagens?

Ora, atendendo às restrições do desafio, não é possível obter uma resposta com um número inferior de viagens. Isto porque são quatro amigos e, sempre que um par passa para o lado final da ponte, alguém deve regressar com a lanterna ao lado inicial, enquanto houver amigos nesse ponto de partida. Mas será que, com cinco viagens, é possível obter um tempo total inferior a 19 minutos?

Uma possibilidade pode passar por juntar os dois amigos que demoram mais tempo a fazer a travessia (a Maria demora 10 minutos e o João 5 minutos). De facto, assim só se gastam 10 minutos e poupamos os 5 minutos do João. Contudo, se a Maria e o João forem os primeiros a atravessar a ponte, um deles tem de regressar e isso será um prejuízo para as nossas contas! Como podemos contornar este problema?

Uma possibilidade consiste em enviar os dois amigos mais rápidos na primeira travessia, sendo a solução a seguinte: Viagem 1 (ida): Filipa e Pedro, 2 minutos; Viagem 2 (regresso): Filipa,

1 minuto; Viagem 3 (ida): João e Maria, 10 minutos; Viagem 4 (regresso): Pedro, 2 minutos; e Viagem 5 (ida): Filipa e Pedro, 2 minutos (ver Figura B).

O tempo total gasto passa a ser de $2+1+10+2+2=17$ minutos! Afinal ainda é possível poupar 2 minutos! E esta “solução fora da caixa” é a mais económica em termos de tempo gasto, ou seja, não é possível dar resposta a este desafio, no respeito pelas regras, em menos de 17 minutos.

Já vimos que, se a lanterna for devolvida pela pessoa mais rápida em ambas as voltas, a pessoa mais rápida terá de ser incluída em cada par que atravesse a ponte para o lado final, registando-se um total de 19 minutos. Por outro lado, se uma das duas viagens de volta não for feita pela pessoa mais rápida, os tempos de travessia de retorno serão de, pelo menos, $2+1=3$ minutos e as viagens para o lado final serão de, pelo menos, $10+2+2=14$ minutos porque pelo menos um par terá de incluir a pessoa mais lenta e, portanto, levará 10 minutos para atravessar a ponte, enquanto os outros dois pares levarão, pelo menos, 2 minutos cada. Assim, o tempo total da missão não pode ser inferior a 17 minutos.

Contudo, a solução apresentada não é a única. Se trocarmos a Filipa e o Pedro nas viagens 2 e 4, também ficamos com uma solução que envolve um total de 17 minutos.

Este desafio também é conhecido por “The Midnight Train”, sendo acrescentado um dado adicional: os quatro irmãos Gabrianni têm precisamente 17 minutos para atravessar a ponte e apanhar o comboio da meia-noite, será que conseguem? Noutra versão medieval, um cavaleiro, uma dama, um rei e uma rainha pretendem atravessar uma ponte com as restrições habituais e só têm 17 minutos para o fazer. O foco é substituído por uma tocha.

Existem mais variantes deste quebra-cabeças. Por exemplo, na Wikipedia, o desafio é designado por “problema da ponte e da tocha” (porque usa-se uma tocha em vez de um foco) e a personagem que leva mais tempo a atravessar a ponte demora 8 minutos e não 10, o que significa que a solução mais económica em termos de tempo

gasto corresponde a um total de 15 minutos.

Outra forma de colocar o desafio pode passar por impor um limite de tempo para a tocha funcionar, por exemplo, impor que a tocha se apaga ao fim de 15 minutos.

Uma das versões mais antigas deste quebra-cabeças surge no livro “Super Strategies For Puzzles and Games”, de Saul Levmore e Elizabeth Cook, publicado em 1981. Nesta versão do quebra-cabeças, os quatro amigos levam 5, 10, 20 e 25 minutos para atravessar a ponte, sendo o tempo mínimo necessário de 60 minutos ($60=10+5+25+10+10$).

Se representarmos os tempos de cada amigo, ordenados por ordem crescente, por a, b, c, d, prova-se que a “solução fora da caixa” é melhor que a “solução óbvia” se e só se $a+c$ for maior do que $2b$. Repare-se que, nos exemplos apresentados acima, esta condição é sempre válida: para 1, 2, 5 e 10 (ou 8) temos $1+5$ maior do que 2×2 ; e para 5, 10, 20 e 25 temos $5+20$ maior do que 2×10 . Com esta informação, podemos alterar os tempos dos quatro amigos, mantendo a dinâmica do desafio e garantindo que a “solução fora da caixa” é a melhor. Por exemplo, podemos considerar os tempos 2, 3, 5 e 8 (com solução 19 minutos) ou 2, 2, 3 e 3 (com solução 11 minutos).

No artigo “Crossing the Bridge at Night”, Gunter Rote recorre à teoria de grafos para analisar as soluções para um número arbitrário de pessoas com tempos arbitrários de travessia, mantendo a capacidade máxima por travessia de duas pessoas.

Martin Erwig, da Oregon State University, usou uma variação do problema (envolvendo quatro personagens do filme de animação “Toy Story 2”) para defender a eficácia da linguagem de programação Haskell para resolver problemas de pesquisa, em detrimento da linguagem Prolog.

O quebra-cabeças também é mencionado no livro publicado pelas Edições 70, “Das Bactérias a Bach e Vice-Versa”, de Daniel Dennett, por ser um dos seus exemplos favoritos de um desafio com uma solução que não é intuitiva.

É interessante como um simples problema de Matemática Recreativa pode entusiasmar inúmeros curiosos e especialistas de diferentes áreas.