Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 14
Junho, 2020

Ludus

Ludus

Temas da Matemática Elementar

Algoritmo da Multiplicação

Alda Carvalho, Carlos Santos, Ricardo Cunha Teixeira

ISEL-IPL & CEMAPRE, ISEL & CEAFEL, NICA-UAc & FCT-UAc

alda.carvalho@isel.pt, carlos.santos@isel.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Neste artigo, apresenta-se uma proposta para uma sequência de aprendizagem do algoritmo da multiplicação no 1.º Ciclo do Ensino Básico, destacando-se diversos pormenores de ordem didática inspirados no* Singapore Math.

Palavras-chave: algoritmo da multiplicação, 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Introdução

A Figura 1, retirada de um manual escolar do 1.º Ciclo do Ensino Básico, mostra uma abordagem típica relativa ao ensino do algoritmo da multiplicação, aliás comum ao ensino dos algoritmos das restantes três operações aritméticas. Trata-se de uma abordagem de teor *procedimental*, com ênfase numa estratégia de *instrução* e não de *compreensão*; instrução é o que acontece, por exemplo, quando aprendemos a fazer uma receita, com ajuda das indicações apresentadas num livro (aprendemos a receita, mas não necessariamente o porquê da relação entre as quantidades dos ingredientes nem o porquê da sequência de etapas apresentadas; e, se assim o for, numa próxima oportunidade, se não tivermos o livro por perto e nos esquecermos de uma determinada indicação da receita, certamente ficaremos em apuros); aprendizagem com compreensão é algo diferente; uma abordagem com teor *conceptual* permite recuperar informação perdida, precisamente porque se domina o porquê dos conceitos e procedimentos.

Neste contexto, o professor deve procurar promover nos seus alunos uma aprendizagem com compreensão: com ajuda do professor, os alunos devem ser estimulados a explorarem conceitos e procedimentos, *compreendendo* os princípios estruturais que estão na sua base. Os estudos provenientes das neurociências cognitivas apontam precisamente para a ideia de que uma aprendizagem com compreensão conduz a uma aprendizagem duradoura [14]. Desta forma, a relação *professor/aluno* deve ir muito além de uma mera relação *instrutor/instruendo*. O foco do autor de um livro de receitas ou de uma instituição acreditada para fornecer cartas de condução é o saber fazer (saber executar uma receita ou saber conduzir); já o foco da Escola deve ser o conhecimento com compreensão (não só saber fazer, mas também saber o *porquê*). Há muitas perguntas que começam com "como" (como se pode fazer isto?), mas também há muitas perguntas que começam com "por que" (por que razão é que se faz assim?). As respostas às perguntas do segundo tipo tendem a ser mais difíceis e sofisticadas, mas, ao mesmo tempo, são mais interessantes e estimulantes. A Escola, por excelência, deve procurar dar resposta a estas perguntas, promovendo assim aprendizagens com compreensão e duradouras.

Naturalmente, um algoritmo, pela sua natureza, apresenta uma componente procedimental. Mas, paralelamente, pode e deve ser compreendido; é possível, ao mesmo tempo, saber fazer e saber o porquê daquilo que se faz. Uma coisa potencia a outra; uma pessoa faz melhor quando percebe aquilo que está a fazer e percebe melhor o que está a fazer quando faz várias vezes. Infelizmente, o exemplo da Figura 1, com apelo ao verbo "fixar", é comum nos manuais escolares.

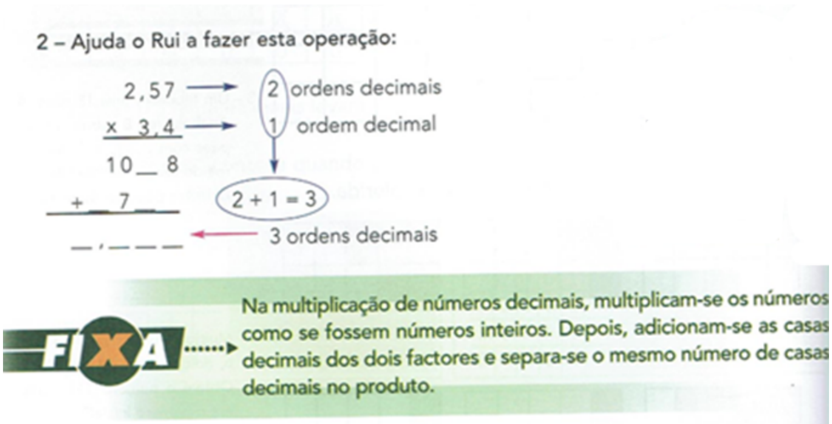


Figura 1: Regra do posicionamento da vírgula no contexto do algoritmo da multiplicação com dízimas finitas.

Optamos por não referenciar o manual em causa, uma vez que o nosso objetivo neste artigo não é criticar manuais. Constatamos apenas que, nos casos em que os algoritmos apresentam alguma sofisticação, é muito comum haver apenas uma preocupação com o procedimento, ou seja, com a "regra" ou "receita". Na verdade, ninguém gosta daquilo que não compreende. Entender a Matemática como um livro de receitas, áridas e sem significado, pode constituir um fator decisivo para a desmotivação e o insucesso escolar nesta área disciplinar.

Uma questão fundamental é saber o *porquê* da regra exposta na Figura 1. Ao mesmo tempo, é preciso saber o que *significa* uma multiplicação deste tipo, quando é que esta surge no *quotidiano* e como é que o algoritmo se organiza em *passos mais simples*. Esta última questão permite identificar e *ordenar* assuntos prévios. Só assim se pode pensar numa didática adequada às faixas etárias em causa. O propósito deste artigo é exatamente analisar estas questões.

1 Multiplicação de números naturais: sentido aditivo e propriedade comutativa

Na Figura 2, apresentam-se dois exemplos de aplicação do sentido aditivo da multiplicação. Na alínea (a), a expressão 4×6 representa quatro repetições de seis patas, ou seja,

$$4 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 = 24.$$

Já na alínea (b), a expressão 6×4 representa seis repetições de quatro patas, isto é,

$$6 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 24.$$

O produto 4×6 é igual ao produto 6×4 (ambos são iguais a 24) – a multiplicação goza da *propriedade comutativa*. No entanto, as situações concretas em que se usam estas operações podem ser diferentes. Tal facto acontece devido aos papéis do *multiplicador* e do *multiplicando*. O sentido aditivo da multiplicação aplica-se em situações concretas quando temos um certo número de grupos iguais, ou seja, de grupos com o mesmo número de elementos. O multiplicador (fator da esquerda) indica o número de grupos e o multiplicando (fator da direita) indica o número de elementos de cada grupo. A Figura 2 ilustra isso mesmo.

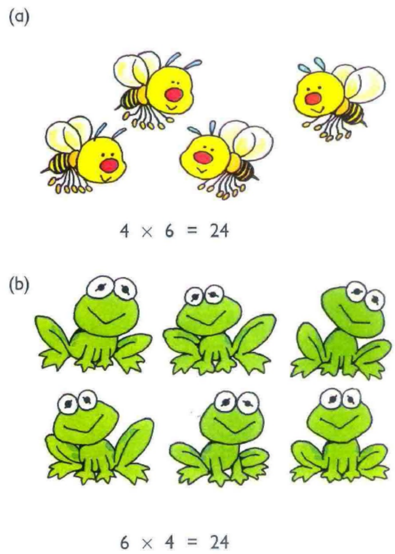


Figura 2: Multiplicador e multiplicando.

Em a), sendo o objetivo determinar o total de patas das 4 abelhas, o cálculo adequado é 4×6 patas $= 24$ patas. Há 4 abelhas, cada abelha tem 6 patas; no total, há 24 patas. Dos três números envolvidos, 6 e 24 traduzem números de patas, mas 4 não traduz um número de patas, mas sim um número de *grupos*. Há 4 grupos de 6 patas (neste caso, 4 abelhas); o 4 é o multiplicador (número de grupos) e o 6 é o multiplicando (número de patas em cada grupo). O multiplicador atua sobre o multiplicando, *copiando-o* (da mesma forma que o explica*dor* explica ao explican*do*, o educa*dor* educa o educan*do*, o replica*dor* replica o replica*do*). Quando se pensa no caso concreto (abelhas com patas), no produto 4×6, os fatores não desempenham o mesmo papel (6 são patas, mas 4 não são).

Em b), sendo o objetivo determinar o total de patas dos 6 sapos, o cálculo adequado é 6×4 patas $= 24$ patas. Há 6 sapos, cada sapo tem 4 patas; no total, há 24 patas. O resultado é o mesmo, mas a situação é diferente; desta vez, 6 é o multiplicador (número de grupos) e o 4 é o multiplicando (número de patas em cada grupo). Pensando em organizações concretas, uma coisa é ter grupos de seis, outra coisa é ter seis grupos. Como se irá ver mais à frente, esta ideia simples talvez seja a mais importante para se perceber o algoritmo da multiplicação em toda a sua plenitude. A Figura 2, retirada de [7], é um maravilhoso exemplo de clareza conceptual.

Numa fase inicial, é importante explorar uma diversidade de situações concretas envolvendo o sentido aditivo da multiplicação, a sua propriedade comutativa e os papéis desempenhados pelo multiplicador e pelo multiplicando. Em [1], os autores apresentam uma série de propostas de tarefas, com o devido faseamento, abrangendo tópicos normalmente explorados no 2.º ano de escolaridade, ano em que a operação multiplicação é introduzida de acordo com o currículo português atual [11]. Alguns recursos didáticos também são explorados em [6].

2 Algoritmo com números naturais: grupos de dezenas e dezenas de grupos

Consideremos agora as seguintes situações: a) A Maria tem uma quantia três vez maior do que dez euros; b) A Joana tem uma quantia dez vezes maior do que três euros. A primeira situação aponta para o produto 3×10 euros e a segunda situação aponta para o produto 10×3 euros. Mais uma vez, as situações são diferentes. A primeira situação diz respeito a 3 grupos de 1 dezena de euros (grupos de dezenas) e a segunda situação diz respeito a 10 grupos de 3 euros (dezenas de grupos). Na primeira, o número 10 desempenha o papel de multiplicando e corresponde a uma quantia em euros; na segunda, o número 10 desempenha o papel de multiplicador e já não corresponde a uma quantia em euros. Por serem situações diferentes, devemos pensar em *didáticas diferentes*.

Vamos começar pela primeira situação, respeitante a grupos de dezenas. É importante observar o facto simples de, estando-se a copiar dezenas, o resultado vir expresso em dezenas. Três grupos de uma dezena são três dezenas, assim como três grupos de duas dezenas são seis dezenas, três grupos de três dezenas são nove dezenas, etc. Quando se copiam coelhos, obtêm-se coelhos; quando se copiam bananas, obtêm-se bananas; quando se copiam unidades, obtêm-se unidades; quando se copiam dezenas, obtêm-se dezenas. O mesmo acontece com centenas, unidades de milhar, décimos, centésimos, televisões, martelos ou bolos. Nesta primeira situação, há uma **manutenção da natureza**. Sendo assim, as duas expressões seguintes são análogas e explicam a razão para só se ter de pensar na multiplicação dos algarismos significativos. O zero desempenha o papel de "marca-lugar", pois indica que a ordem numérica do algarismo significativo é a das dezenas. O zero pode ser substituído por uma palavra.

$$3 \times 10 = 30$$

$$3 \times 1 \textbf{ dezena} = 3 \textbf{ dezenas}$$

As duas expressões seguintes também são análogas.

$$3 \times 20 = 60$$

$$3 \times 2 \textbf{ dezenas} = 6 \textbf{ dezenas}$$

A Figura 3 traduz a ideia de manutenção da natureza. A Figura 4, retirada de [8] (traduzida para português), ilustra o mesmo, estendendo a ideia também para grupos de centenas.

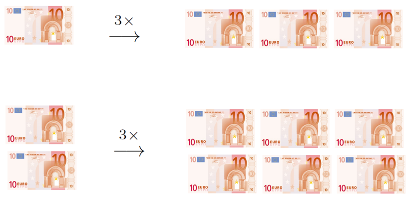


Figura 3: Grupos de dezenas.

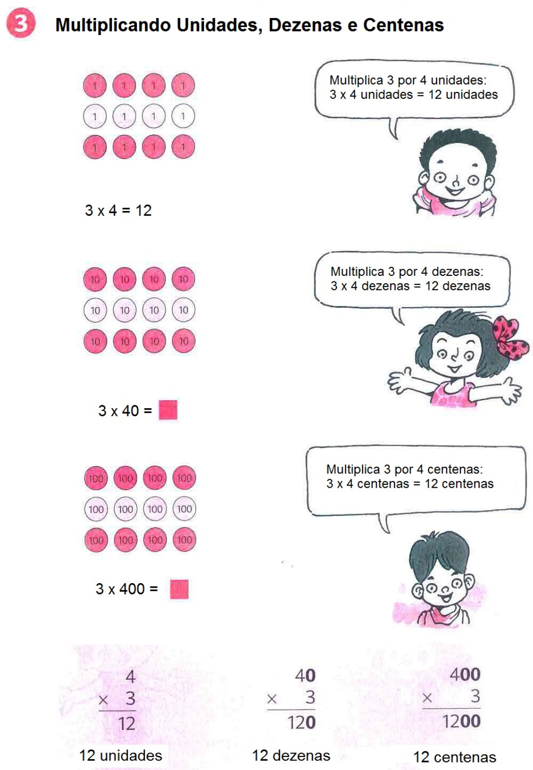


Figura 4: Grupos de unidades, grupos de dezenas, grupos de centenas.

A manutenção da natureza é muito visível em multiplicações cujo multiplicador tem apenas um algarismo. Por exemplo, considere-se 2×34. O sistema decimal posicional determina que o número 34 são 4 unidades e 3 dezenas, isto é, $34 = 4 + 30$. Sendo assim, 2×34 é o mesmo que $2 \times (4 + 30)$. Tendo em conta esta decomposição, a propriedade distributiva, tal como o nome indica, permite *distribuir* a multiplicação, ou seja, $2 \times (4 + 30) = 2 \times 4 + 2 \times 30$; copiam-se primeiro as unidades e, depois, copiam-se as dezenas. As cópias de dezenas seguem a ideia de manutenção de natureza já explicada; para determinar 2×30, basta determinar $2 \times 3 = 6$ e não esquecer que o resultado são dezenas. A Figura 5, retirada de [2], ilustra uma forma de, a partir de um caso concreto, mostrar a propriedade distributiva a alunos do 3.º ano de escolaridade.

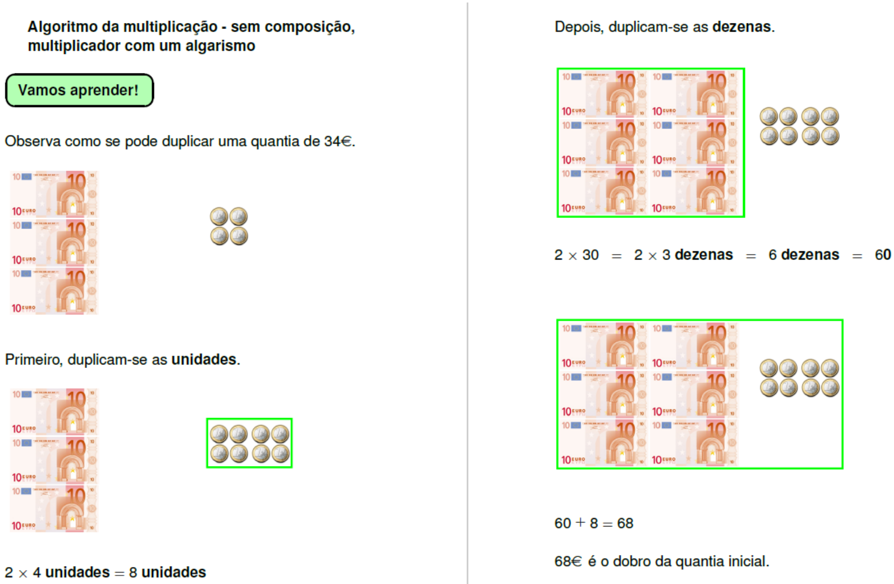


Figura 5: Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A Figura 6, retirada de [3], mostra dois modelos que podem ser usados antes de abordar a organização vertical clássica do algoritmo.

3×32

3 cópias de 2 unidades são __6__ unidades.

3 cópias de 3 dezenas são __9__ dezenas.

__6__ + __90__ = __96__

$3 \times 32 =$ __96__

$2 \times 43 = 2 \times$ __3__ $+ 2 \times$ __40__ = __86__

Figura 6: Propriedade distributiva – dois modelos.

A Figura 7, retirada de [9], ilustra um exemplo com o *esquema da multiplicação*, uma representação esquemática seguindo a mesma estratégia de aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

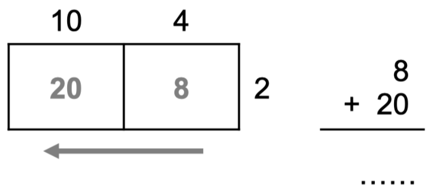


Figura 7: Esquema da multiplicação para calcular 2×14.

Quanto à organização vertical clássica do algoritmo, no que diz respeito a multiplicadores com um algarismo, há um alinhamento perfeito entre as ordens numéricas do multiplicando e do resultado da multiplicação. Um cálculo como 3×312 é obtido através de 3×2 unidades + 3×1 dezena + 3×3 centenas (Figura 8). O alinhamento perfeito traduz a manutenção das naturezas.

	C	D	U
	3	1	2
x			3
	9	3	6

Figura 8: Organização vertical – multiplicador com um algarismo.

A Figura 9 mostra um modelo que pode ser usado nesta fase inicial (retirado de [3], também utilizado em [12]). Lado a lado, mostram-se um procedimento menos expedito e um procedimento mais expedito. A ideia de mostrar um procedimento menos expedito consiste em reforçar a ideia de que 3×3 diz respeito a 3×3 dezenas, ou seja, a 3×30. No modelo menos expedito, a escrita lateral dos significados das parcelas e respetiva soma (o resultado final da multiplicação) também procura ajudar a compreensão.

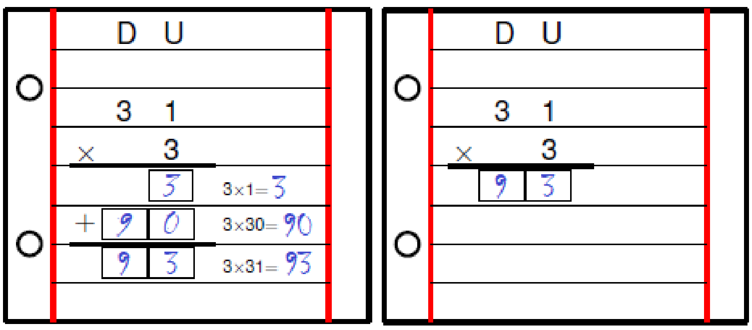


Figura 9: À esquerda, o modelo não expedito; à direita, o modelo expedito.

A Figura 10 mostra mais um exemplo, desta vez retirado de [9].

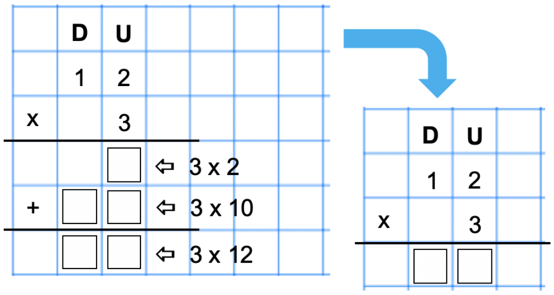


Figura 10: À esquerda, o modelo não expedito; à direita, o modelo expedito.

Ainda relativamente ao caso em que o multiplicador tem um algarismo, pode dar-se o caso de a multiplicação exigir *composição*. Os modelos a utilizar podem ser muito semelhantes. A Figura 11 ilustra o modelo expedito/não expedito para o caso da multiplicação com composição (retirado de [3], também utilizado em [12]). Na Figura 12, apresenta-se um segundo exemplo retirado de [9].

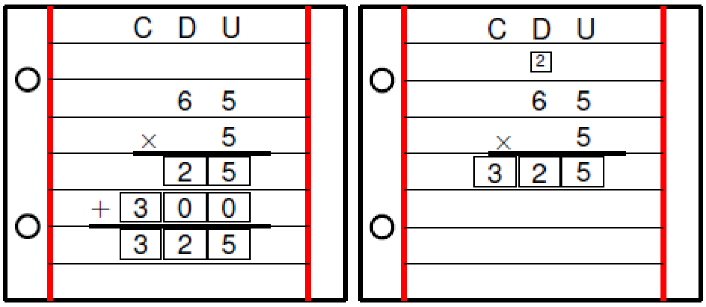


Figura 11: Multiplicação com composição: à esquerda, o modelo não expedito; à direita, o modelo expedito.

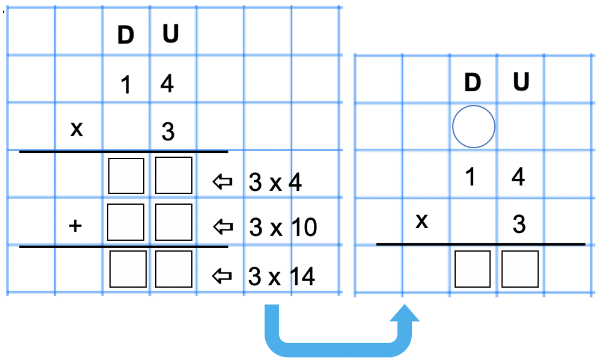


Figura 12: Multiplicação com composição: à esquerda, o modelo não expedito; à direita, o modelo expedito.

A Figura 13, retirada de [2], ilustra uma forma de, a partir de um caso concreto com dinheiro, mostrar uma situação que envolve composição de ordens a alunos do 3.º ano de escolaridade. Tal como anteriormente, as unidades representam-se por moedas de 1 euro e as dezenas por notas de 10 euros.

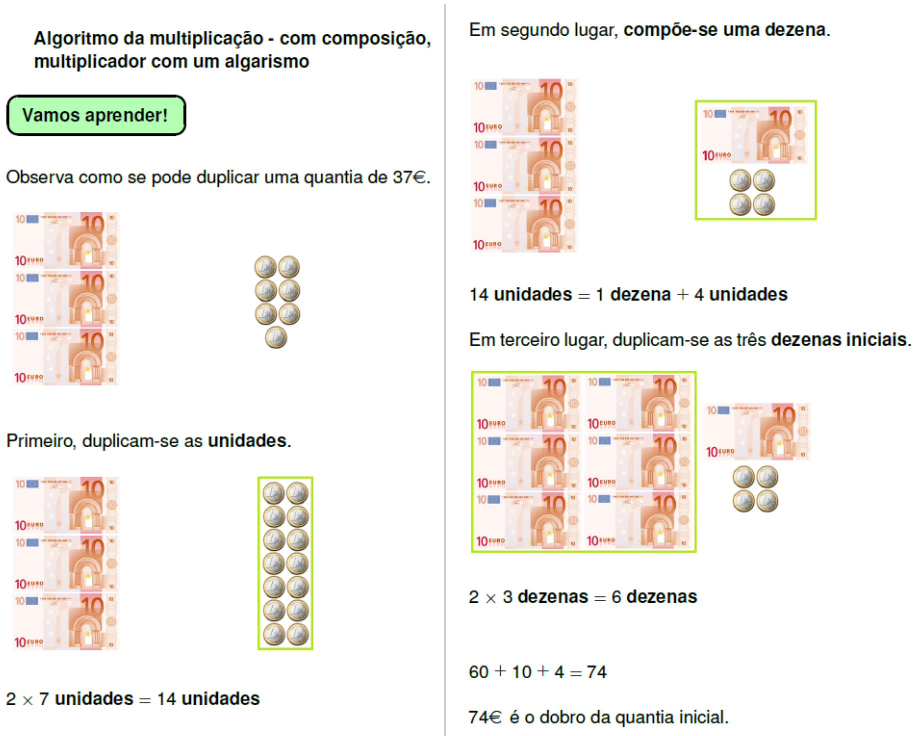


Figura 13: Multiplicação com composição envolvendo dinheiro. Exemplo: 2×37.

O recurso ao quadro de valor posicional e aos círculos de valor posicional, como está ilustrado na Figura 14, também constituiu uma boa forma de concretizar o algoritmo da multiplicação, quando um dos fatores tem um só algarismo, particularmente quando envolve a composição de ordens [9].

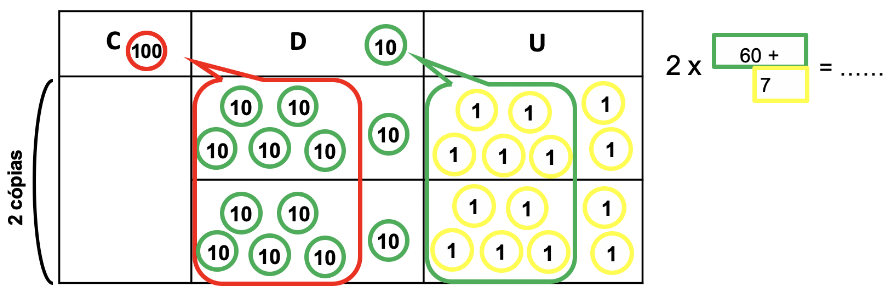


Figura 14: Multiplicação com composição envolvendo o quadro de valor posicional e os círculos de valor posicional. Exemplo: 2×67.

Retomemos as duas situações apresentadas no início desta secção. Consideremos agora a segunda situação: a Joana tem uma quantia dez vezes maior do que três euros. A Figura 15 ilustra o que acontece se se mantiver a natureza: cada moeda de 1 euro dá origem a 10 moedas de 1 euro. Por outras palavras, as três moedas de 1 euro transformam-se em trinta moedas de 1 euro.

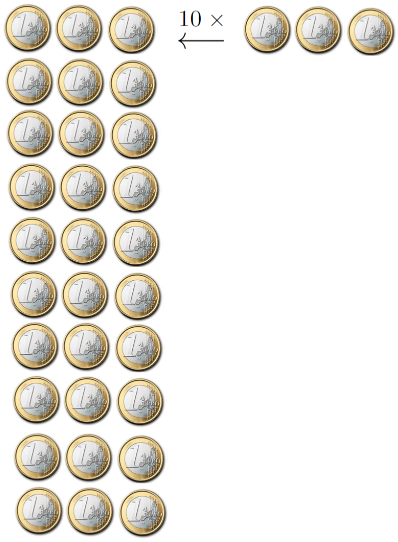


Figura 15: $10 \times 3 = 30$ (mantendo a natureza).

Há uma forma muito mais prática de pensar, envolvendo uma **alteração de natureza**. Se cada moeda de 1 euro der origem a uma nota de 10 euros, naturalmente, a quantia fica dez vezes maior (Figura 16).

Figura 16: $10 \times 3 = 30$ (alterando a natureza).

Este procedimento é especialmente adequado quando se pensa no sistema de numeração posicional decimal. Uma forma prática de fazer com que 3 se torne 10 vezes maior consiste em "empurrar" o 3 para a ordem das dezenas. Essa é a razão por que se *acrescenta um zero*: conceptualmente, o acréscimo de um zero serve para que o 3 mude para uma ordem numérica 10 vezes superior (ver Figura 17). Naturalmente, se o objetivo fosse fazer com que 3 se tornasse 100 vezes maior, acrescentar-se-iam dois zeros para que o "empurrão" fosse para uma ordem 100 vezes maior.

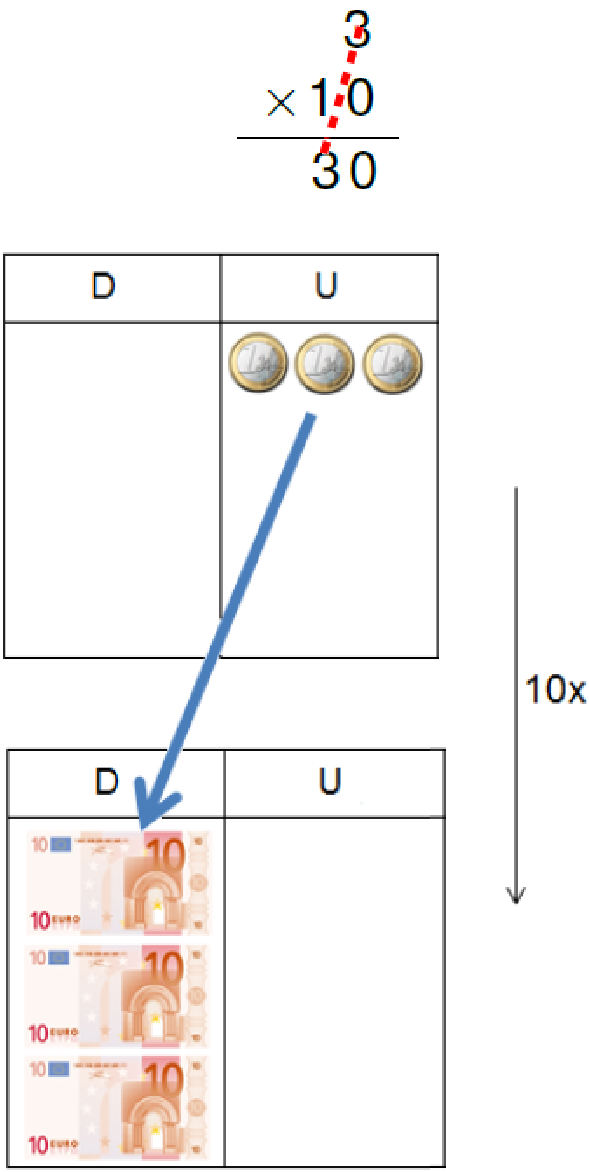


Figura 17: "Empurrando" para uma ordem superior.

Imaginemos agora que se pretende pensar numa quantia 30 vezes maior do que 2 euros. Repare-se que $30\times 2 = 3\times(10\times 2)$, ou seja, pode pensar-se primeiro numa quantia 10 vezes maior do que 2 euros (o "empurrão") e, depois, multiplicá-la por 3. Mais uma vez, basta pensar nos algarismos significativos, desde que se acompanhe o processo com um "empurrão" para uma ordem superior (ver Figura 18).

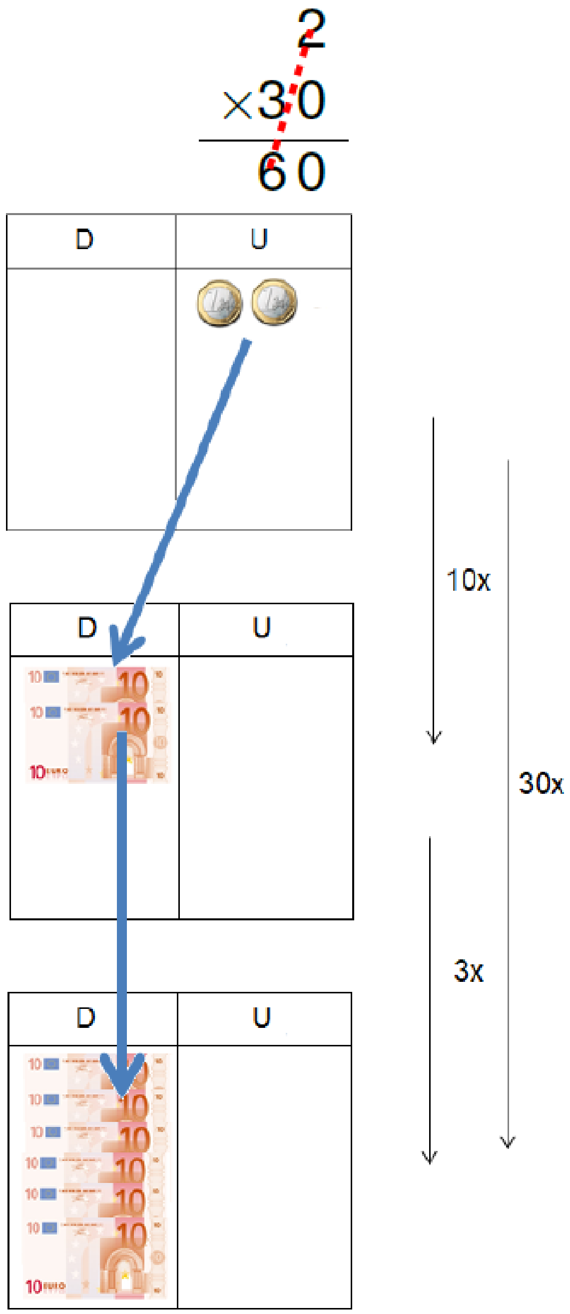


Figura 18: 30×2.

A Figura 19 ilustra uma "explicação" dada por uma criança relativa ao cálculo 20×24.

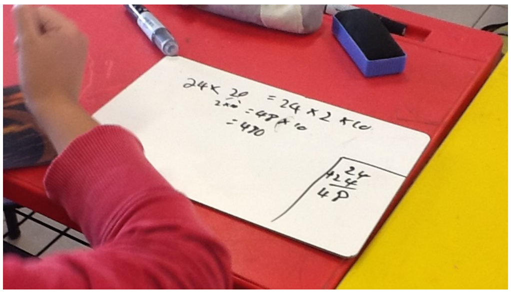


Figura 19: Aula assistida em Singapura por um dos autores deste artigo (janeiro de 2020). No cálculo 24×20, a criança considera 20 como multiplicador e explica que uma multiplicação por 20 pode ser separada em dois passos: multiplicação por 2, seguida de multiplicação por 10. Quanto à multiplicação pelo algarismo significativo 2, a criança determina que $24 \times 2 = 48$ (faz inclusivamente um rascunho, considerando que $24 \times 2 = 2 \times 24 = 24 + 24$). Em segundo lugar, quanto à multiplicação por 10, o "empurrão" para a ordem das dezenas acontece quando se apresenta o resultado 480 (acréscimo de um zero).

Os dois casos analisados (grupos de dezenas e dezenas de grupos) aparecem em multiplicações com multiplicadores com mais do que um algarismo. Vejamos como se determina uma quantia 23 vezes maior do que 32 euros (Figura 20).

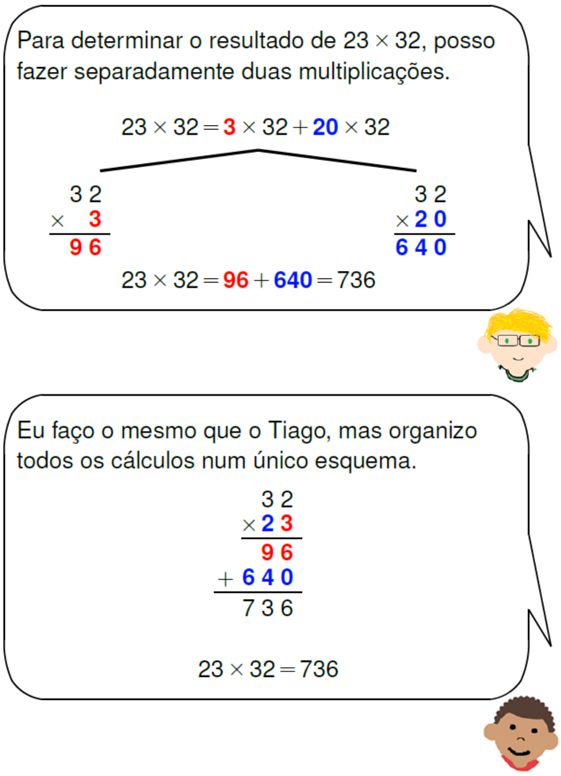


Figura 20: Algoritmo da multiplicação.

O cálculo em causa é 23×32 que, através da propriedade distributiva, pode ser decomposto em $3 \times 32 + 20 \times 32$. É claro que em 3×32 teremos cópias de dezenas e em 20×32 teremos dezenas de cópias. A ideia por trás do algoritmo da multiplicação é exatamente o uso de decomposições deste género. O alinhamento/desalinhamento das ordens numéricas do multiplicando e do resultado da multiplicação traduzem a ideia de manutenção/alteração de naturezas (Figura 21).

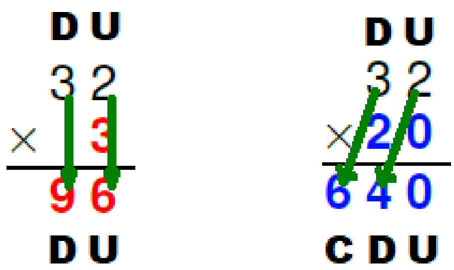


Figura 21: À esquerda (3×32), há manutenção de naturezas. Quando se calcula 3×3, esse cálculo é na realidade 3×3 dezenas (3 grupos de 3 dezenas). O resultado são 9 dezenas e há um perfeito alinhamento de ordens numéricas. À direita (20×32), há alteração de naturezas. Quando se calcula 2×2 e 2×3, esses cálculos são na realidade 20×2 unidades e 20×3 dezenas (2 dezenas de grupos de 2 unidades e 2 dezenas de grupos de 3 dezenas). As unidades são "empurradas" para as dezenas e as dezenas são "empurradas" para as centenas. Os resultados são, respetivamente, 4 dezenas e 6 centenas. Há um desalinhamento das ordens numéricas.

Quanto à organização vertical num único esquema, há duas abordagens, dependendo dos países. Nos países anglo-saxónicos, como Singapura, Estados Unidos e Reino Unido, tradicionalmente escreve-se 640, com o zero na ordem das unidades. Em países como Portugal, tradicionalmente escreve-se apenas 64 na posição das dezenas, sem escrever o zero, uma vez que este não vai ter relevância na soma final (Figura 22). A escrita do zero tem vantagens pedagógicas, na medida em que permite mais facilmente dizer que 640 corresponde a 20×32. Nos países em que tradicionalmente se escreve o zero, por vezes, essa escrita é acompanhada de uma espécie de "cantilena" (ver vídeo em [13]).

$$\begin{array}{rrrr} & & 3 & 2 \\ & \times & 2 & 3 \\ \hline & & 9 & 6 \\ + & 6 & 4 & 0 \\ \hline & 7 & 3 & 6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & & 3 & 2 \\ & \times & 2 & 3 \\ \hline & & 9 & 6 \\ + & 6 & 4 & \\ \hline & 7 & 3 & 6 \end{array}$$

Figura 22: À esquerda, escrita tradicional em Singapura; à direita, escrita tradicional em Portugal.

A Figura 23 mostra dois modelos que podem ser usados na exploração do algoritmo (retirados de [3], também utilizados em [12]). No modelo da esquerda, escreve-se a palavra “dezenas” por extenso, colocando a tónica na natureza (dezenas) e na multiplicação dos algarismos significativos. No modelo da direita, destaca-se a separação de $20\times$ em $2\times10\times$, colocando novamente a tónica na multiplicação dos algarismos significativos.

Cópias de dezenas

1. Completa.

Exemplo:

2 × 60 = <u>2</u> × <u>6</u> dezenas = <u>12</u> dezenas = <u>120</u>

a) 8 × 20 = __ × __ dezenas = ____ dezenas = ____

b) 9 × 40 = __ × __ dezenas = ____ dezenas = ____

c) 7 × 30 = __ × __ dezenas = ____ dezenas = ____

2 Dezenas de cópias

1. Completa de acordo com o exemplo.

Para fazer 20 cópias, posso fazer 2 cópias de 10 cópias.

No cálculo 20 × 32, só preciso de pensar em 2 × 32.

Exemplo:

$20 \times 32 = \underline{2} \times \underbrace{\underline{10} \times \underline{32}}_{\text{10 cópias}} = \underbrace{\underline{2} \times \underline{320}}_{\text{2 cópias de 10 cópias}} = \underline{640}$

a) 30 × 31 = ____ × ____ × ____ = ____ × ____ = ____

b) 20 × 42 = ____ × ____ × ____ = ____ × ____ = ____

Figura 23: Cópias de dezenas/dezenas de cópias.

A Figura 24 ilustra um modelo “pré-algoritmo” (retirado de [3], também usado em [12]). Neste modelo, aplica-se a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Multiplicador com dois algarismos

1. Completa de acordo com o exemplo.

13 × 15 = <u>195</u>

3 × 15 = 45
10 × 15 = 150
13 × 15 = 195

a) 14 × 12

4 × 12 = ______
10 × 12 = ______
14 × 12 = ______

b) 15 × 11

5 × 11 = ______
10 × 11 = ______
15 × 11 = ______

Figura 24: Modelo ilustrando a utilização da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Na Figura 25, apresenta-se um exemplo com o esquema da multiplicação, em que é possível visualizar "todos os zeros", ou seja, o posicionamento dos algarismos de acordo com as ordens. Este esquema pode ser uma boa ajuda na compreensão do algoritmo [9].

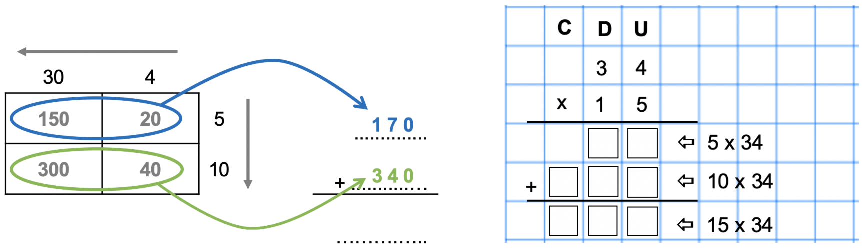


Figura 25: Cálculo de 15 × 34, com o esquema da multiplicação e o algoritmo, lado a lado.

No modelo exposto na Figura 26 (retirado de [3], também utilizado em [12]), a escrita lateral dos significados das parcelas e respetiva soma (o resultado final da multiplicação) procura uma boa compreensão do algoritmo da multiplicação.

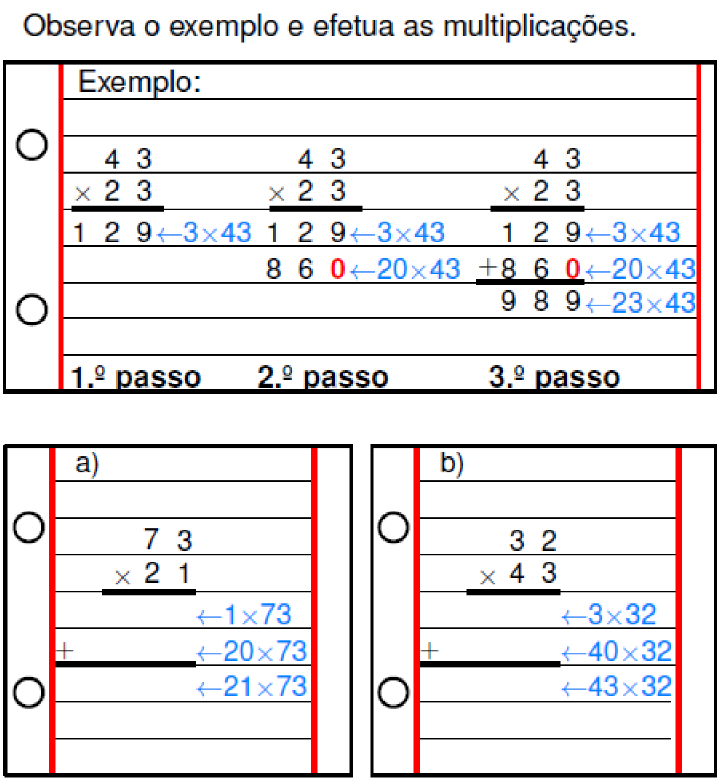


Figura 26: Significados das parcelas.

3 Algoritmo com dízimas finitas: grupos de décimos e décimos de grupos

Tendo o objetivo de estabelecer uma analogia, consideremos novamente duas situações: a) A Maria tem uma quantia três vez maior do que um décimo de euro; b) A Joana tem a décima parte de uma quantia de três euros. A primeira situação aponta para o produto $3 \times 0,1$ euros e a segunda situação aponta para o produto $0,1 \times 3$ euros. Mais uma vez, as situações são diferentes. A primeira situação diz respeito a 3 grupos de 1 décimo de euro (grupos de décimos) e a segunda situação diz respeito à décima parte de 3 euros (décimos de grupos). Na primeira, o número 0,1 desempenha o papel de multiplicando e corresponde a uma quantia em euros; na segunda, o número 0,1 desempenha o papel de multiplicador e já não corresponde a uma quantia em euros.

De notar que podemos falar em "décimos" ou "décimas" de forma indistinta, precisamente porque um décimo da unidade é o mesmo que uma décima parte da unidade, ou seja,

$$\frac{1}{10} = 0,1.$$

O mesmo se aplica a "centésimos"/"centésimas" e a "milésimos"/"milésimas". Aliás, a destreza na transição entre a representação de números racionais na forma de dízima e na forma de fração é estrutural para um conhecimento profundo do sentido de número racional.

Começando novamente pela primeira situação, respeitante a grupos de décimos, tudo é semelhante ao discutido na secção anterior. Nesta primeira situação, ocorre a **manutenção da natureza**. Sendo assim, as duas expressões seguintes são análogas e explicam a razão para só se ter de pensar na multiplicação dos algarismos significativos.

Desta vez, o papel de "marca-lugar" é dado pelo *separador decimal*, ou seja, a *vírgula* (a vírgula é isso mesmo, um "marca-lugar", separando a parte inteira da parte não inteira de uma dízima). O uso da vírgula pode ser substituído por palavras.

$$3 \times \mathbf{0,}1 = \mathbf{0,}3$$

$$3 \times 1\ \textbf{décimo} = 3\ \textbf{décimos}$$

As duas expressões seguintes também são análogas.

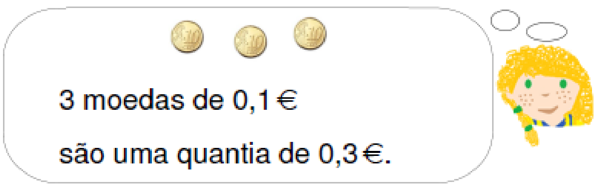
$$3 \times \mathbf{0,}2 = \mathbf{0,}6$$

$$3 \times 2\ \textbf{décimos} = 6\ \textbf{décimos}$$

A Figura 27 [5] traduz a ideia de manutenção da natureza. A Figura 28 [5] traduz a mesma ideia, mas expondo um caso com composição (10 décimos compõem 1 unidade).

Completa de acordo com o exemplo.

Exemplo: 3 × 0,1 = 3 × 1 décimo = 3 décimos = 0,3



a) 7 × 0,1 = 7 × 1 décimo = 7 décimos = 0,7

b) 5 × 0,1 = 5 × 1 décimo = 5 décimos = 0,5

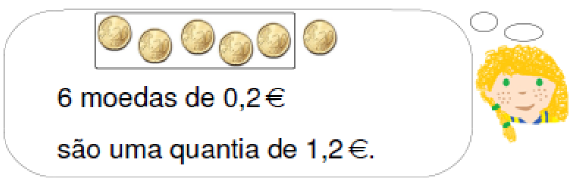
c) 4 × 0,2 = 4 × 2 décimos = 8 décimos = 0,8

d) 3 × 0,3 = 3 × 3 décimos = 9 décimos = 0,9

Figura 27: Grupos de décimos.

Completa de acordo com o exemplo.

Exemplo: 6 × 0,2 = 6 × 2 décimos = 12 décimos = 1,2



a) 7 × 0,2 = 7 × 2 décimos = 14 décimos = 1,4

b) 5 × 0,3 = 5 × 3 décimos = 15 décimos = 1,5

Figura 28: Grupos de décimos (com composição).

Mais uma vez, a manutenção da natureza é muito visível em multiplicações cujo multiplicador tem apenas um algarismo. Por exemplo, considere-se $2 \times 0,34$. O sistema decimal posicional determina que o número 0,34 são 4 centésimos e 3 décimos, isto é, $0,34 = 0,04 + 0,3$. Sendo assim, $2 \times 0,34$ é o mesmo que $2 \times (0,04 + 0,3)$. Tendo em conta esta decomposição, a propriedade distributiva permite distribuir a multiplicação de acordo com as parcelas da adição, ou seja, $2 \times (0,04 + 0,3) = 2 \times 0,04 + 2 \times 0,3$; copiam-se primeiro os centésimos e, depois, copiam-se os décimos. A Figura 29, retirada de [4], ilustra uma forma de, a partir de um caso concreto, mostrar a propriedade distributiva a alunos do 4.º ano de escolaridade.

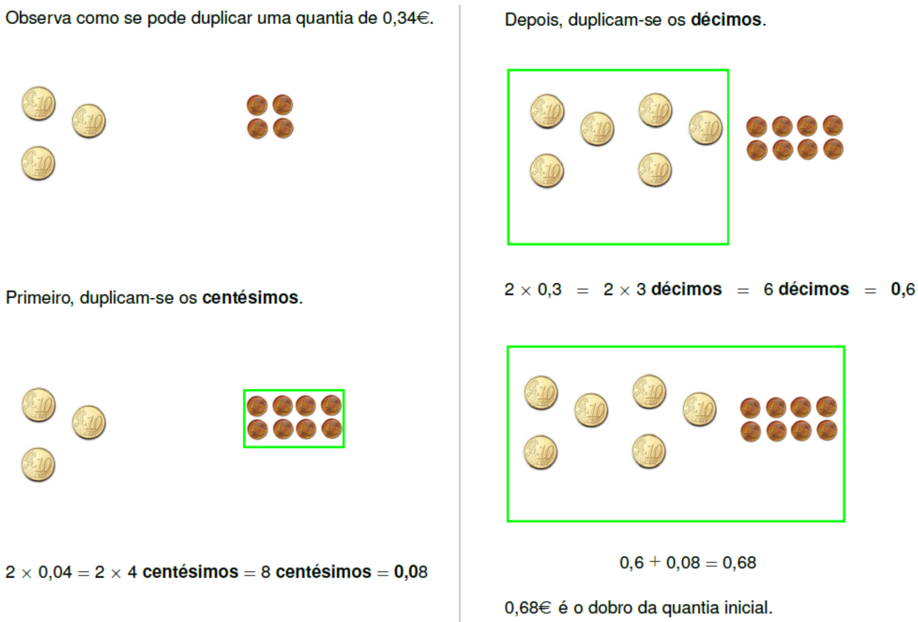


Figura 29: Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

A Figura 30, retirada de [5], mostra dois modelos que podem ser usados antes de abordar a organização vertical clássica do algoritmo.

$3 \times 0,32$

3 cópias de 2 centésimos são 6 centésimos.

3 cópias de 3 décimos são 9 décimos.

$0,06 + 0,9 =$ 0,96

$3 \times 0,32 =$ 0,96

$2 \times 0,43 = 2 \times 0,03 + 2 \times 0,4 = 0,86$

Figura 30: Propriedade distributiva – dois modelos (o multiplicador é um número inteiro e o multiplicando é uma dízima finita).

Quanto à organização vertical clássica do algoritmo, no que diz respeito a multiplicadores com um algarismo, continua a haver um alinhamento perfeito entre as ordens numéricas do multiplicando e do resultado da multiplicação. Mantendo a analogia, um cálculo como $3 \times 3,12$ é obtido através de 3×2 centésimos $+ 3 \times 1$ décimo $+ 3 \times 3$ unidades (Figura 31). O alinhamento perfeito traduz a manutenção das naturezas.

	U	d	c
	3,	1	2
x			3
	9,	3	6

Figura 31: Organização vertical – o multiplicando é uma dízima com duas casas decimais e o multiplicador é um número natural de um algarismo.

A Figura 32 mostra os já analisados modelos não expedito/expedito.

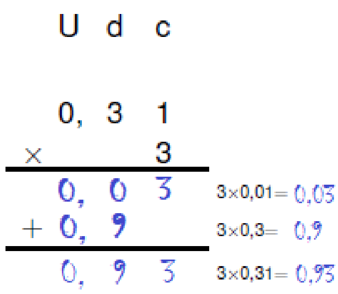


Figura 32: À esquerda, o modelo não expedito; à direita, o modelo expedito.

Ainda relativamente ao caso em que o multiplicador tem um algarismo, tal como acontece com números naturais, também com dízimas pode dar-se o caso de a multiplicação exigir *composição* de ordens. Os modelos a utilizar podem ser muito semelhantes. A Figura 33 [5] ilustra os modelos não expedito/expedito para o caso da multiplicação com composição.

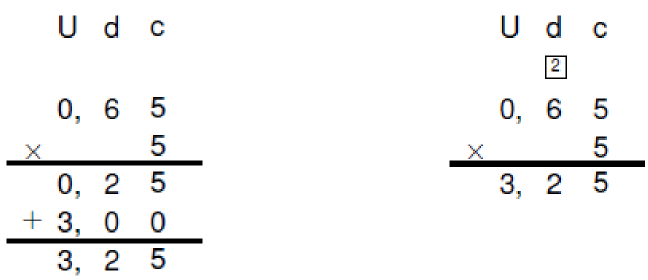


Figura 33: O multiplicando é uma dízima com duas casas decimais e o multiplicador é um número natural com um algarismo (multiplicação com composição): à esquerda, o modelo não expedito; à direita, o modelo expedito.

A Figura 34, retirada de [4], ilustra uma forma de, a partir de um caso concreto, mostrar o caso que envolve composição a alunos do 4.º ano de escolaridade. Os centésimos são representados por moedas de 1 cêntimo e os décimos são representados por moedas de 10 cêntimos.

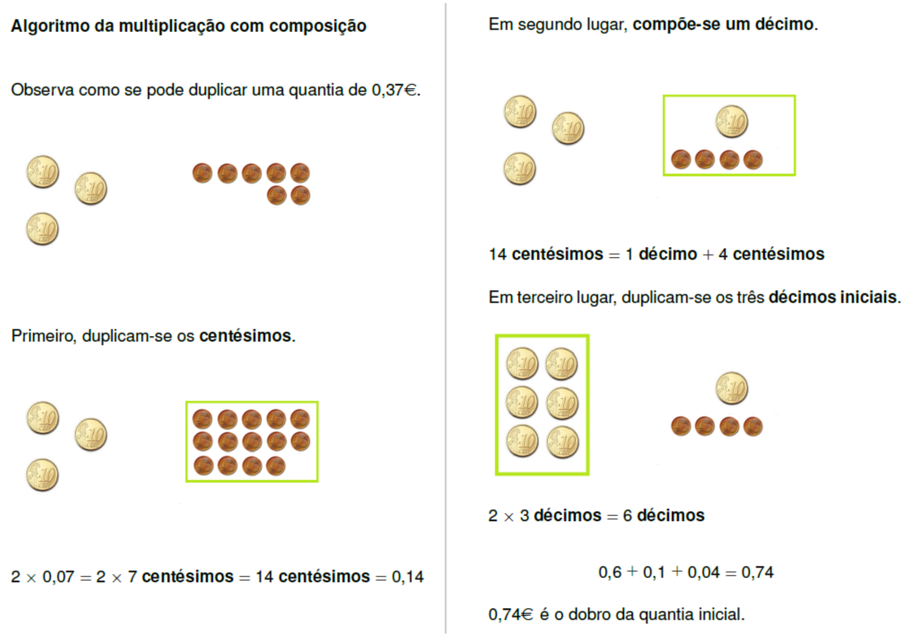


Figura 34: Multiplicação com composição (o multiplicando é uma dízima com duas casas decimais e o multiplicador é um número natural com um algarismo).

Na Figura 35, apresenta-se um exemplo de exploração com recurso à reta numérica e ao quadro de valor posicional [10].

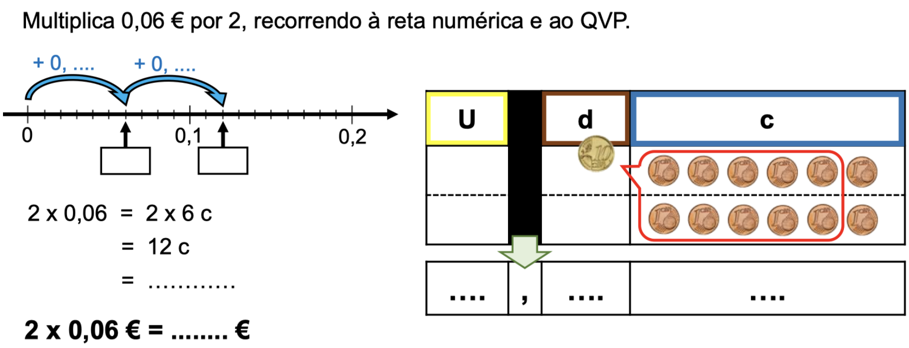


Figura 35: Multiplicação com composição com recurso à reta numérica e ao quadro de valor posicional.

Relembrando as duas situações apresentadas no início desta secção, foquemos a nossa atenção na segunda situação: a Joana tem a décima parte de uma quantia de três euros. Antes de aprenderem a representar números racionais não negativos na forma de fração e na forma de dízima finita, os alunos começam por explorar a multiplicação com números naturais e, nesse contexto, apenas conhecem uma ação do multiplicador: *copiar*. Quando tomam conhecimento das frações e das dízimas, as crianças aprendem uma nova ação: *fazer partes*. Por exemplo, 2×40 bolos $= 80$ bolos; 2 *cópias* de uma quantidade de 40 bolos são 80 bolos, o multiplicador é natural. Outro exemplo, $\frac{1}{2} \times 40$ bolos $= 20$ bolos; metade de uma quantidade de 40 bolos são 20 bolos (*uma de duas partes iguais*), o multiplicador é fracionário. Exemplificando com a fração representada na forma de dízima, temos: $0,1 \times 40$ bolos $= \frac{1}{10} \times 40$ bolos $= 4$ bolos; *uma décima parte* de uma quantidade de 40 bolos são 4 bolos.

Mais uma vez, a analogia é adequada. A maneira mais prática de pensar na situação da Joana envolve novamente uma **alteração de natureza**. Se cada moeda de 1 euro der origem a uma moeda de 10 cêntimos (que corresponde a $0,1$ euros), naturalmente, a quantia fica dez vezes menor (Figura 36).

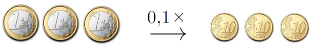


Figura 36: $0,1 \times 3 = 0,3$ (alterando a natureza).

E, novamente, este procedimento é especialmente adequado quando se pensa no sistema de numeração posicional decimal. Uma forma prática de fazer com que 3 se torne 10 vezes menor consiste em "empurrar" o 3 para a ordem dos décimos. Essa é a razão por que se *desloca a vírgula uma casa para a esquerda*: conceptualmente, o movimento da vírgula serve para que o 3 mude para uma ordem numérica 10 vezes inferior (ver Figura 37). Se o objetivo fosse fazer com que 3 se tornasse 100 vezes inferior, deslocar-se-ia a vírgula duas casas para a esquerda para que o "empurrão" fosse para uma ordem 100 vezes inferior.

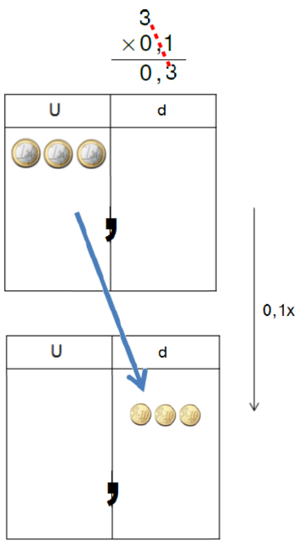


Figura 37: "Empurrando" para uma ordem inferior.

Repare-se que a organização vertical exposta na Figura 37 não é a organização tradicional. No entanto, esta escolha parece ajudar a compreensão. A Figura 38 coloca lado a lado o esquema tradicional e o esquema não tradicional. O primeiro coloca a tónica no deslocamento da vírgula, mas não mantém o alinhamento das ordens numéricas do multiplicando e do resultado; o segundo coloca a tónica no deslocamento dos algarismos, mantendo o alinhamento das ordens numéricas do multiplicando e do resultado. O segundo esquema traduz o conceito de forma mais certeira e permite uma analogia perfeita entre $10\times$ e $0,1\times$, como se pode ver no modelo exposto na Figura 39 (retirada de [5]).

Figura 38: À esquerda, o esquema tradicional; à direita, um esquema não tradicional.

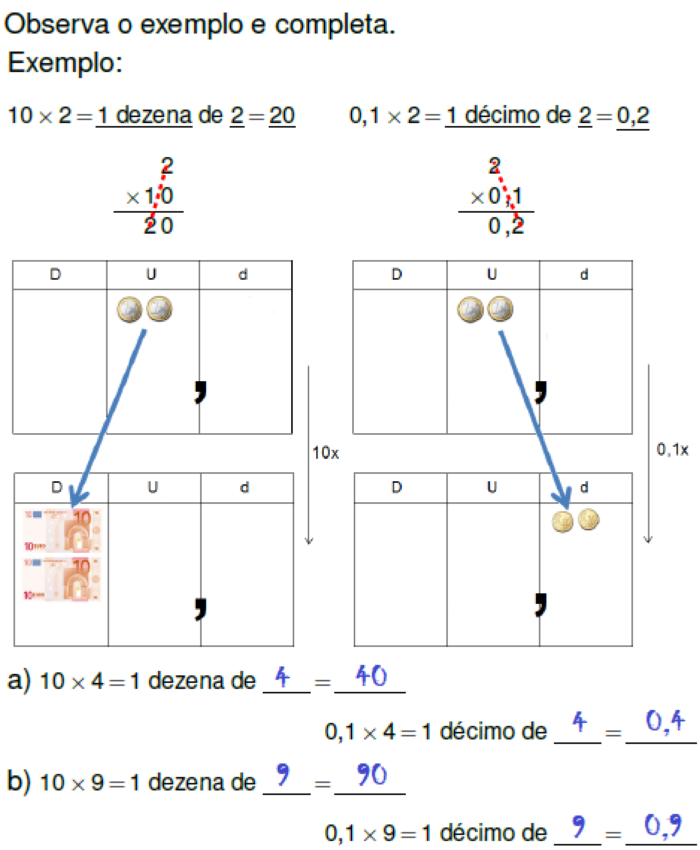


Figura 39: Analogia $10\times/0,1\times$.

Imaginemos agora que se pretende pensar em 3 décimas partes de uma quantia de 2 euros. Mais uma vez, basta pensar nos algarismos significativos, desde que se acompanhe o processo com um "empurrão" para uma ordem inferior (ver Figura 40).

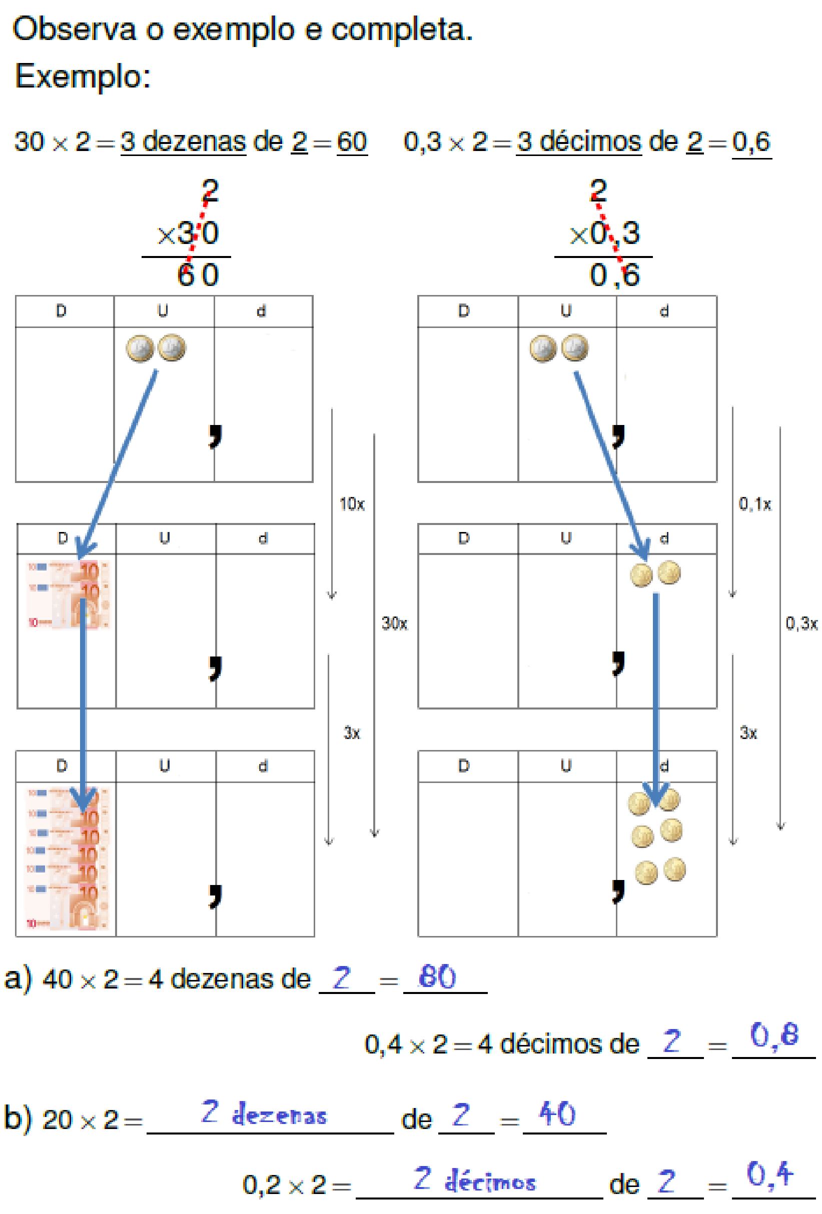


Figura 40: Analogia $30\times/0,3\times$.

A Figura 41 ilustra uma "explicação" dada por uma professora de Singapura relativa ao cálculo $0,01 \times 4000$.

Figura 41: Aula assistida em Singapura por um dos autores deste artigo (janeiro de 2020). Relativamente ao cálculo $0,01 \times 4000$, a professora coloca a tónica no "empurrão" para uma ordem 100 vezes inferior. Observe-se que a preocupação é com o deslocamento do algarismo 4, mais do que com o deslocamento da vírgula.

Os dois casos analisados nesta secção (grupos de décimos e décimos de grupos) também devem ser aplicados em multiplicações com multiplicadores com mais do que um algarismo significativo.

Vejamos como se determina uma quantia 3,4 vezes maior do que 2,57 euros. Repare-se que estamos a apresentar um exemplo concreto relativo à Figura 1, exposta na introdução.

O cálculo em causa é $3,4 \times 2,57$ que, através da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, pode ser decomposto em $3 \times 2,57 + 0,4 \times 2,57$; a primeira parcela aponta para 3 quantias de 2 euros e 57 cêntimos e a segunda parcela aponta para quatro décimas partes de uma quantia de 2 euros e 57 cêntimos. O multiplicador traduz uma ação mista cópias+partes.

A Figura 42 mostra uma possível adaptação da Figura 20.

O alinhamento das ordens numéricas do multiplicando e do resultado da multiplicação traduzem a ideia de manutenção/alteração de naturezas (Figura 43).

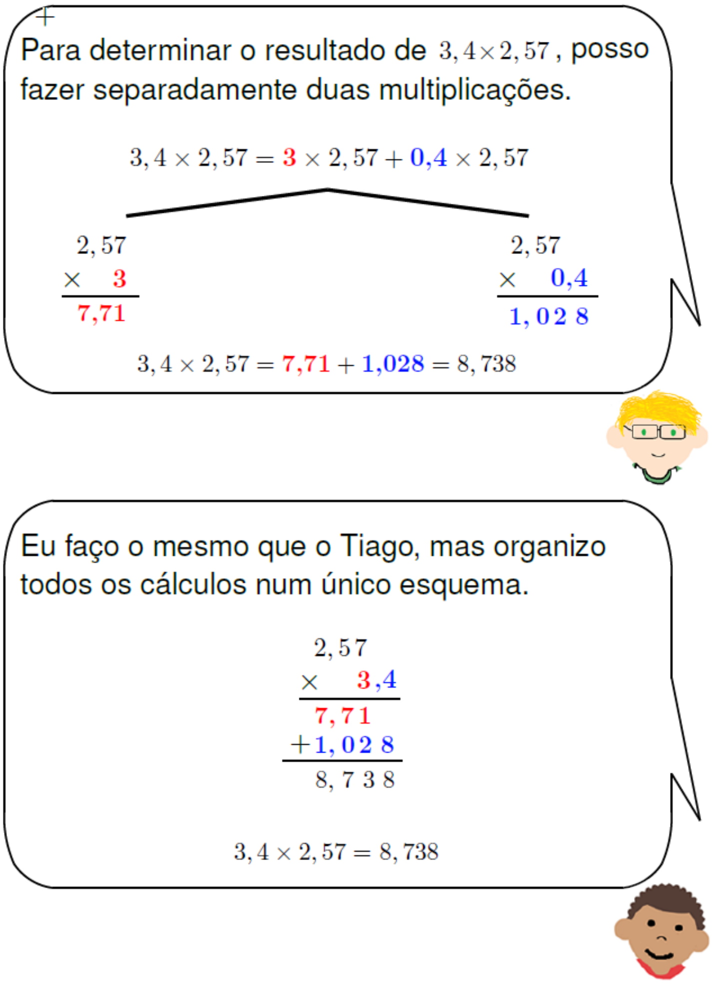


Figura 42: Algoritmo da multiplicação (o multiplicador e o multiplicando são dízimas finitas).

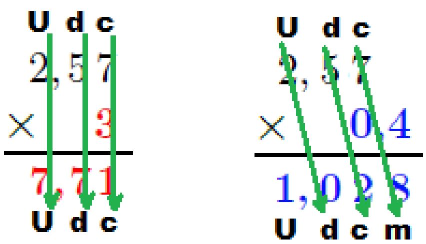


Figura 43: À esquerda ($3 \times 2,57$), há manutenção de naturezas. À direita ($0,4 \times 2,57$), há alteração de naturezas.

Os modelos para as primeiras explorações podem ser semelhantes aos já usados para a multiplicações de números naturais. Por exemplo, a Figura 44 mostra um modelo que explicita os significados das parcelas e respetiva soma.

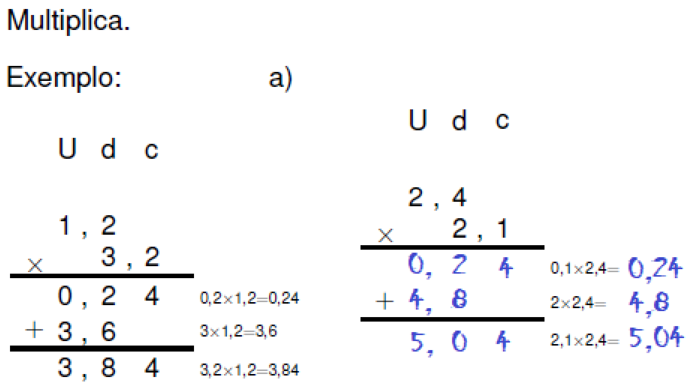


Figura 44: Modelo com escrita lateral.

Voltando à regra exposta na Figura 1, o multiplicando tem duas casas decimais e o multiplicador tem uma casa decimal. Como o multiplicador é responsável por um "empurrão" de uma casa, o resultado terá três casas decimais: duas relativas à natureza do multiplicando (2,57) e uma relativa à natureza do multiplicador (3,4) que, na sua ação dupla, a determinada altura, faz *décimas* partes $(0,4\times)$. Se o multiplicando tiver x casas decimais e o multiplicador y casas decimais, o número de casas decimais do resultado será explicado pelo "empurrão" de y casas para a direita, exercido no multiplicando que tem x casas decimais. Por exemplo, se o multiplicando tiver duas casas decimais e o multiplicador uma casa decimal, os centésimos são empurrados para os milésimos, os décimos são empurrados para os centésimos, as unidades são empurradas para os décimos, as dezenas são empurradas para as unidades, e assim sucessivamente. Isto acontece porque, ao tomar décimas partes, o multiplicador faz com que estas mudanças de natureza aconteçam. Dado que os centésimos passam a ser milésimos, às duas casas decimais iniciais, adiciona-se uma relativa à ação do multiplicador. Esta é a razão de fundo por trás da regra. Naturalmente, não é uma mensagem fácil para uma criança. Mas, um modelo como o da Figura 45 pode ajudar.

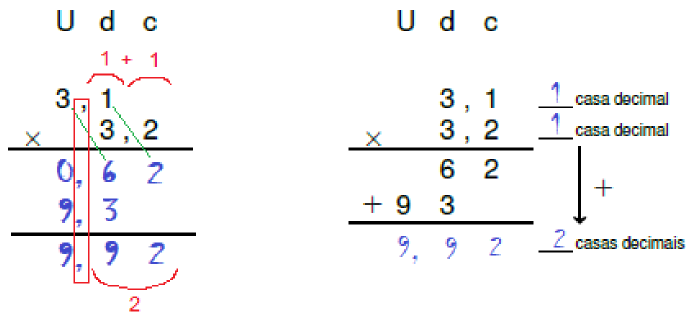


Figura 45: Regra do posicionamento da vírgula, com versão alternativa, apresentada à esquerda.

Referências

[1] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C., Teixeira, R. C. "A multiplicação e a divisão em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade", *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 5-32, 2018.

[2] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Livro Teórico, 3.º ano de escolaridade, Principia, 2020.

[3] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Caderno Prático, 3.º Ano, Volume 1, Principia, 2018.

[4] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Livro Teórico, 4.º ano de escolaridade, Principia, 2020.

[5] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Caderno Prático, 4.º Ano, Volume 1, Principia, 2019.

[6] Furtado, A. R., Duarte, J., Medeiros, M. P., Faria, Z., Silva, L., Fonseca, M. H., Sousa, P., Teixeira, R. C. "Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico", *Jornal das Primeiras Matemáticas* 11, 33-63, 2018.

[7] Hong, K. *Primary Mathematics*, Textbook 1B, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[8] Hong, K. *Primary Mathematics*, Textbook 3A, American Edition: Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education of Singapore, Times Media Private Limited, 1981.

[9] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. (Coord.). *Caderno do aluno para o 3.º ano de escolaridade*, Edição de 2020/21, Projeto Prof DA/Oficina Matemática Passo a Passo, Letras Lavadas Edições, 2020.

[10] Lima, A. M., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. (Coord.). *Caderno do aluno para o 4.º ano de escolaridade*, Edição de 2020/21, Projeto Prof DA/Oficina Matemática Passo a Passo, Letras Lavadas Edições, 2020.

[11] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, Lisboa: MEC – Direção-Geral da Educação, 2013.

[12] Oh, B. (author), Har, Y. (consultant), Hermanson, A. (UK consultant). *Maths – No Problem!*, Workbook 3A, Singapore Maths, 2014 English National Curriculum, 2014.

[13] Place Holder. Vídeo disponível em: `https://youtu.be/NCQug1G48PQ`

[14] Sousa, D. A. *How the Brain Learns Mathematics*, 2nd edition, Thousand Oaks, CA: Corwin, 2014.