

Coelhos, ananases, galáxias – a Sucessão de Fibonacci



Por: Helena Sousa Melo
hmelo@uaac.pt
Professora Auxiliar
CMATI / Departamento de Matemática
Universidade dos Açores

A famosa Sucessão de Fibonacci é um conjunto de números inteiros não negativos, começada por 0 e 1, na qual cada termo seguinte é a soma dos dois termos anteriores. Essa sucessão recebeu o nome do matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por Fibonacci, contração, em italiano, de filho de Bonacci, e os números dessa sucessão são denominados números de Fibonacci.

Leonardo de Pisa ou Leonardo Bigollo (aprox. 1170 — aprox. 1250) foi um matemático italiano, considerado como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média.

Leonardo viveu alguns anos em Búrgia, na Argélia, juntamente com o seu pai, Guglielmo dei Bonacci, abastado mercador de Pisa que representava os comerciantes daquela província nessa cidade, aonde, ainda muito jovem, aprendeu algumas técnicas matemáticas, difundidas pelos estudiosos árabes e criadas por matemáticos hindus, mas ainda desconhecidas no Ocidente.

Ao admitir que a aritmética, com os numerais hindu-árabicos, era mais simples do que com os algarismos romanos, Leonardo introduziu-os na Europa através do seu livro, escrito em 1202, Liber Abaci, onde incluiu também a notação posicional e a discussão de muitos problemas matemáticos. Essa obra foi considerada a primeira obra importante sobre matemática desde o tempo do grego Eratóstenes de Cirene (275 a.C. – 194 a.C.), um matemático, gramático, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrónomo, conhecido por calcular a circunferência da Terra.

Liber Abaci foi um dos primeiros livros ocidentais a descrever os algarismos hindu-árabicos. O seu título significa o “Livro do Cálculo”, mas também foi traduzido como “Livro do Ábaco”, apesar dos métodos de calcular não recorrerem ao ábaco, segundo uma das análises ao livro. O livro possui temas relacionados com a Aritmética e a Álgebra da época, desempenhando um papel importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes. Hoje em dia, temos conhecimento da sua segunda edição, publicada em 1228.

Foi no Liber Abaci que Leonardo colocou e resolveu o problema que envolve o crescimento de uma população hipotética de coelhos com base em pressupostos idealizados. Como resultado, obteve uma sucessão de números, os números de Fibonacci. Essa sucessão numérica já era conhecida no século VI por matemáticos indianos, mas foi Leonardo que a introduziu no Ocidente.

O problema que Leonardo colocou, sobre o crescimento de uma população de coelhos, estava inserido num cenário imaginário com as condições ideais, sob as quais os coelhos se poderiam procriar. O objetivo era responder à questão de quantos pares de coelhos iriam existir após um período de um ano.

As condições consideradas eram as seguintes:

1. No primeiro mês temos um coelho macho e um coelho fêmea. Estes dois coelhos acabaram de nascer.
2. Um coelho só atinge a idade adulta, para procriação, ao fim de um mês.
3. O período de gestação de um coelho dura um mês.

4. Ao atingirem a idade adulta, a fêmea irá dar à luz todos os meses.

5. A mãe irá dar à luz, todos os meses, a um coelho macho e a um coelho fêmea.

6. Os coelhos nunca morrem.

Assim, no início da experiência, mês 0, existe apenas um par de coelhos. No mês seguinte, mês 1, os coelhos acasalaram mas ainda não deram à luz, portanto continuamos com um par de coelhos. No próximo mês, mês 2, já a fêmea deu à luz um par de coelhos, assim, existem agora dois pares de coelhos. No mês 3, ou seja, depois de decorridos 3 meses, o par inicial de coelhos dá à luz mais um par de coelhos, e o segundo par acasala, temos um total de três pares. Aos 4 meses, mês 4, o par original tem mais um par de coelhos, o par que nasceu no mês 2 também dá à luz e o par de coelhos que nasceu no mês 3 acasala, temos um total de cinco pares. Passados 5 meses do início da experiência, mês 5, todos os pares que nasceram até há dois meses dão à luz, temos um total de oito pares, e assim por diante, em todos os meses. Passado um ano do início da experiência temos um total de cento e quarenta e quatro pares de coelhos. (figura 1)

Com esta experiência, e o respetivo registo, obtemos os números de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ...

Matematicamente, a sucessão é obtida por recorrência através da fórmula $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$, com n pertencente ao conjunto dos números naturais, onde $F(0) = 1$ e $F(1) = 1$. Por exemplo, se queremos calcular o termo $F(6)$, necessitamos de $F(5)$ e $F(4)$. Se $F(4) = 5$ e $F(5) = 8$, então $F(6) = 5 + 8 = 13$. Independente da ordem posicional, ou do início, da sucessão de Fibonacci, o procedimento para a sua obtenção é o mesmo.

A sucessão de Fibonacci tem várias aplicações. Pode ser aplicada na análise de mercados financeiros – na ascensão e queda em bolsas de valores, na teoria dos jogos, na música, na arte, no design, na ciência da computação, entre outras aplicações, mas, também, aparece nas configurações biológicas das plantas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores, no ananás, na pinha, ou no desenrolar dos fetos. Em todos os exemplos, podemos ver a sucessão de Fibonacci. (figura 2). Também podemos observá-la no estudo genealógico de abelhas, no comportamento da luz, no comportamento de átomos, no crescimento de plantas, na probabilidade e na estatística, nas curvas com a forma espiralada como no Nautilus (marinho), nas galáxias em espiral – semelhante à configuração das pinhas, nos chifres de cabras da montanha, nos marfins de elefantes, nas ondas no oceano, etc. Essa sucessão pode ser encontrada nos mais diversos tópicos.

A sucessão de Fibonacci possui muitas propriedades e curiosidades. Vamos citar apenas algumas, iniciando pela observação do triângulo de Pascal. Observamos que a soma de determinadas diagonais constitui, pela ordem, os números de Fibonacci. (figura 3).

Uma das propriedades interessantes é relacionada com a soma dos n primeiros termos da sucessão. Por exemplo, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 = 20$, é igual ao termo seguinte, do termo seguinte dessa sucessão de 1 a 8, subtraído de 1, ou seja, $21 - 1 = 20$. Façamos mais um exemplo, $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 144 - 1 = 143$. Em linguagem literal temos que $F(1) + F(2) + \dots + F(n-1) + F(n) = F(n+2) - 1$, onde n é um número natural.

Nesta última propriedade e para as propriedades seguintes, consideramos

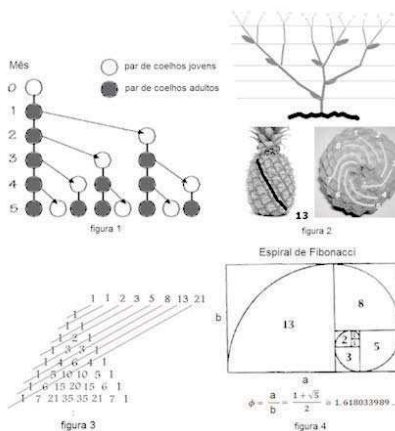
$F(1) = 1, F(2) = 1, F(3) = 2, F(4) = 3, F(5) = 5, F(6) = 8$, e assim por diante. E consequentemente, os termos de ordem ímpar são: 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233, 610, 1597, ... , e os termos de ordem par são: 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584,

Assim, observamos a soma dos primeiros termos da sucessão de Fibonacci de ordem ímpar e a soma dos primeiros termos da sucessão de Fibonacci de ordem par. Temos, por exemplo, $F(1) + F(3) + F(5) = 1 + 2 + 5 = 8 = F(6)$; $F(1) + F(3) + F(5) + F(7) + F(9) = 1 + 2 + 5 + 13 + 34 = 55 = F(10)$, ou, por outras palavras, que $F(1) + F(3) + F(5) + \dots + F(2n-1) = F(2n)$, onde n pertence ao conjunto dos números naturais. Também temos, por exemplo, $F(2) + F(4) = 1 + 3 = 4 = F(5) - 1$; $F(2) + F(4) + F(6) + F(8) = 1 + 3 + 8 + 21 = 33 = F(9) - 1$, ou, por outras palavras, que $F(2) + F(4) + F(6) + \dots + F(2n) = F(2n+1) - 1$, onde n pertence ao conjunto dos números naturais.

Também podemos referir a soma dos quadrados dos números de Fibonacci, onde observamos que $1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 2 = 1 + 1 + 4 = 6 = 2 \times 3$; ou $1 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 5 \times 5 + 8 \times 8 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104 = 8 \times 13$, ou seja, de modo geral, $F^2(1) + F^2(2) + F^2(3) + F^2(4) + \dots + F^2(n) = F(n)F(n+1)$, onde n pertence ao conjunto dos números naturais.

Muitas outras propriedades, ou curiosidades, podemos mencionar associadas à sucessão de Fibonacci, mas iremos finalizar com o cálculo do quociente, ou razão, entre dois números sucessivos dessa sucessão. Observamos que a relação básica entre dois números consecutivos é 0,618, o inverso da razão áurea. Assim, ao fazer a razão entre $F(11)$ e $F(12)$, por exemplo, obtemos um valor aproximado do número de ouro, ou razão de ouro, e quanto maiores forem esses números, mais nos aproximamos desse valor. Notamos que, $144/89 = 1,61797728089888\dots$ e $2584/1597 = 1,618033813400125\dots$, são valores numéricos muito próximos do número de ouro 1,618033988749895... (figura 4)

O leitor seria capaz de encontrar outras propriedades e ligações à sucessão de Fibonacci? Boas investigações...



A partir Sábado Serviços da Lagoa das Furnas passam a abrir às 6 da manhã

A partir do próximo Sábado (dia 23 de Maio) até Setembro os serviços da Lagoa das Furnas passam a funcionar das 6 da manhã às 8 da noite também durante a semana. Este horário que vinha sendo aplicado apenas durante o fim de semana começa, com a época de veraneio, a vigorar agora durante os 7 dias da semana.

Recorde-se que desde a entrada em vigor do novo modelo de gestão da Lagoa das Furnas, a Câmara Municipal da Povoação tem vindo a fazer alguns ajustes para melhorar a prestação dos seus serviços às necessidades apresentadas pelos turistas. Um dos últimos acertos foi a diminuição do preço do parque de estacionamento da lagoa que passou de um euro e vinte cêntimos à hora para oitenta cêntimos. A partir da terceira hora o visitante paga apenas quinze cêntimos por cada hora seguinte.

Convém salientar que desde Março, mês da entrada em vigor da nova gestão da zona dos cozidos, já passaram por este local mais de 23 mil turistas e foram confeccionadas mais de 1.350 panelas de várias iguarias.

A autarquia refere que é sempre mais cómodo e prático fazer a reserva das covas dos cozidos, bem como das mesas, através dos números 296 588 019 e 926 381 798.



Acção de limpeza em Vila Franca no próximo Sábado

Instituições e empresas locais vão limpar a orla costeira do aldeamento do ilhéu vilafraquense no dia 23 de Maio.

A actividade será desenvolvida às 14h00 do próximo Sábado, a Sul da rua Estrada Real em Vila Franca do Campo.

A acção é organizada pela Direcção Regional dos Assuntos do Mar e pelo Parque Natural de São Miguel e tem a Câmara Municipal de Vila Franca do Campo, Recolte, Junta de Freguesia de São Pedro (V.F.C.) e a Musami como entidades parceiras.

A iniciativa está inserida no programa “Açores Entre-Mares 2015”. O projecto é coordenado pela Secretaria Regional do Ambiente e Mar.

Vítor Prata