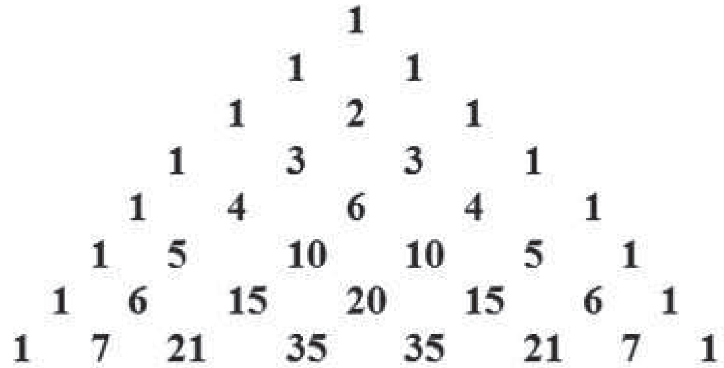
Simetrias Numéricas – capicuas e relações numéricas

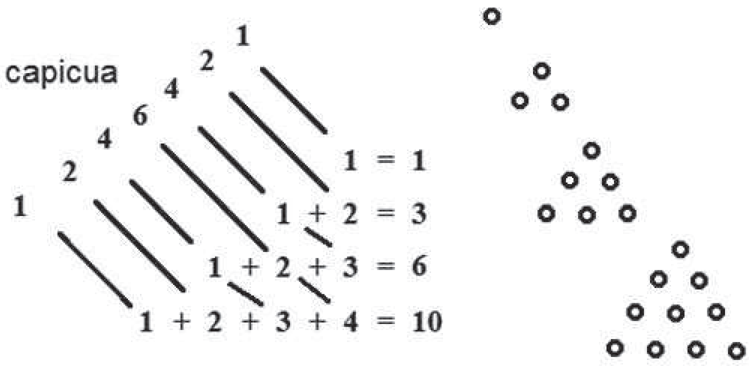
Helena Sousa Melo*

O mundo à nossa volta está repleto de simetrias. Na arte, na música, na escrita, em vários momentos deparamo-nos com simetrias. Achamo-las curiosas, divertimo-nos na sua busca, entramos num mundo mágico e cheio de surpresas. Na matemática há, de modo geral, dois tipos de simetrias, as simetrias geométricas e as simetrias numéricas. Hoje vamos ver as simetrias numéricas.

"Brincar" com os números, para alguns, é algo de terapêutico. Poder expressar uma determinada quantidade de várias formas e maneiras tem, de certo modo, sua graça. Imaginemos se ao pedirmos uma determinada quantidade, por exemplo, de laranjas, ao invés de mencioná-la diretamente – 28 laranjas – referíssemos esta quantidade como "o produto do quadrado de dois por sete". Até teria a sua piada! Principalmente para os amantes do cálculo aritmético.



Triângulo de Pascal



Números Triangulares

Mas, tratemos de casos menos complexos e mais harmonioso aos nossos olhos e mente, as simetrias numéricas que encontramos em capicuas. O termo capicua, ou número palíndromo, tem origem na expressão catalã "cap i cua" que significa "cabeça e cauda". Capicuas são numerais que lidos nos dois sentidos representam o mesmo valor, por exemplo, 13.431. A palavra palíndromo é de origem grega, sendo constituída pelos termos "palin", que significa "novo", e "dromo", que significa "percurso ou circuito". Assim, palíndromos são palavras ou frases que podem ser lidas da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda. Como exemplo temos "Saíram o tio e oito Marias". Os palíndromos também podem ser chamados de anacíclicos, ou seja, que voltam em sentido inverso, que refazem inversamente o ciclo. No nosso caso vamos tratar dos numéricos, os números capicuas.

Comecemos pelos capicuas mais simples, ou seja, os que são constituídos por n algarismos iguais, 5, 44, 333, e todos os que imaginarmos. Também formamos capicuas quando escrevemos um numeral com quaisquer algarismos e depois continuamos a escrevê-lo repetindo os algarismos já escritos pela ordem inversa, 2.736.446.372. Podemos encontrar capicuas na escrita das horas, 14:41, ou das datas, 21/02/2012, e se pensarmos num número capicua mais ampliado, podemos referir também as horas, minutos e segundos nessa data, ou seja, 21:02:20,11/02/2012. Uma das próximas datas capicua ocorrerá em 12/02/2021.

Capicuas mais interessantes são obtidas através de relações numéricas. No triângulo de Pascal (vide imagem), obtemos capicuas formados pelos algarismos das suas linhas sucessivas, ou seja, na primeira linha temos 1, na segunda, 11, depois, 121, seguidamente, 1331 e 14641. A partir da sexta linha não temos capicuas expressos, mas sim uma perfeita simetria de números que podem ser lidos da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita. Assim, na sexta linha temos 1-5-10-10-5-1, na sétima linha, 1-6-15-20-15-6-1, na oitava, 1-7-21-35-21-7-1, etc..

Há outros triângulos igualmente curiosos e que produzem capicuas. O triângulo que determina números triangulares produz capicuas na soma de determinadas diagonais. Informamos que um número triangular é um número natural que pode ser representado na forma de triângulo equilátero. (vide imagem)

Uma das técnicas para obter capicuas é considerar um determinado número, inverter a ordem dos seus algarismos, adicioná-lo ao número inicial, obtendo um novo número, e repetir sempre esse processo até ter um número capicua. Por exemplo, 1524 + 4251 = 5775 (capicua), 568 + 865 = 1433 (não é capicua), então fazemos, 1433 + 3341 = 4774 (capicua). Há casos em que iniciamos este procedimento com números que só após muitas operações gera um número capicua. Por exemplo, o número 276, após a repetição do processo quinze vezes, dá origem ao um número capicua 8.836.886.388.

Podemos obter alguns números capicuas através de mais do que uma operação aritmética, e executando-as por mais de uma vez, por exemplo, 37 x 3 + 50 = 161, 3 x 7 x 11 x 13 x 37 = 111.111 que também pode ser obtido fazendo (12.345 x 9) + 6. Está última relação leva-nos a outras do mesmo tipo, ou seja, começando em 1 x 9 + 2 = 11, depois 12 x 9 + 3 = 111, 123 x 9 + 4 = 1.111, 1.234 x 9 + 5 = 11.111, 123.456 x 9 + 7 = 1.111.111, 1.234.567 x 9 + 8 = 11.111.111 e 12.345.678 x 9 + 9 = 111.111.111. Se observarmos está pirâmide de números e operações, repararmos que a quantidade de "1" que aparece está associada ao número que é adicionado ao produto. Os próprios quadrados desses resultados originam capicuas, ou seja, 1 x 1 = 1, 11 x 11 = 121, 111 x 111 = 12.321, 1.111 x 1.111 = 1.234.321, 11.111 x 11.111 = 123.454.321, 111.111 x 111.111 = 12.345.654.321, 1.111.111 x 1.111.111 = 1.234.567.654.321, 11.111.111 x 11.111.111 = 123.456.787.654.321 e 111.111.111 x 111.111.111 = 12.345.678.987.654.321, e curiosamente o algarismo do centro desses números resultantes correspondem a quantidade de "1" que aparece no número que foi elevado ao quadrado.

No conjunto dos números primos também podemos observar a existência de capicuas. Acredita-se que, do mesmo modo que existe infinitos números primos, exista infinitos primos capicua. Também há pares, ternos, quartetos, quintetos, e talvez outras formações, de primos capicua, que são conjuntos de números primos apenas diferentes no seu algarismo central. Apresentamos alguns deles: pares – (919, 929), ternos – (10301, 10501, 10601), quartetos – (727, 757, 787, 797), quintetos – (101, 131, 151, 181, 191).

O número 836 proporciona, quando fazemos 836 x 836, um intrigante número capicua, o número 698.896, pois quer lido da esquerda para a direita, quer lido da direita para a esquerda, quer lido de cabeça para baixo, ou sofrendo um rotação de 180 graus, com centro de rotação no ponto separador das classes dos milhares e das unidades, continua sendo capicua. Outro número com esta propriedade é 869968, o produto de 54.373 por 16. Experimente formar outros números capicuas com esta simetria perfeita, quer por cálculo, quer pela simples junção de algarismos.

Alguns leitores podem ter ficado com os olhos em bico com tantos números e tantas contas. Para um leitor com alma matemática acredito que tenha sido um gozo ir à busca de capicuas, que tenham algumas propriedades, e saber como podem ser encontrados.

*hmelo@uac.pt
Professora Auxiliar
Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação
Departamento de Matemática