



UNIVERSIDADE DOS AÇORES

CONTRADOMÍNIOS NUMÉRICOS EM ESPAÇOS DE KREIN
E
CURVAS ALGÉBRICAS PLANAS

RICARDO EMANUEL CUNHA TEIXEIRA

Dissertação submetida à Universidade dos Açores para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica da Professora Doutora Natália Bebiano da Providência, Professora Catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra

PONTA DELGADA
SETEMBRO DE 2007

FCT Fundação para a Ciência e a Tecnologia

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO SUPERIOR



UNIÃO EUROPEIA
Fundo Social Europeu

Ciência.**Inovação**
2010

Este trabalho foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Programa POCI 2010.

Resumo

Esta dissertação centra-se no estudo dos contradomínios numéricos em espaços de Krein, recorrendo a técnicas da geometria algébrica plana, da teoria de operadores lineares e da teoria de espaços com produto interno indefinido.

Estudam-se importantes propriedades do contradomínio numérico indefinido: deduz-se a equação em coordenadas de ponto homogéneas da sua curva associada e caracterizam-se as suas projecções em relação às rectas que passam pela origem do plano complexo.

Apresenta-se uma prova geométrica do Teorema do Contradomínio Hiperbólico, que determina o contradomínio numérico de operadores em espaços de Krein de dimensão 2. O correspondente resultado para espaços de Hilbert, conhecido por Teorema do Contradomínio Elíptico, também é deduzido usando a mesma técnica.

Estendem-se para espaços de Krein resultados sobre o contradomínio numérico clássico obtidos por Kippenhahn e por Keeler, Rodman e Spitkovsky: classifica-se a curva associada para o caso indefinido 3×3 , recorrendo-se à conhecida classificação de Newton para as cúbicas, e estudam-se os casos em que o contradomínio numérico indefinido exhibe porções rectilíneas na fronteira. Apresentam-se exemplos ilustrativos das diferentes situações analisadas.

Abstract

This dissertation is devoted to the study of numerical ranges of operators on Krein spaces, using techniques from plane algebraic geometry, linear operator theory and indefinite inner product spaces theory.

Important properties of the indefinite numerical range are studied: the point equation of its associated curve is derived, and its projections on the lines passing through the origin of the complex plane are characterized.

A geometrical proof of the Hyperbolical Range Theorem, concerning the numerical range of linear operators on 2-dimensional Krein spaces, is given. The classical Elliptical Range Theorem, which is the correspondent result for Hilbert spaces, is also obtained using the same technique.

Results of Kippenhahn and of Keeler, Rodman and Spitkovsky on the classical numerical range are extended to Krein spaces: the associated curve in the 3×3 indefinite case is classified, using Newton's classification of cubic curves, and the cases in which the indefinite numerical range has flat portions on its boundary are studied. Illustrative examples of the different possibilities are given.

à Magda e aos meus Pais

Índice geral

Considerações iniciais	xi
Notação	xv
1 Curvas algébricas planas	1
1.1 O plano projectivo	1
1.2 Propriedades elementares das curvas algébricas	4
1.3 O plano dual	12
1.4 Cúbicas de Newton	15
2 Contradomínios numéricos	21
2.1 Espaços de Krein	21
2.2 Propriedades elementares dos contradomínios numéricos	27
2.3 Matriz de inércia	31
2.4 Curva associada	32
2.5 Os focos da curva associada	35
2.6 Método de Fiedler para a equação de pontos	37
2.7 Contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J	40

3	Contradomínio numérico indefinido em M_2 e M_3	51
3.1	Caracterização de $W_J(A)$ quando $A \in M_2$	51
3.1.1	O caso em que A é hermítica- J	51
3.1.2	Caso geral	55
3.2	Caracterização de $W_J(A)$ quando $A \in M_3$	63
3.2.1	O caso em que A é hermítica- J	63
3.2.2	Caso geral	84
3.2.3	Exemplos	86
3.3	Contando “flat portions”	96
3.3.1	Estudo de $W_J(A)$, com $A \in M_3$ triangular e decomponível- J	99
3.3.2	Matrizes $A \in M_3$ indecomponíveis- J com uma “flat portion” na fronteira de $W_J(A)$	102
3.3.3	Exemplos	113
	Considerações finais	121
	Bibliografia	123
	Índice de resultados fundamentais	127
	Índice alfabético	129

Na verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e, sim, a aprendizagem; não é a posse, mas a aquisição; não é a presença, mas o acto de se atingir a meta.

Karl Gauss

Considerações iniciais

O *contradomínio numérico clássico* ou *campo de valores* deve parte da sua origem à teoria clássica das formas quadráticas. Inicialmente, Hausdorff e Toeplitz designaram-no pelo termo alemão “Wertvorrat”, persistindo ainda hoje a letra “W” como o símbolo mais utilizado para o representar. Tal como o espectro de um operador num espaço de Hilbert, o campo de valores é um subconjunto do plano complexo que está naturalmente associado ao operador, conseguindo, muitas vezes, fornecer informações sobre esse operador que o espectro, por si só, não permite obter. O campo de valores pode ser usado para deduzir propriedades algébricas e analíticas do operador, para obter majorantes e minorantes para a sua norma e mesmo para localizar o seu espectro.

Ao longo dos anos, a teoria do *contradomínio numérico clássico* (e das suas generalizações) tem-se revelado particularmente fecunda. A razão prende-se com as numerosas aplicações que proporciona em diferentes áreas da Matemática Pura e Aplicada, tais como a Análise Matricial, a Teoria de Operadores, a Análise Numérica e as Equações Diferenciais, tendo-se estendido recentemente à Física [5, 8, 46] e à Arquitectura [43]. A riqueza desta teoria provém não só do largo espectro das suas aplicações, como também do facto de recorrer a técnicas oriundas de diferentes campos da Matemática, nomeadamente da Análise, da Geometria Algébrica, da Álgebra Linear e Multilinear e da Topologia Algébrica e Diferencial, beneficiando da fertilização cruzada entre as diferentes áreas.

Por outro lado, a teoria de operadores lineares em espaços munidos de um *produto interno indefinido*, mais conhecidos por *espaços de Krein*, tem-se revelado um ramo promissor da Análise Funcional. Dirac, Pontryagin e Krein foram os impulsionadores deste novo campo de investigação, que foi e continua a ser objecto da atenção de muitos físicos [1]. Por isso, não é de estranhar que os investigadores tenham sentido curiosidade em estender o conceito de *contradomínio numérico* aos espaços de Krein. As propriedades básicas do *contradomínio*

numérico indefinido foram estabelecidas por Bayasgalan [4] e por Li, Tsing e Uhlig [37].

A investigação das propriedades geométricas do contradomínio numérico em espaços de Krein reveste-se de particular interesse, não só por promover uma ampla caracterização do mesmo, como também por fomentar a investigação de assuntos com ele relacionados. A temática dos contradomínios numéricos indefinidos é muito recente, pelo que encerra um vasto leque de questões em aberto. Por ser nosso objectivo principal a sistematização das propriedades geométricas do contradomínio numérico indefinido, fomos conduzidos de forma natural aos casos basilares em que o operador se reduz a uma matriz de ordem 2 ou 3. Apesar de, em geral, a complexidade do estudo do contradomínio numérico de uma matriz A ser proporcional à sua ordem n , em muitas situações esse estudo pode reduzir-se ao caso $n = 2$ ou ao caso $n = 3$.

Com vista ao aprofundamento das propriedades geométricas do contradomínio numérico indefinido, a teoria das curvas algébricas planas revela-se de grande utilidade. Por este motivo, e por ser um tópico que actualmente não faz parte da formação de base em Matemática, achou-se pertinente a inclusão de um primeiro capítulo que abordasse as propriedades fundamentais das curvas algébricas necessárias à dedução de vários resultados dos capítulos subsequentes. Damos particular enfoque à classificação de Newton para as cúbicas [3], classificação essa de extrema importância na posterior caracterização do contradomínio numérico indefinido para matrizes de ordem 3.

Nas primeiras secções do capítulo 2, apresentamos os conceitos fundamentais sobre espaços de Krein e sobre os contradomínios numéricos e as suas *curvas associadas*. Explicamos, igualmente, por que motivo, sem perda de generalidade, se pode reduzir o estudo apenas aos contradomínios numéricos induzidos por uma *matriz de inércia* J . Na quinta e sexta secções, deduzem-se importantes propriedades da curva associada, estendendo-se para espaços de Krein resultados válidos em espaços de Hilbert. Destaca-se o *método de Fiedler para a equação de pontos* [20], extremamente útil na representação geométrica da curva associada. A última secção do capítulo destina-se a estabelecer um leque de propriedades que conduzem à completa caracterização do contradomínio numérico de uma matriz *hermítica- J* de ordem arbitrária.

No capítulo 3, analisamos em pormenor os casos $n = 2$ e $n = 3$. Para cada caso, tratamos antecipadamente a situação em que a matriz é *hermítica- J* , fazendo valer os resultados do capítulo anterior. Na primeira secção, apresentamos demonstrações alternativas do *Teorema do Contradomínio Elíptico* e do *Teorema do Contradomínio Hiperbólico* para os casos clássico e indefinido quando a matriz tem ordem 2. Utilizamos um método de demons-

tração, que consideramos simples e uniforme, com base nas propriedades geométricas da curva associada. Na segunda secção, caracterizamos o contradomínio numérico indefinido de uma matriz de ordem 3, seguindo o método empregue por Kippenhahn [30] para o caso clássico e a classificação de Newton para as cúbicas, e apresentamos exemplos ilustrativos dessa caracterização. Na terceira secção, concentramos a nossa atenção nas matrizes 3×3 cujo contradomínio numérico indefinido tem, pelo menos, uma porção rectilínea na fronteira. Os resultados apresentados são paralelos aos obtidos por Keeler, Rodman e Spitkovsky [29] no âmbito do contradomínio numérico clássico.

Acrescentamos ainda, em jeito de considerações finais, alguns problemas em aberto, quer para a dimensão finita como para a infinita. A exposição dos diferentes tópicos mostra potenciais linhas de rumo nesta empolgante área da Matemática.

Finalmente, apresentam-se em suporte informático os ficheiros que geraram as figuras exibidas ao longo da dissertação.

Esperamos que o trabalho aqui exposto seja um pequeno contributo na área dos contradomínios numéricos indefinidos. Os resultados originais desta dissertação foram divulgados, na sua maioria, à comunidade científica em conferências internacionais; alguns já foram publicados [9], outros submetidos para publicação [10, 11].

Uma vez que uma dissertação de Doutoramento resulta inevitavelmente de um esforço colectivo, aprez-me manifestar o meu sincero agradecimento: à Professora Doutora Natália Bebiano da Providência, pela sua valiosa orientação, pela sugestão do tema e pela permanente disponibilidade, perseverança e entusiasmo; ao Professor Doutor João da Providência, pelas ideias e sugestões perspicazes; à Universidade dos Açores, na pessoa do seu Magnífico Reitor, Professor Doutor Avelino de Freitas de Meneses, e ao Departamento de Matemática, principalmente à sua Directora, Professora Doutora Isabel Marques Ribeiro, pelo necessário apoio concedido durante o período de preparação deste trabalho; à minha família, em especial aos meus pais, pelo incondicional carinho e incentivo; à Magda, por partilhar comigo as alegrias e as angústias, em suma, pela confiança que depositou em mim. Um último reconhecimento pessoal à Força Divina que desde sempre me norteou.

Setembro de 2007

Notação

Símbolo	Significado
\mathbb{N}	conjunto dos números naturais
\mathbb{Z}	conjunto dos números inteiros
\mathbb{R}	corpo dos números reais
\mathbb{C}	corpo dos números complexos
\mathbb{R}^n	espaço vectorial dos n -uplos reais
\mathbb{C}^n	espaço vectorial dos n -uplos complexos
$P\mathbb{R}^2$	plano projectivo real
$P\mathbb{C}^2$	plano projectivo complexo
$PGL(\mathbb{R}, 2)$	grupo das transformações projectivas em $P\mathbb{R}^2$
$PGL(2)$	grupo das transformações projectivas em $P\mathbb{C}^2$
$M_{m,n}(\mathbb{R})$	espaço vectorial das matrizes $m \times n$ com entradas reais
$M_{m,n}$	espaço vectorial das matrizes $m \times n$ com entradas complexas

Continua na próxima página

Símbolo	Significado
$M_n(\mathbb{R})$	álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas reais
M_n	álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas complexas
H_n	espaço vectorial real das matrizes hermíticas de M_n
x^*	vector linha de componentes conjugadas do vector coluna $x \in \mathbb{C}^n$
$\operatorname{Re} z$	parte real do número complexo z
$\operatorname{Im} z$	parte imaginária do número complexo z
\bar{z}	conjugado do número complexo z
$\arg z$	argumento do número complexo z
∂U	fronteira do subconjunto U de \mathbb{C}
\bar{U}	fecho topológico do subconjunto U de \mathbb{C}
$\operatorname{conv} U$	invólucro convexo do subconjunto U de \mathbb{C}
$\operatorname{pconv} U$	invólucro pseudo-convexo do subconjunto U de \mathbb{C}
$\operatorname{Re} U$	projecção ortogonal do subconjunto U de \mathbb{C} no eixo real
$\operatorname{Im} U$	projecção ortogonal do subconjunto U de \mathbb{C} no eixo imaginário
$L_{(u,v)}$ (ou L_θ)	recta que passa pela origem do plano afim e que tem a direcção θ ($u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$)
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno (definido)
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	produto interno indefinido induzido pelo operador H

Continua na próxima página

Símbolo	Significado
\mathcal{H}	espaço de Hilbert complexo
\mathcal{K}	espaço de Krein complexo
$W(A)$	contradomínio numérico do operador A
$W_H(A)$	contradomínio numérico- H do operador A
$W_H^+(A)$	contradomínio numérico- H positivo do operador A
$W_H^-(A)$	contradomínio numérico- H negativo do operador A
$C(A)$	curva associada de $W(A)$
$C_H(A)$	curva associada de $W_H(A)$
A^*	operador adjunto de A
$A^{[*]H}$ (ou $A^{[*]}$)	operador adjunto- H de A
A^{-1}	operador inverso de A
$H^{1/2}$	única raiz quadrada positiva do operador auto-adjunto definido positivo H
$\sigma(A)$	espectro do operador A
$\sigma_H^+(A)$	conjunto dos valores próprios de A com vectores próprios positivos- H
$\sigma_H^-(A)$	conjunto dos valores próprios de A com vectores próprios negativos- H
$\sigma_H^0(A)$	conjunto dos valores próprios de A que não estão associados a vectores próprios positivos- H ou negativos- H

Continua na próxima página

Símbolo	Significado
I	operador identidade
I_n	matriz identidade de ordem n
$\det(A)$	determinante da matriz A
$\text{tr}(A)$	traço da matriz quadrada A
$A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$	soma directa das matrizes quadradas A_1, \dots, A_m
J	matriz de inércia da forma $I_r \oplus I_{n-r}$, com $1 \leq r \leq n$
$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$	matriz diagonal de ordem n com entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ na diagonal principal
$\mathcal{C}_2(A, B)$	segunda composta mista das matrizes A e B
$\mathcal{C}_2(A)$	segunda composta da matriz A
$\text{tr } \mathcal{C}_2(A)$	soma dos menores principais de ordem 2 da matriz quadrada A
$A[kl]$	submatriz principal de A determinada pelas linhas e colunas k e l

*A geometria é o conhecimento do que existe sempre.
[...] Portanto, prescreveremos afincadamente aos ha-
bitantes do nosso belo Estado que não deixem, de
modo algum, a geometria.*

Platão

Capítulo 1

Curvas algébricas planas

1.1 O plano projectivo

Seja \mathbb{K} um corpo, com $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. O *plano projectivo* $P\mathbb{K}^2$ define-se a partir do espaço tridimensional \mathbb{K}^3 : $P\mathbb{K}^2$ consiste no conjunto das rectas de \mathbb{K}^3 que passam pela origem. Estas rectas chamam-se *pontos* do plano projectivo.

Dado um ponto Q de \mathbb{K}^3 diferente da origem O , de coordenadas rectangulares (x, y, z) , existe uma única recta que passa por Q e O , determinando, desta forma, um único ponto de $P\mathbb{K}^2$. Denotamos esse ponto por $(x : y : z)$. Dizemos que Q é um seu *representante* e que x, y, z são as suas *coordenadas (de ponto) homogéneas*. As coordenadas homogéneas de um ponto do plano projectivo não são únicas. Se Q representa um determinado ponto do plano projectivo $P\mathbb{K}^2$, então também λQ representa o mesmo ponto, para todo o escalar λ diferente de zero. Assim, dados dois pontos

$$A = (a_1 : a_2 : a_3) \quad \text{e} \quad B = (b_1 : b_2 : b_3)$$

de $P\mathbb{K}^2$, a relação $A = B$ equivale a afirmar que existe um escalar λ diferente de zero tal que

$$b_1 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda a_2 \quad \text{e} \quad b_3 = \lambda a_3.$$

Da mesma forma que os pontos do plano projectivo se identificam com as rectas do espaço tridimensional que passam pela origem, também as rectas do plano projectivo se definem

como planos do espaço tridimensional que passam pela origem. Consideremos um plano de \mathbb{K}^3 que passe pela origem O , de equação

$$ax + by + cz = 0,$$

em que a, b, c são escalares não simultaneamente nulos. Todas as rectas contidas neste plano e que passam pela origem são pontos do plano projectivo. Ao conjunto destes pontos chama-se *recta* de $P\mathbb{K}^2$ de equação

$$ax + by + cz = 0.$$

Evidentemente que a equação

$$(\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z = 0,$$

onde λ é um escalar não nulo, representa o mesmo plano de \mathbb{K}^3 e, conseqüentemente, a mesma recta de $P\mathbb{K}^2$. Assim, tal como sucede com os pontos do plano projectivo, uma recta de $P\mathbb{K}^2$ fica completamente caracterizada por um terno $(a : b : c)$, em que a, b, c não são simultaneamente nulos. Dizemos que a, b, c são as *coordenadas de linha homogéneas* da recta.

Em síntese, se fixarmos a, b, c ,

$$ax + by + cz = 0$$

dá-nos todos os pontos de $P\mathbb{K}^2$ que pertencem à recta de coordenadas de linha homogéneas $(a : b : c)$. Por outro lado, se fixarmos x, y, z ,

$$ax + by + cz = 0$$

dá-nos todas as rectas de $P\mathbb{K}^2$ que passam pelo ponto de coordenadas homogéneas $(x : y : z)$.

Um ponto do plano projectivo PC^2 com um representante em \mathbb{R}^3 diz-se *real*. Os restantes pontos dizem-se *complexos*. Por seu turno, dois pontos de PC^2 dizem-se *complexos conjugados* se tiverem representantes em \mathbb{C}^3 da forma (x, y, z) e $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Analogamente, podemos definir rectas *reais*, *complexas* e *complexas conjugadas*.

Impõe-se analisar que relação existe entre o plano projectivo $P\mathbb{K}^2$ e o plano afim \mathbb{K}^2 . Vejamos que o primeiro se obtém ao adicionarmos ao segundo a designada *recta do infinito*.

Começemos por fixar um plano arbitrário de \mathbb{K}^3 que não passe pela origem, com vista a identificá-lo com o plano afim \mathbb{K}^2 . Por uma questão de simplificação, consideremos o plano $z = 1$. As rectas de \mathbb{K}^3 que passam pela origem, ou seja, os pontos de $P\mathbb{K}^2$, satisfazem uma

de duas condições: ou intersectam o plano $z = 1$ do espaço tridimensional num ponto ou são rectas paralelas a esse plano (como passam pela origem, estão contidas no plano $z = 0$). No primeiro caso, identificamos cada recta com o ponto de intersecção com o plano $z = 1$. Estes são os *pontos finitos* do plano projectivo e as suas coordenadas são da forma $(x : y : 1)$. As rectas que satisfazem a segunda condição são designadas por *pontos do infinito* do plano projectivo. As suas coordenadas são da forma $(0 : 1 : 0)$ ou $(1 : y : 0)$. Todos os pontos do infinito estão contidos numa única recta do plano projectivo, a *recta do infinito*, que corresponde ao plano $z = 0$ do espaço tridimensional. Ao longo da dissertação, adoptaremos este modelo para o plano projectivo. Contudo, chamamos a atenção para o facto de que se podem construir outros modelos. Basta escolher para representante de \mathbb{K}^2 um plano que não passe pela origem, diferente de $z = 1$. A recta do infinito passa, então, a coincidir com o plano paralelo que contém a origem. Facilmente se obteriam as coordenadas dos pontos finitos e infinitos para esse novo modelo.

Uma das diferenças mais significativas entre o plano afim e o plano projectivo reside no facto de, no segundo, duas quaisquer rectas distintas se intersectarem sempre num único ponto. De facto, duas rectas distintas de $P\mathbb{K}^2$ correspondem a dois planos distintos de \mathbb{K}^3 que passam pela origem e que, por conseguinte, se intersectam segundo uma única recta que passa pela origem, isto é, segundo um único ponto de $P\mathbb{K}^2$.

Uma questão com interesse prático consiste em encontrar o ponto de intersecção de duas rectas de $P\mathbb{K}^2$ com coordenadas de linha homogéneas $(a : b : c)$ e $(a' : b' : c')$. Este é um problema simples de Álgebra Linear, para o qual se obtém a solução $(x : y : z)$, em que

$$x = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad y = - \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad z = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Analisando o modelo adoptado para o plano projectivo, conclui-se que cada recta diferente da recta do infinito passa por um e um só ponto do infinito. Além disso, dada uma família de rectas do plano projectivo que determinam rectas paralelas no plano afim, estas passam obrigatoriamente pelo mesmo ponto do infinito. Por outras palavras, cada ponto do infinito determina a direcção das rectas que por ele passam.

As rectas do plano projectivo associadas aos planos $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ do espaço tridimensional revestem-se de particular interesse: a primeira é a recta do infinito, que passa por todos os pontos do infinito; a segunda passa pelos pontos do eixo dos xx do plano afim e pelo ponto do infinito $(1 : 0 : 0)$; e a terceira passa pelos pontos do eixo dos yy do plano afim e pelo ponto do infinito $(0 : 1 : 0)$. As suas coordenadas de linha homogéneas são, respectivamente, $(0 : 0 : 1)$, $(0 : 1 : 0)$ e $(1 : 0 : 0)$. As três rectas unem, dois a dois, os pontos

de coordenadas homogêneas $(1 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0)$ e $(0 : 0 : 1)$, formando um *triângulo de referência* do plano projectivo, habitualmente designado por *triângulo fundamental*. O triângulo fundamental é determinado, portanto, pela base canónica de \mathbb{K}^3 . No caso geral, cada base em \mathbb{K}^3 determina três pontos em $P\mathbb{K}^2$ não-colineares, isto é, não pertencentes a uma mesma recta projectiva. Esses pontos formam um triângulo projectivo que designamos por *triângulo de referência*. A designação advém do facto de, dado um triângulo projectivo determinado por três pontos não-colineares, cada ponto do plano projectivo se expressar como “combinação linear” desses três pontos.

Seja $\Phi: \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ uma transformação linear bijectiva. Da Álgebra Linear sabemos que a imagem por Φ de qualquer recta que passe pela origem é novamente uma recta que passa pela origem. Desta forma, Φ induz uma transformação bijectiva $\tilde{\Phi}$ em $P\mathbb{K}^2$, designada por *transformação projectiva*. A relação entre as duas transformações pode exprimir-se da forma que se segue. Seja $\pi: \mathbb{K}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow P\mathbb{K}^2$ tal que $\pi(x, y, z) = (x : y : z)$. Então

$$\tilde{\Phi} \circ \pi = \pi \circ \Phi,$$

para todos os vectores (x, y, z) de \mathbb{K}^3 não-nulos. Como o conjunto das transformações lineares bijectivas em \mathbb{K}^3 , munido da composição usual de transformações, forma um grupo, o conjunto das transformações projectivas em $P\mathbb{K}^2$, munido da composição de transformações, também tem a estrutura de grupo. Representamos esse grupo por $PGL(\mathbb{K}, 2)$, ou simplesmente por $PGL(2)$, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dadas duas transformações lineares bijectivas em \mathbb{K}^3 , Φ e Φ' , pode provar-se sem dificuldade [22, p.139] que $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}'$ se e só se $\Phi' = \lambda\Phi$, para algum escalar não-nulo λ . Desta forma, uma transformação projectiva em $P\mathbb{K}^2$ pode ser entendida como uma transformação linear bijectiva em \mathbb{K}^3 , a menos da multiplicação por um escalar não-nulo. Note-se igualmente que uma transformação projectiva implica uma mudança de triângulo de referência.

1.2 Propriedades elementares das curvas algébricas

Podemos definir uma curva em \mathbb{K}^2 a partir das suas *equações paramétricas*

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

onde t pertence a um certo intervalo real, ou de *forma implícita* como sendo o conjunto dos pontos (x, y) de \mathbb{K}^2 que satisfazem uma determinada equação

$$f(x, y) = 0, \tag{1.2}$$

onde f é uma função nas variáveis x e y . Muitas curvas com utilidade prática definem-se de forma implícita, considerando em (1.2) um polinómio f nas variáveis x e y . O estudo das curvas parametrizadas está, em geral, associado à *Geometria Diferencial*, enquanto que o estudo das curvas definidas de forma implícita integra-se na *Geometria Algébrica* e será objecto da nossa atenção.

Se considerarmos um polinómio numa só variável com coeficientes em \mathbb{K} , o Teorema Fundamental da Álgebra dita que o conjunto dos seus zeros seja finito, pelo que o estudo dos mesmos reveste-se essencialmente de cariz algébrico. Contudo, para polinómios em duas variáveis, o conjunto dos seus zeros é, em geral, infinito e pode interpretar-se como um objecto geométrico – mais precisamente como uma *curva algébrica plana*. O estudo das curvas algébricas planas proporciona, desta feita, a intersecção de dois caminhos, um oriundo da Álgebra e outro da Geometria, e tem sido objecto da reflexão de muitos matemáticos ao longo dos séculos (vide [16, Capítulo 1]).

Consideremos um polinómio nas variáveis x e y ,

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j,$$

em que os coeficientes a_{ij} pertencem a \mathbb{K} . O *grau* do polinómio é o valor máximo de $i + j$, quando percorremos os índices i, j tais que $a_{ij} \neq 0$. O *conjunto dos zeros* de f traduz-se no conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{K}^2: f(x, y) = 0\}.$$

Uma *curva algébrica (afim)* em \mathbb{K}^2 é o conjunto dos zeros de um polinómio não-constante f de coeficientes em \mathbb{K} , nas variáveis x e y . Dizemos que

$$f(x, y) = 0$$

é a *equação da curva algébrica*. Dado que o conjunto dos zeros de um polinómio permanece inalterado quando o multiplicamos por um escalar não-nulo, podemos considerar o polinómio f mónico se assim o desejarmos. Se f é irredutível, dizemos que a curva é *irredutível*. Caso contrário, a curva diz-se *reduzível*. A *ordem* da curva algébrica é o grau do polinómio f . As curvas de ordem 1, 2, 3 e 4 designam-se, respectivamente, por *rectas*, *cónicas*, *cúbicas* e *quárticas*. As cónicas que conhecemos em \mathbb{R}^2 (elipse, hipérbole e parábola) são exemplos de curvas algébricas de ordem 2.

Podemos estender a noção de curva algébrica ao plano projectivo $P\mathbb{K}^2$. Contudo, devemos considerar polinómios *homogéneos*, ou seja, polinómios cujos termos têm todos o mesmo

grau. A razão é simples. Seja F um polinómio homogéneo não-constante nas variáveis x, y, z e de grau n . Suponhamos que

$$F(a, b, c) = 0,$$

para um determinado ponto (a, b, c) de \mathbb{K}^3 . Sendo F um polinómio homogéneo de grau n , tem-se

$$F(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^n F(a, b, c).$$

Assim, podemos afirmar que o ponto $(a : b : c)$ de $P\mathbb{K}^2$ é solução da equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

uma vez que qualquer seu representante satisfaz a referida equação.

Uma *curva algébrica (projectiva)* em $P\mathbb{K}^2$ é o conjunto dos pontos do plano projectivo que satisfazem uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1.3}$$

onde F é um polinómio homogéneo não-constante de coeficientes em \mathbb{K} . Dizemos que (1.3) é a *equação da curva algébrica*. Mais uma vez, o polinómio F pode ser mónico se assim o desejarmos. A curva diz-se *reduzível* (respectivamente, *irreduzível*) se F é reduzível (respectivamente, irreduzível). A *ordem* da curva algébrica é o grau do polinómio F . *Rectas, cónicas, cúbicas e quárticas* de $P\mathbb{K}^2$ são curvas projectivas de ordem, respectivamente, 1, 2, 3 e 4.

Uma ferramenta útil na investigação das propriedades geométricas de uma curva no plano projectivo consiste na análise das suas *vistas afins*. Consideremos uma curva algébrica em $P\mathbb{K}^2$ de equação (1.3) e o plano $ax + by + cz = d$ como representante do plano afim ($d \neq 0$). Ao eliminarmos uma das variáveis, x, y ou z , a partir das relações

$$ax + by + cz = d \quad \text{e} \quad F(x, y, z) = 0,$$

obtemos um polinómio f nas restantes duas variáveis, o qual representa uma curva algébrica em \mathbb{K}^2 . Referimo-nos à curva obtida como uma *vista afim* da curva projectiva inicial.

Podemos obter as mais variadas vistas afins, sendo cada uma determinada pela escolha de um representante do plano afim, ou seja, de um plano de \mathbb{K}^3 que não passe pela origem. Escolhendo os planos afins $x = 1$, $y = 1$ e $z = 1$, obtemos as *vistas afins principais* da curva algébrica definida em $P\mathbb{K}^2$. Note-se que todo o ponto do plano projectivo tem um representante em \mathbb{K}^3 satisfazendo uma das condições $x = 1$, $y = 1$ ou $z = 1$, pelo que as vistas afins principais cobrem todo o plano projectivo, dando uma ideia do comportamento de toda a curva projectiva.

O processo segundo o qual se obtém um polinómio f em duas variáveis, ao efectuar a substituição $x = 1$, $y = 1$ ou $z = 1$ na equação (1.3), designa-se por *processo de desomogeneização*, uma vez que se elimina a homogeneidade de F . Este processo também é reversível. Concretamente, dada uma curva afim de ordem n , definida pela equação

$$f(x, y) = 0,$$

e qualquer plano afim π em \mathbb{K}^3 , de equação $ax + by + cz = d$, que não passe pela origem ($d \neq 0$) e que não seja paralelo ao eixo dos z ($c \neq 0$), existe uma curva projectiva de ordem n e de equação

$$F(x, y, z) = 0,$$

tal que $F(x, y, z) = f(x, y)$, para cada (x, y, z) em π . Basta tomar

$$F(x, y, z) = l^n f\left(\frac{x}{l}, \frac{y}{l}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j l^{n-i-j},$$

com $l = (ax + by + cz)/d$ [22, p.120]. Este é o chamado *processo de homogeneização*. Se considerarmos o plano afim $z = 1$, o processo de homogeneização resume-se a construir o polinómio

$$F(x, y, z) = z^n f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j z^{n-i-j}.$$

Vejamos um exemplo recorrente na literatura. Dada a circunferência

$$x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

a equação

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0 \tag{1.4}$$

caracteriza a curva projectiva em $P\mathbb{K}^2$ que a contém. Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, e como facilmente se constata, pertencem a esta curva os pontos do infinito

$$\mathcal{I} = (1 : i : 0) \quad \text{e} \quad \mathcal{J} = (1 : -i : 0).$$

Designamos estes pontos por *pontos circulares do infinito*. Para cada ponto Q de PC^2 , diferente de \mathcal{I} e \mathcal{J} , definem-se as *linhas isotrópicas* de Q como sendo as rectas que unem Q a \mathcal{I} e a \mathcal{J} . Como veremos, as linhas isotrópicas desempenham um papel importante na determinação dos *focos* de uma curva algébrica.

Designamos o conjunto dos pontos reais de uma curva algébrica em PC^2 por *parte real* da curva. Quando estudamos uma curva em PC^2 , apenas podemos representar geometricamente as vistas afins da sua parte real, que dão uma ideia do comportamento da curva no seu todo.

De uma maneira geral, as curvas algébricas do plano afim podem considerar-se “incompletas”, uma vez que estão desprovidas dos pontos do infinito. Essas curvas podem estender-se ao plano projectivo ao adicionar os pontos do infinito em falta. Tornam-se, então, numa vista afim da curva projectiva que se obtém. Diferentes vistas afins dessa curva projectiva dão informações adicionais sobre a mesma. Uma curva projectiva pode apresentar muitas vistas afins distintas. Elipses, hipérbolos e parábolas podem ser vistas afins de uma mesma curva projectiva. Por exemplo, as vistas afins da curva definida pela equação (1.4) segundo os planos $z = 1$, $x + z = 1$ e $x + y + z = 1$ são, respectivamente, a elipse $x^2 + y^2 = 1$, a parábola $y^2 = 1 - 2x$ e a hipérbole $2xy = 2x + 2y - 1$. Outra situação interessante reside no facto de as assíptotas de uma vista afim serem *tangentes* à curva projectiva em pontos do infinito. Antes de definirmos *recta tangente* de uma curva algébrica, apresentamos alguns conceitos introdutórios.

Uma ferramenta fundamental no estudo de uma curva consiste na determinação das suas intersecções com outras curvas. Neste contexto, o Teorema de Bézout [51, p.59] é de extrema importância.

Teorema 1.1 (Teorema de Bézout) *Se duas curvas algébricas de ordens n e m não têm componente alguma em comum, então elas intersectam-se no máximo em mn pontos.*

Consideremos, no plano projectivo $P\mathbb{K}^2$, uma curva algébrica Γ de ordem n e uma recta L . Como consequência do Teorema de Bézout, duas situações podem ocorrer: a recta L é uma componente da curva Γ ou L intersecta Γ no máximo em n pontos. Assim, para toda a curva algébrica que não tenha recta alguma como componente, a sua ordem n traduz o número máximo de intersecções da curva com qualquer recta L . Se considerarmos o plano projectivo $P\mathbb{C}^2$, n é o número exacto de intersecções, contando com as correspondentes multiplicidades. Este facto deve-se ao Teorema Fundamental da Álgebra. Em [48, p.103], descreve-se, em traços gerais, o procedimento para determinar os pontos de intersecção de uma recta com uma curva *limitada*, isto é, com uma curva sem pontos na recta do infinito $z = 0$. Generalizamos, em seguida, este procedimento para uma curva arbitrária. Seja

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1.5}$$

a equação de uma curva algébrica irreduzível de ordem n . Determinemos, em primeiro lugar, os pontos do infinito que pertencem à curva, isto é, os pontos de intersecção da curva com a recta do infinito. Tomando $z = 0$ na equação (1.5), obtemos um polinómio homogéneo de grau n nas variáveis x e y . Como $F(x, y, z)$ é irreduzível, existe obrigatoriamente um termo que não depende de z , pelo que $F(x, y, 0)$ é não-nulo. Em seguida, decompomos esse

polinómio em factores irreductíveis. Cada factor irreductível é um polinómio homogéneo em x e y com um determinado grau k . Sendo irreductível, tem que existir um termo associado a x^k ou y^k . Tomando, respectivamente, $y = 1$ ou $x = 1$,¹ obtemos um polinómio de grau k numa variável e dele extraímos k soluções, contadas de acordo com as suas multiplicidades. Considere-se, agora, uma recta de equação

$$ax + by + cz = 0, \quad (1.6)$$

diferente da recta do infinito ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Se tomarmos $z = 1$, as equações (1.5) e (1.6) aparecem em coordenadas não homogéneas,

$$F(x, y, 1) = 0 \quad \text{e} \quad ax + by + c = 0.$$

Suponhamos que $b \neq 0$. Então, $y = (-c - ax)/b$ e as soluções de

$$F\left(x, \frac{-c - ax}{b}, 1\right) = 0 \quad (1.7)$$

são as abcissas dos pontos de intersecção da recta com a curva no plano afim $z = 1$. A recta (1.6) passa pelo ponto do infinito $(1 : -a/b : 0)$. Se a curva (1.5) não passa por esse ponto, isto é, se

$$F(1, -a/b, 0) \neq 0,$$

então o coeficiente associado a x^n em (1.7) é não-nulo e existem precisamente n soluções dessa equação, sendo as raízes múltiplas contadas de acordo com as suas multiplicidades. Se

$$F(1, -a/b, 0) = 0$$

e o polinómio em (1.7) tem grau $n - k$, então a recta intersecta k vezes a curva no ponto do infinito $(1 : -a/b : 0)$. As restantes intersecções correspondem às soluções do polinómio em x de grau $n - k$.

Em seguida, investigamos com maior cuidado as intersecções de uma recta L com uma curva Γ num ponto particular Q da curva. Consideremos uma vista afim da curva Γ de forma a que Q seja finito com coordenadas (a, b) e Γ seja definida pela equação $f(x, y) = 0$. As equações paramétricas da recta L são da forma

$$x = a + \mu t, \quad y = b + \nu t,$$

¹As substituições $y = 0$ ou $x = 0$ conduzem à solução $x = y = z = 0$, que não representa ponto algum do plano projectivo.

sendo L determinada pelo rácio $\mu : \nu$. As intersecções de L com Γ são dadas pelas soluções da equação

$$f(a + \mu t, b + \nu t) = 0. \quad (1.8)$$

Como $Q \in \Gamma$, $t = 0$ é solução desta equação. A multiplicidade desta raiz coincide precisamente com o número de intersecções da recta L com a curva Γ no ponto Q . Dado que $f(a, b) = 0$, se expandirmos o primeiro membro da equação (1.8) numa série de Taylor em t , obtemos

$$\left(f_x(a, b)\mu + f_y(a, b)\nu \right)t + \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(a, b)\mu^2 + 2f_{xy}(a, b)\mu\nu + f_{yy}(a, b)\nu^2 \right)t^2 + \dots = 0.$$

Consideremos os diferentes casos [51, pp.53–54]:

Caso 1. Suponhamos que $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ não se anulam simultaneamente. Então, toda a recta que passe por Q tem uma única intersecção com Γ em Q , com excepção da recta determinada pelo rácio $\mu : \nu$ tal que $f_x(a, b)\mu + f_y(a, b)\nu = 0$. Esta recta chama-se *tangente* de Γ em Q .

Caso 2. Suponhamos que $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ e que

$$f_{xx}(a, b), \quad f_{xy}(a, b) \quad \text{e} \quad f_{yy}(a, b)$$

não se anulam simultaneamente. Nestas condições, todas as rectas que passam por Q têm exactamente duas intersecções em Q , excepto duas rectas (coincidentes ou não), correspondentes às soluções de

$$f_{xx}(a, b)\mu^2 + 2f_{xy}(a, b)\mu\nu + f_{yy}(a, b)\nu^2 = 0, \quad (1.9)$$

que têm mais de duas intersecções. Estas rectas designam-se por *tangentes* de Γ em Q . Se (1.9) tem uma raiz dupla, dizemos que as tangentes são coincidentes.

Caso r. Suponhamos, agora, que todas as derivadas parciais de f até à ordem $r - 1$, inclusive, são nulas no ponto Q e que pelo menos uma das derivadas parciais de ordem r não se anula em Q . Então, toda a recta que passe por Q tem pelo menos r intersecções com Γ em Q . Precisamente r dessas rectas (coincidentes ou não) têm mais de r intersecções. Estas rectas designam-se por *tangentes* de Γ em Q e determinam-se a partir das raízes da equação

$$\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} f_{x^{r-k}y^k}(a, b)\mu^{r-k}\nu^k = 0,$$

sendo contadas de acordo com as respectivas multiplicidades das raízes obtidas. O ponto P diz-se um *ponto de multiplicidade r*. Uma vez que o polinómio f é não-constante, terá de

existir uma derivada parcial de ordem inferior ou igual a n diferente de zero. Assim, todo o ponto de uma curva algébrica de ordem n tem multiplicidade r , com $1 \leq r \leq n$. Podemos ainda estabelecer que um ponto que não pertença à curva tenha multiplicidade 0.

Um ponto de multiplicidade 1 diz-se um *ponto simples*. Um ponto de multiplicidade 2 diz-se um *ponto duplo*, e assim sucessivamente. Os pontos de multiplicidade igual ou superior a 2 designam-se, igualmente, por pontos *singulares* da curva. Se as tangentes num ponto singular são todas distintas, este diz-se *ordinário*. Atendendo à discussão anterior, os pontos singulares são os pontos (a, b) para os quais

$$f(a, b) = f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

Em termos de coordenadas projectivas, o critério para pontos singulares pode apresentar-se de forma mais conveniente [51, p.55]:

Proposição 1.2 *Dada uma curva algébrica definida pela equação $F(x, y, z) = 0$, um ponto $Q = (a : b : c)$ é singular se e só se*

$$F(a, b, c) = F_x(a, b, c) = F_y(a, b, c) = F_z(a, b, c) = 0.$$

Se esse ponto pertence à curva mas não é singular, então a equação da única tangente da curva em Q é

$$F_x(a, b, c)x + F_y(a, b, c)y + F_z(a, b, c)z = 0.$$

Os pontos singulares desempenham um papel importante no estudo das curvas algébricas. Existem alguns casos particulares de pontos singulares que vale a pena referir. Chama-se *nodo* a um ponto duplo ordinário. No caso de termos um ponto duplo em que as duas tangentes coincidem, dizemos que esse ponto é um *cúspide*. Por *curva não-singular* entendemos uma curva algébrica que não tenha pontos singulares.

Para além da análise das singularidades de uma curva algébrica, o estudo dos seus pontos de inflexão pode ser relevante para a compreensão das propriedades geométricas da curva. Seja Q um ponto simples de uma curva algébrica Γ em $P\mathbb{K}^2$. Então, o número de intersecções da única tangente L de Γ em Q é superior ou igual a 2. Em geral, esse número é exactamente dois, mas em alguns casos excepcionais esse número pode ser superior. Somos, então, conduzidos à definição que se segue. Um ponto Q de uma curva algébrica Γ em $P\mathbb{K}^2$ diz-se um *ponto de inflexão* se Q for simples e se o número de intersecções da sua única tangente com a curva for estritamente superior a 2. A tangente em causa designa-se por *tangente de inflexão*.

De acordo com a próxima proposição [21, pp.49,68], uma curva algébrica projectiva tem sempre um número finito de singularidades e de pontos de inflexão.

Proposição 1.3 *Seja Γ uma curva algébrica de ordem n .*

- (a) *A curva Γ tem no máximo $n(n - 1)/2$ singularidades;*
- (b) *Se Γ é irredutível, então Γ tem no máximo $(n - 1)(n - 2)/2$ singularidades;*
- (c) *Se $n \geq 2$ e Γ não contém rectas, então Γ tem no máximo $3n(n - 2)$ pontos de inflexão.*

Notemos que todo o ponto de uma recta é um ponto de inflexão e que as cónicas não podem ter pontos de inflexão. Desta forma, o estudo dos pontos de inflexão só tem interesse para curvas de ordem superior ou igual a 3.

1.3 O plano dual

Uma recta em $P\mathbb{K}^2$ de equação

$$ax + by + cz = 0,$$

onde a, b, c são escalares não simultaneamente nulos, fica completamente caracterizada pelas coordenadas de linha homogéneas $(a : b : c)$, pelo que pode ser identificada com o ponto do plano projectivo com as mesmas coordenadas homogéneas. Deste modo, as rectas de $P\mathbb{K}^2$ induzem um novo plano projectivo $P\mathbb{K}^2$, que se designa por *plano dual*.

Como forma de simplificar o que se segue, representemos o plano projectivo por \mathbb{P} e o seu dual por \mathbb{P}^* . Escreveremos x, y, z para representar as coordenadas homogéneas em \mathbb{P} e X, Y, Z para as coordenadas homogéneas em \mathbb{P}^* . Fixando X, Y, Z , a recta

$$Xx + Yy + Zz = 0$$

em \mathbb{P} corresponde ao ponto $(X : Y : Z)$ em \mathbb{P}^* . Reciprocamente, fixando x, y, z , a recta

$$Xx + Yy + Zz = 0$$

em \mathbb{P}^* define a família de rectas em \mathbb{P} que passam pelo ponto $(x : y : z)$ de \mathbb{P} . Identificamos essa família de rectas com o ponto e $(\mathbb{P}^*)^*$ com \mathbb{P} . Denotamos a recta de \mathbb{P}^* , dual em relação ao ponto Q de \mathbb{P} , por Q^* e o ponto de \mathbb{P} , dual em relação à recta L de \mathbb{P}^* , por L^* . Tem-se, portanto, $(Q^*)^* = Q$ e $(L^*)^* = L$.

Esta correspondência conduz-nos ao conhecido *princípio da dualidade*. Um ponto Q pertence a uma recta L em \mathbb{P} se e só se a recta Q^* passa pelo ponto L^* em \mathbb{P}^* . Em particular, uma família de rectas L_j que passam por um ponto Q em \mathbb{P} corresponde a uma família de pontos L_j^* pertencentes à recta Q^* em \mathbb{P}^* e vice-versa. Os conceitos de “concorrência” e “colinearidade” são, portanto, duais no plano projectivo.

Vejamus o que sucede com as curvas algébricas neste cenário. Para cada ponto Q de uma curva algébrica no plano projectivo \mathbb{P} , existem uma ou mais tangentes da curva (de acordo com a singularidade ou não de Q), as quais correspondem a pontos no plano dual \mathbb{P}^* . De forma intuitiva, à medida que Q percorre a curva algébrica em \mathbb{P} , as correspondentes tangentes traçam uma *curva dual* em \mathbb{P}^* . Pode provar-se que a curva dual de uma cónica irreductível ainda é uma cónica irreductível [22, pp.214–216]. Já a dual de uma cúbica irreductível pode não ser uma curva de ordem 3 (cfr. Teorema 1.7).

Uma equação da forma

$$F(x, y, z) = 0, \quad (1.10)$$

onde F é um polinómio homogéneo de grau n , pode descrever duas curvas algébricas, Γ_1 e Γ_2 . A curva Γ_1 obtém-se considerando (1.10) em coordenadas de ponto. Por definição, Γ_1 tem grau n . Por outro lado, a curva Γ_2 , dual da curva Γ_1 , obtém-se ao considerarmos a equação (1.10) em coordenadas de linha. Dizemos que Γ_2 tem *classe* n . Desta forma, cada curva algébrica Γ pode ser descrita por duas equações distintas: uma em coordenadas de ponto homogéneas,

$$G_1(x, y, z) = 0,$$

e outra em coordenadas de linha homogéneas,

$$G_2(x, y, z) = 0.$$

O grau do polinómio G_1 é a ordem da curva Γ , enquanto que o grau de G_2 é a sua classe. Como vimos na secção anterior, a ordem da curva coincide com o número máximo de pontos segundo o qual cada recta intersecta Γ . Por outro lado, a sua classe traduz o número máximo de tangentes que se podem traçar a partir de um ponto arbitrário do plano e que passam por pontos simples da curva [21, p.88]. A classe de uma curva algébrica está directamente relacionada com o número de *focos* dessa curva.

Os pontos circulares do infinito \mathcal{I} e \mathcal{J} permitem caracterizar, do ponto de vista projectivo, os focos de uma cónica em \mathbb{R}^2 . Prova-se, sem dificuldade [22, pp.152–156], que as linhas isotrópicas que unem os focos de uma cónica a \mathcal{I} e a \mathcal{J} são rectas tangentes da corres-

pondente curva em PC^2 . Inspirados por este resultado, válido no contexto das cónicas em \mathbb{R}^2 , generalizamos o conceito de foco a uma curva algébrica arbitrária.

Dada uma curva algébrica em PC^2 e um ponto Q , diferente de \mathcal{I} e \mathcal{J} , dizemos que Q é um *foco* da curva algébrica se as linhas isotrópicas de Q são ambas tangentes da curva em pontos diferentes de \mathcal{I} e \mathcal{J} .

Uma curva algébrica de classe m tem, em geral, m^2 focos, correspondentes às intersecções das m tangentes da curva que passam por \mathcal{I} com as m tangentes que passam por \mathcal{J} . Se uma curva de classe m é definida em coordenadas de linha por um polinómio com coeficientes reais, então existem m focos reais e $m^2 - m$ que não são reais [47, pp.119-120].

Em geral, a classe de uma curva algébrica difere da sua ordem. As famosas *fórmulas de Plücker* caracterizam a relação classe-ordem. Uma curva algébrica Γ em PC^2 diz-se uma *curva de Plücker* se Γ é irredutível com ordem superior ou igual a 2 e se as singularidades de Γ e da curva dual Γ^* são, quanto muito, nodos ou cúspides. Consideremos:

- (i) d =número de nodos de Γ ;
- (ii) d^* =número de nodos da curva dual Γ^* ;
- (iii) s = número de cúspides de Γ ;
- (iv) s^* = número de cúspides de Γ^* .

Estas quantidades são *invariantes projectivos*. O número de intersecções de uma recta L com uma curva Γ num ponto Q não se altera por aplicação de uma transformação projectiva [22, pp.146–147], pelo que um nodo é transformado noutra nodo e um cúspide noutra cúspide.

Todo o ponto de uma curva dualiza-se numa tangente da curva dual. Se o ponto é singular de multiplicidade $k > 1$, o ponto dualiza-se numa tangente que passa por k pontos. Se estes forem coincidentes, obtemos uma tangente de inflexão. Caso contrário, obtemos uma *tangente múltipla* (se $k = 2$, a tangente diz-se *dupla*). O lema que se segue baseia-se no facto de, por dualização, um nodo corresponder a uma tangente dupla e um cúspide a uma tangente de inflexão.

Lema 1.4 *Se Γ é uma curva de Plücker, então*

- (a) d^* =número de tangentes duplas de Γ ;
- (b) d =número de tangentes duplas de Γ^* ;
- (c) s^* =número de pontos de inflexão de Γ ;

(d) $s = \text{número de pontos de inflexão de } \Gamma^*$.

O próximo teorema [21, pp.89-94] relaciona a classe e a ordem de uma curva de Plücker. Apesar de as fórmulas envolverem apenas singularidades de multiplicidade 2, os resultados apresentados podem generalizar-se a curvas com outro tipo de singularidades. A razão é simples: uma singularidade de multiplicidade superior a 2 equivale, em geral, a um certo número de nodos, cúspides, tangentes duplas e tangentes de inflexão [47, p.55].

Teorema 1.5 (Fórmulas de Plücker) *Se Γ é uma curva de Plücker em PC^2 , de ordem n e classe n^* , então*

$$(a) \quad n^* = n(n - 1) - 2d - 3s;$$

$$(b) \quad n = n^*(n^* - 1) - 2d^* - 3s^*;$$

$$(c) \quad s^* = 3n(n - 2) - 6d - 8s;$$

$$(d) \quad s = 3n^*(n^* - 2) - 6d^* - 8s^*.$$

1.4 Cúbicas de Newton

Apliquemos as fórmulas de Plücker ao estudo das cúbicas irredutíveis. A primeira classificação sistemática para as cúbicas foi apresentada por Isaac Newton no seu trabalho publicado em 1704, *Enumeratio linearum tertii ordinis* (vide [3] e [16, pp.93–98]). Newton preocupou-se com o estudo das cúbicas no plano afim, tendo-as classificado em 72 espécies². Estendendo o estudo das cúbicas ao que hoje se designa por plano projectivo, Newton concluiu que qualquer cúbica podia obter-se como a sombra, produzida por um ponto luminoso sobre um plano conveniente, de uma de cinco cúbicas, que designou por *parábolas divergentes*. Numa linguagem actual, isto significa que, a menos de uma transformação projectiva (que equivale a uma mudança de triângulo de referência), existem apenas cinco cúbicas distintas: as cinco parábolas divergentes. Uma parábola divergente pode definir-se por uma equação na forma

$$y^2 = a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma), \quad (1.11)$$

com $a > 0$ e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. A classificação das parábolas divergentes, que em seguida se apresenta, faz-se tendo em conta as raízes α , β e γ do polinómio em x .

²Contudo, Newton não teve em conta 6 espécies adicionais que só foram descobertas mais tarde.

Teorema 1.6 (Classificação das parábolas divergentes) *Considere-se a parábola divergente de equação (1.11). As seguintes possibilidades podem ocorrer:*

- (a) *se $\alpha < \beta < \gamma$, então a cúbica apresenta uma componente oval e um ramo infinito com três pontos de inflexão reais;*
- (b) *se $\alpha = \beta < \gamma$, então a cúbica tem um ponto isolado e um ramo infinito com três pontos de inflexão reais;*
- (c) *se $\alpha < \beta = \gamma$, então a cúbica consiste numa só peça com um nodo e um ponto de inflexão reais;*
- (d) *se $\alpha = \beta = \gamma$, então a cúbica consiste numa só peça com um cúspide e um ponto de inflexão reais;*
- (e) *se duas raízes são complexas conjugadas, então a cúbica consiste numa só peça com três pontos de inflexão reais.*

Note-se que o ponto do infinito $(0 : 1 : 0)$ é um ponto de inflexão real comum às cinco parábolas divergentes descritas no teorema anterior. A recta do infinito é a sua tangente de inflexão [47, pp.162–163]. As parábolas divergentes das alíneas (a) e (e) não têm pontos singulares, enquanto que as das alíneas (b), (c) e (d) têm um só ponto singular (um nodo ou um cúspide)³. Como o número de nodos e o de cúspides são invariantes projectivos, concluímos que toda a cúbica ou é não-singular, ou tem um único ponto singular (nodo ou cúspide).

Para caracterizarmos, a menos de uma transformação projectiva, a curva dual de uma cúbica arbitrária, necessitamos apenas de determinar a dual de cada parábola divergente. Recorremos às fórmulas de Plücker e às propriedades básicas de dualização.

Teorema 1.7 (Dualização das cúbicas de Newton) *Considere-se uma cúbica arbitrária. A sua dual satisfaz uma e só uma das seguintes condições:*

- C1. *tem ordem 6, três cúspides reais e pelo menos uma componente oval;*
- C2. *é uma quártica com três cúspides reais e uma tangente dupla real (em dois pontos complexos da curva)⁴;*
- C3. *é uma quártica com um cúspide real e uma tangente dupla real (em dois pontos reais da curva);*
- C4. *é uma cúbica com um cúspide e um ponto de inflexão reais;*

³O ponto isolado da alínea (b) é considerado um nodo com duas tangentes complexas [51, pp.56–58].

⁴Sempre que representarmos geometricamente uma curva do tipo C2, identificaremos no plano a correspondente tangente dupla.

As figuras 1 a 5 descrevem um comportamento padrão para as curvas pertencentes a cada um dos cinco casos. Observamos, contudo, que podemos ter mais de uma componente oval no caso C1, enquanto que os três cúspides dos casos C1, C2 e C5 podem estar distribuídos por, no máximo, três componentes. Além disso, alguns dos cúspides ou pontos de inflexão mencionados no Teorema 1.7 podem pertencer à recta do infinito. É interessante realçar que os pontos do infinito de uma curva correspondem às tangentes da sua dual que passam pela origem. A razão é simples: os pontos do infinito e as rectas que passam pela origem são, respectivamente, os pontos e as rectas com a terceira coordenada homogénea nula. Assim, o número de pontos do infinito de uma determinada curva coincide com o número de tangentes da dual que passam pela origem.

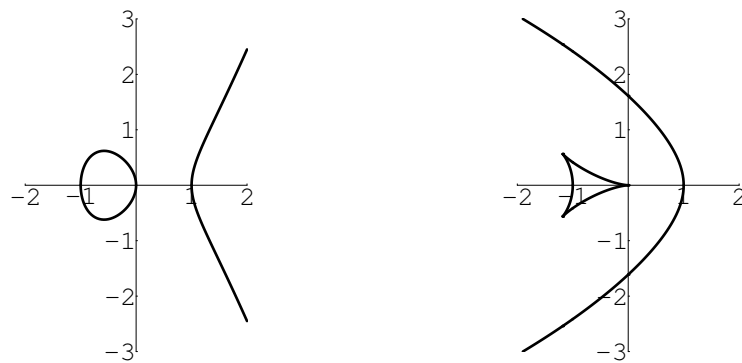


Figura 1: Cúbica de equação $y^2 = (x + 1)x(x - 1)$ e sua dual (do tipo C1).

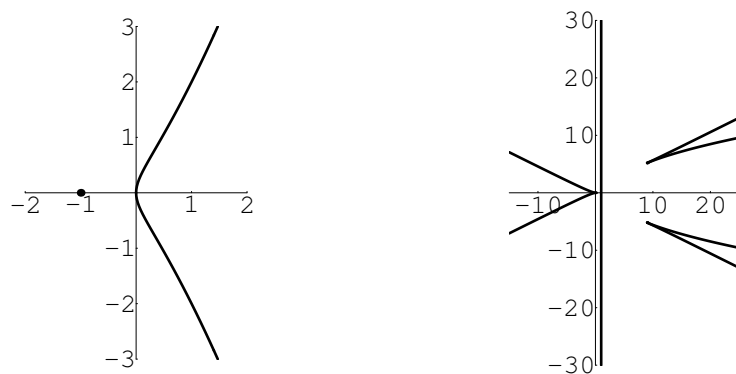


Figura 2: Cúbica de equação $y^2 = (x + 1)^2 x$ e sua dual (do tipo C2).

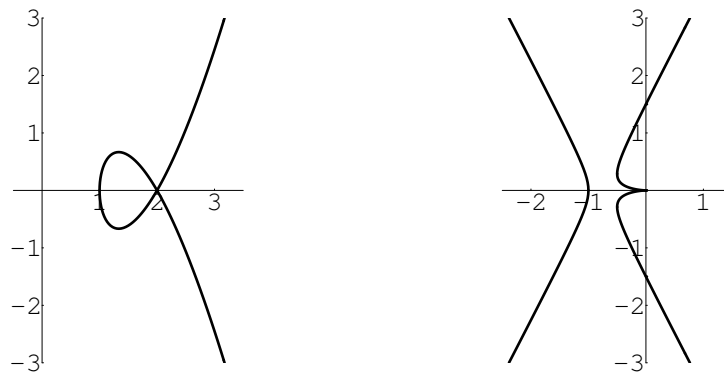


Figura 3: Cúbica de equação $y^2 = 3(x - 1)(x - 2)^2$ e sua dual (do tipo C3).

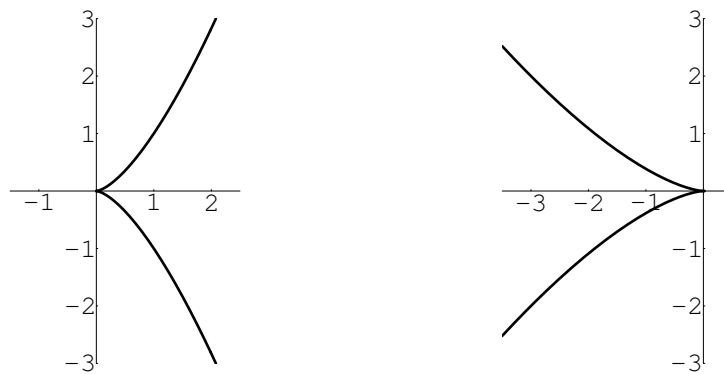


Figura 4: Cúbica de equação $y^2 = x^3$ e sua dual (do tipo C4).

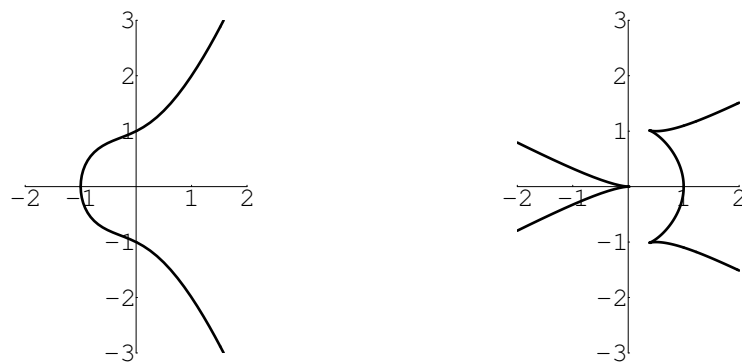


Figura 5: Cúbica de equação $y^2 = (x + 1)(x^2 + 1)$ e sua dual (do tipo C5).

Como veremos no próximo capítulo, o estudo da *curva associada* do *contradomínio numérico indefinido* de uma matriz de ordem 3 requer a análise do conjunto de pontos *reais* de uma curva algébrica definida, em coordenadas de linha homogêneas, por um polinómio de grau 3 com coeficientes *reais*. Por isso, achou-se conveniente, nos Teoremas 1.6 e 1.7, centrar a classificação no plano projectivo real. Contudo, chamamos a atenção do leitor para o facto de uma classificação rigorosa para as cúbicas irreduzíveis em PC^2 se traduzir em apenas três categorias [22, pp.190–198]: as cúbicas não-singulares, as cúbicas com um nodo e as cúbicas com um cúspide. Por um lado, toda a cúbica com um nodo em PC^2 é equivalente, do ponto de vista projectivo, à cúbica da figura 3. Por exemplo, a transformação projectiva de $PGL(2)$,

$$x = -X + Z, \quad y = \sqrt{3}i/3Y \quad \text{e} \quad z = Z,$$

aplica a cúbica da figura 2 na cúbica da figura 3. Por outro lado, é usual enquadrarem-se as cúbicas não-singulares numa só categoria: a das cúbicas de equação

$$y^2z = 4x^3 - \alpha xz^2 - \beta z^3, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \alpha^3 \neq 27\beta^2.$$

Esta divisão em três categorias é uma consequência natural da aplicação das fórmulas de Plücker (Teorema 1.5) no plano projecto complexo quando $n = 3$.

Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.

Hermann Hankel

Capítulo 2

Contradomínios numéricos

2.1 Espaços de Krein

Os conceitos clássicos de comprimento, ângulo e ortogonalidade definem-se em espaços vectoriais a partir de um produto interno (definido). Ao substituírmos esta estrutura por um *produto interno indefinido*, obtemos alterações substanciais na geometria dos espaços.

Seja \mathcal{V} um espaço vectorial sobre o corpo dos números complexos \mathbb{C} . Uma função $[\cdot, \cdot]$ de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ em \mathbb{C} diz-se:

P1. uma *forma sesquilinear* se for linear no primeiro argumento e conjugado-linear⁵ no segundo, ou seja, se para cada $x, y, z \in \mathcal{V}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z] \quad \text{e} \quad [x, \alpha y + \beta z] = \bar{\alpha}[x, y] + \bar{\beta}[x, z];$$

P2. uma *forma hermítica* se para cada $x, y \in \mathcal{V}$,

$$[x, y] = \overline{[y, x]};$$

P3. uma *forma não-degenerada* se o vector nulo for o único vector x de \mathcal{V} para o qual $[x, y] = 0$, sempre que $y \in \mathcal{V}$;

⁵Em vez de “conjugado-linear”, alguns autores utilizam a designação “semi-linear”. Em termos etimológicos, a palavra “sesquilinear” significa precisamente que a forma é linear “uma vez e meia”.

P3'. uma *forma definida positiva* se para cada $x \in \mathcal{V}$, $[x, x] \geq 0$, verificando-se a igualdade se e só se $x = 0$.

Adicionalmente, se \mathcal{V} estiver munido de uma norma $\|\cdot\|$, dizemos que $[\cdot, \cdot]$ é uma *forma limitada* se existir $c > 0$ tal que, para cada $x, y \in \mathcal{V}$,

$$|[x, y]| \leq c \|x\| \|y\|.$$

Um *produto interno (definido)* é uma forma sesquilinear, hermítica e definida positiva, enquanto que um *produto interno indefinido* é uma forma sesquilinear, hermítica e não-degenerada. Note-se que **P3'** implica **P3**, pelo que todo o produto interno definido também é indefinido. O recíproco não é, em geral, verdadeiro. A propriedade **P3** não garante que o produto interno indefinido de um vector x por si mesmo seja sempre positivo, se $x \neq 0$, ou nulo, se $x = 0$. Não só esse valor pode ser negativo como pode ser nulo, mesmo que $x \neq 0$. Esta é precisamente a grande diferença que distingue os dois tipos de produto interno.

Quando consideramos um espaço \mathcal{V} munido de um produto interno indefinido $[\cdot, \cdot]$, dizemos que $x \in \mathcal{V}$ é *positivo*, *negativo* ou *neutro* se, respectivamente,

$$[x, x] > 0, \quad [x, x] < 0 \quad \text{ou} \quad [x, x] = 0.$$

Como $[0, 0] = 0$, o vector nulo é um vector neutro. Podem existir no espaço outros vectores neutros. Prova-se facilmente que, por cada dois vectores do espaço, um positivo e outro negativo, existe obrigatoriamente um vector neutro não-nulo [2, p.4]. Um subespaço \mathcal{M} de \mathcal{V} diz-se *positivo*, *negativo* ou *neutro* se qualquer vector não-nulo de \mathcal{M} for, respectivamente, positivo, negativo ou neutro.

Um *espaço de Hilbert* complexo é um espaço vectorial sobre \mathbb{C} munido de um produto interno definido, que induz a estrutura de espaço métrico completo. Caso nada seja dito em contrário, suporemos que os espaços de Hilbert a considerar são separáveis ou, equivalentemente, que têm dimensão numerável [18, p.17].

Os *espaços de Krein* definem-se a partir da soma directa de dois espaços de Hilbert complexos satisfazendo certas condições. São espaços munidos de um produto interno indefinido e estão amplamente estudados na literatura [2, 14], continuando actualmente a entusiasmar os investigadores. A sua designação é atribuída em homenagem ao matemático ucraniano Mark Krein (1907–1989), que dedicou grande parte dos seus estudos à Teoria de Operadores, em estreita ligação com problemas concretos da Física Matemática.

Seja \mathcal{K} um espaço vectorial sobre \mathbb{C} munido de uma forma sesquilinear e hermítica $[\cdot, \cdot]$. Diz-se que \mathcal{K} , mais precisamente $(\mathcal{K}, [\cdot, \cdot])$, é um *espaço de Krein* se se escreve segundo a soma directa

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dot{+} \mathcal{K}_-, \quad (2.1)$$

onde $(\mathcal{K}_+, [\cdot, \cdot])$ e $(\mathcal{K}_-, -[\cdot, \cdot])$ são espaços de Hilbert e

$$[\mathcal{K}_+, \mathcal{K}_-] = \{0\},$$

isto é, $[x_+, x_-] = 0$, para cada $x_+ \in \mathcal{K}_+$ e $x_- \in \mathcal{K}_-$. A decomposição (2.1) implica que $[\cdot, \cdot]$ seja uma forma não-degenerada [2, p.8], pelo que estamos na presença de um produto interno indefinido.

Observe-se que, em geral, a decomposição (2.1) não é única. Contudo, \mathcal{K}_+ é obrigatoriamente um subespaço positivo de dimensão máxima e \mathcal{K}_- um subespaço negativo de dimensão máxima, pelo que $\dim \mathcal{K}_+$ e $\dim \mathcal{K}_-$ não dependem da decomposição (2.1) que se considere [2, p.38]. Se pelo menos um dos espaços \mathcal{K}_+ ou \mathcal{K}_- tiver dimensão finita, simbolicamente, se

$$\kappa = \min\{\dim \mathcal{K}_+, \dim \mathcal{K}_-\} < \infty,$$

então dizemos que \mathcal{K} é um *espaço de Pontryagin* de índice κ . As propriedades básicas destes espaços foram estabelecidas pelo matemático russo Lev Pontryagin em 1944 [44]. Historicamente, estes espaços foram os primeiros espaços de dimensão infinita com um produto interno indefinido a serem estudados. Apesar de, nos textos recentes, se introduzirem os espaços de Pontryagin como um caso particular dos espaços de Krein, os últimos surgiram na literatura como uma generalização dos primeiros.

Todo o espaço de Hilbert pode ser munido da estrutura de espaço de Krein através de um produto interno indefinido construído a partir do produto interno definido desse espaço e de um operador satisfazendo certas condições.

Seja \mathcal{K} um espaço de Hilbert complexo munido do produto interno definido $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja também H um operador linear em \mathcal{K} , limitado, auto-adjunto e invertível. Como facilmente se constata, a igualdade

$$[x, y] = \langle Hx, y \rangle, \quad x, y \in \mathcal{K}, \quad (2.2)$$

determina uma forma sesquilinear, hermítica e não-degenerada em \mathcal{K} . Este produto interno

indefinido, que representaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$, induz em \mathcal{K} a estrutura de espaço de Krein, como se explica de seguida.

Uma forma $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$, definida num espaço de Hilbert a partir de um operador G linear, limitado, auto-adjunto e invertível, é usualmente designada por *métrica- G* e o espaço correspondente por *espaço- G* . Uma métrica- G diz-se *regular* se $0 \notin \sigma(G)$ ou, equivalentemente, se G^{-1} é um operador limitado [32]. Caso contrário, a métrica- G diz-se *singular*. Ora, todo o espaço de Hilbert munido de uma métrica- G regular é um espaço de Krein. Por outro lado, podemos converter os espaços munidos de uma métrica- G singular em espaços de Krein através de um método de completamento [2, pp.39–40]. Os espaços- G estão amplamente estudados na literatura (vide, por exemplo, [1]).

Sempre que considerarmos um espaço de Hilbert \mathcal{K} de dimensão finita n , identificaremos \mathcal{K} com o espaço \mathbb{C}^n munido do produto interno usual

$$\langle x, y \rangle = y^* x, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

onde y^* representa o vector linha de componentes conjugadas do vector coluna y .

Para cada matriz $n \times n$ com entradas complexas H , hermítica e não-singular, podemos munir \mathbb{C}^n da estrutura de espaço de Krein de dimensão n (e, conseqüentemente, de espaço de Pontryagin de índice $\kappa < n$), recorrendo ao produto interno indefinido

$$\langle x, y \rangle_H = \langle Hx, y \rangle = y^* Hx, \quad x, y \in \mathbb{C}^n. \quad (2.3)$$

Uma base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de \mathbb{C}^n diz-se uma *base ortonormada* para $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ se

$$\langle x_i, x_j \rangle_H = \begin{cases} \pm 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

A propriedade **P3** garante a existência de pelo menos uma base ortonormada de \mathbb{C}^n para cada matriz H , hermítica e não-singular [23, p.10]. A construção de uma base nestas condições segue passos análogos ao caso definido. Obtemos uma decomposição como em (2.1), onde \mathcal{K}_+ (respectivamente, \mathcal{K}_-) é o subespaço gerado pelos vectores x_i tais que $\langle x_i, x_i \rangle_H = 1$ (respectivamente, $\langle x_i, x_i \rangle_H = -1$). Além disso, a dimensão de \mathcal{K}_+ (respectivamente, \mathcal{K}_-) coincide com o número de valores próprios positivos (respectivamente, negativos) da matriz hermítica H , contados de acordo com as correspondentes multiplicidades [23, p.12].

Em (2.3), construiu-se um produto interno indefinido em \mathbb{C}^n a partir de uma matriz H , hermítica e não-singular. Note-se que o recíproco também é verdadeiro [23, p.8]: para cada produto interno indefinido em \mathbb{C}^n , existe uma matriz $n \times n$ com entradas complexas H , hermítica e não-singular, tal que se verifica (2.3). Pode deduzir-se um resultado análogo para o caso em que \mathcal{K} é um espaço de Hilbert de dimensão infinita e em que se substitui a matriz H por um operador linear, limitado, auto-adjunto e invertível, desde que o produto interno indefinido que se considere seja uma forma limitada para a norma induzida pelo produto interno definido de \mathcal{K} [32, p.192].

Interessa-nos considerar espaços de Krein $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+ \dot{+} \mathcal{K}_-$ para os quais $\mathcal{K}_\pm \neq \{0\}$. De facto, a situação em que $\mathcal{K}_- = \{0\}$ (respectivamente, $\mathcal{K}_+ = \{0\}$) não tem interesse, uma vez que $[\cdot, \cdot]$ (respectivamente, $-[\cdot, \cdot]$) se torna simplesmente num produto interno definido. Tal situação corresponde a construir em espaços de Hilbert \mathcal{K} produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ para os quais H seja um operador auto-adjunto *definido positivo* (respectivamente, *definido negativo*). Relembremos estes conceitos.

Sendo H um operador auto-adjunto, $\langle x, x \rangle_H = \langle Hx, x \rangle$ é real, para cada $x \in \mathcal{K}$. Se, para cada $x \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$, $\langle Hx, x \rangle > 0$ (respectivamente, $\langle Hx, x \rangle < 0$), diz-se que H é *definido positivo* (respectivamente, *definido negativo*). Por outro lado, o operador H diz-se *indefinido* se existirem $y, z \in \mathcal{K}$ tais que

$$\langle y, y \rangle_H = \langle Hy, y \rangle > 0 \quad \text{e} \quad \langle z, z \rangle_H = \langle Hz, z \rangle < 0.$$

Se supusermos H invertível, apenas uma de três situações pode ocorrer: H é definido positivo, definido negativo ou indefinido [26, p.400]. Pelos motivos já referidos, daremos especial enfoque aos produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ construídos a partir de um operador indefinido H .

Quando consideramos um espaço de Hilbert munido de um produto interno indefinido como em (2.2), os subespaços positivos, negativos e neutros são muitas vezes designados, respectivamente, por *positivos- H* , *negativos- H* e *neutros- H* . Analogamente, definimos vectores *positivos- H* , *negativos- H* e *neutros- H* . Ao longo da dissertação, seguiremos a nomenclatura empregue por vários autores (por exemplo, em [37, p.16]), segundo a qual os vectores neutros- H são também designados por *isotrópicos- H* , sendo os restantes vectores (positivos- H e negativos- H) incluídos na designação única de *anisotrópicos- H* ⁶.

⁶Chamamos a atenção para o facto de esta nomenclatura não ser consensual. Por exemplo, em [2, p.5], o termo “isotrópico” é utilizado para designar os vectores x de \mathcal{V} tais que $[x, y] = 0$, para cada $y \in \mathcal{V}$, quando o espaço \mathcal{V} está munido de uma forma $[\cdot, \cdot]$ que não satisfaz a propriedade **P3**.

Ao longo do texto, M_n denota a álgebra das matrizes quadradas de ordem n com entradas complexas e H_n o espaço vectorial real das matrizes hermíticas em M_n .

Quando um produto interno definido é introduzido em \mathbb{C}^n , podemos construir certas classes de matrizes de ordem n (que se identificam com operadores lineares de \mathbb{C}^n em \mathbb{C}^n), tais como, as matrizes hermíticas, unitárias e normais. Se o produto interno é indefinido, podemos definir classes análogas às mencionadas.

Seja $H \in H_n$ uma matriz não-singular. A *adjunta- H* de $A \in M_n$ é a matriz $A^{[*]H}$ determinada unicamente pela relação

$$\langle Ax, y \rangle_H = \langle x, A^{[*]H} y \rangle_H, \quad x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Com vista à simplificação da linguagem, e nos casos em que não se coloque o problema de ambiguidade, escreveremos $A^{[*]}$ em vez de $A^{[*]H}$. Podemos exprimir explicitamente a *adjunta- H* em termos das matrizes A e H por

$$A^{[*]} = H^{-1} A^* H,$$

onde A^* representa o operador adjunto de A . Em espaços de dimensão finita, A^* coincide com a transconjugada da matriz A . Uma matriz $A \in M_n$ diz-se *auto-adjunta- H* ou *hermítica- H* se

$$A = A^{[*]}.$$

Uma matriz N diz-se *normal- H* se

$$NN^{[*]} = N^{[*]}N.$$

Por fim, uma matriz U diz-se *unitária- H* se

$$UU^{[*]} = U^{[*]}U = I_n,$$

onde I_n denota a matriz identidade de ordem n . Estas classes de matrizes apresentam notáveis propriedades. Destacamos duas: o espectro de uma matriz hermítica- H é simétrico relativamente ao eixo real [23, p.49], enquanto que o espectro de uma matriz unitária- H é simétrico relativamente à circunferência unitária [23, p.52].

Num espaço de Krein $(\mathcal{K}, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ de dimensão infinita, podem estabelecer-se definições análogas para operador *adjunto- H* , *auto-adjunto- H* , *normal- H* e *unitário- H* .

2.2 Propriedades elementares dos contradomínios numéricos

Seja A um operador linear e limitado definido num espaço de Hilbert complexo \mathcal{K} , munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para cada operador linear H em \mathcal{K} , limitado, auto-adjunto e invertível, obtemos um produto interno indefinido $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ e munimos \mathcal{K} da estrutura de espaço de Krein. O *contradomínio numérico- H* de A é o subconjunto do plano complexo que se denota e define por

$$W_H(A) = \left\{ \frac{\langle Ax, x \rangle_H}{\langle x, x \rangle_H} : x \in \mathcal{K}, \langle x, x \rangle_H \neq 0 \right\}. \quad (2.4)$$

O estudo do contradomínio numérico- H de um operador A reveste-se de especial interesse, uma vez que permite estabelecer a ligação entre as suas propriedades algébricas e geométricas (destacamos, como exemplos, os Teoremas 3.7 e 3.23 a 3.26). Se H é o operador identidade, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_H = \langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno definido, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_+$ é simplesmente um espaço de Hilbert e $W_H(A)$ reduz-se ao *contradomínio numérico clássico* ou *campo de valores* de A ,

$$W(A) = \left\{ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} : x \in \mathcal{K}, \langle x, x \rangle \neq 0 \right\} = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{K}, \langle x, x \rangle = 1 \}. \quad (2.5)$$

A literatura sobre o conceito clássico de contradomínio numérico remonta a 1918 e 1919, nomeadamente a dois artigos famosos, um de Toeplitz [50] e outro de Hausdorff [25]. Esses artigos conduziram a uma das propriedades geométricas mais relevantes do contradomínio numérico clássico: a sua convexidade. Toeplitz mostrou a convexidade da fronteira do campo de valores e, pouco depois, Hausdorff provou que o conjunto é simplesmente conexo. Desde então, vários autores apresentaram demonstrações alternativas para este importante resultado, usualmente referido como *Teorema de Toeplitz-Hausdorff*.

Teorema 2.1 (Teorema de Toeplitz-Hausdorff) *Se A é um operador linear e limitado num espaço de Hilbert \mathcal{H} , então $W(A)$ é um subconjunto convexo de \mathbb{C} .*

Outra propriedade relevante do contradomínio numérico clássico afirma que, para cada operador linear e limitado A definido num espaço de Hilbert \mathcal{H} , $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$, onde $\sigma(A)$ denota o espectro de A e $\overline{W(A)}$ o fecho topológico de $W(A)$. Esta propriedade, conhecida por *inclusão espectral*, foi originalmente provada por Wintner [52], em 1929. É de realçar, igualmente, que o conjunto $\overline{W(A)}$ é compacto, sendo válida a igualdade $\overline{W(A)} = W(A)$ para espaços de dimensão finita.

Na teoria do contradomínio numérico clássico (e das suas generalizações), a redução dos problemas ao caso bidimensional é uma técnica muito utilizada, mesmo quando os espaços têm dimensão infinita. O *Teorema do Contradomínio Elíptico* desempenha um papel chave em tal redução: Murnaghan [39], em 1932, provou que se $A \in M_2$, então o campo de valores $W(A)$ é um disco elíptico (possivelmente degenerado). Ao longo dos anos, foram surgindo outras provas para este resultado. Destacamos a de Donoghue [19], em 1957, e a mais recente apresentada por Li [34], em 1996.

Teorema 2.2 *Seja $A \in M_2$ uma matriz com valores próprios α_1 e α_2 . Nestas condições, $W(A)$ é o disco elíptico (possivelmente degenerado) com focos α_1 e α_2 , e eixos maior e menor de comprimento, respectivamente,*

$$\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - 2\operatorname{Re}(\overline{\alpha_1}\alpha_2)} \quad \text{e} \quad \sqrt{\operatorname{tr}(A^*A) - |\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2}. \quad (2.6)$$

Para um estudo aprofundado das propriedades do contradomínio numérico clássico remetemos o leitor para [27, Capítulo 1] e [24]. A substituição do produto interno definido por um produto interno indefinido gera uma nova teoria, particularmente interessante pelas suas ligações ao campo das aplicações, dada a importância dos produtos internos indefinidos na Física, nomeadamente na Teoria da Relatividade. Em contraste com o caso clássico, o estudo do contradomínio numérico indefinido é relativamente recente [4, 6, 7, 35, 36, 37].

Na próxima proposição listamos algumas propriedades do contradomínio numérico- H que são consequência directa da definição. O símbolo I denota o operador identidade.

Proposição 2.3 *Nas condições da definição (2.4), tem-se:*

- (a) $W_H(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W_H(A)$, para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;
- (b) $W_H(U^{[*]}AU) = W_H(A)$, qualquer que seja o operador U unitário- H ;
- (c) $W_H(A^{[*]}) = \{\bar{z} : z \in W_H(A)\}$;
- (d) $W_H(A + B) \subseteq W_H(A) + W_H(B)$.

Com vista à caracterização do contradomínio numérico- H de um operador A , $W_H(A)$, é útil considerar os conjuntos

$$W_H^\pm(A) = \{\langle Ax, x \rangle_H : x \in \mathcal{K}, \langle x, x \rangle_H = \pm 1\}, \quad (2.7)$$

que designaremos por *contradomínio numérico- H positivo* ou *negativo* de A . Facilmente se constata que

$$W_{-H}^+(A) = -W_H^-(A) \quad \text{e} \quad W_H(A) = W_H^+(A) \cup W_{-H}^+(A).$$

Assim, para estudarmos as propriedades do contradomínio numérico- H de A , basta caracterizarmos os conjuntos $W_H^+(A)$ e $W_{-H}^+(A)$. Importa realçar que a Proposição 2.3 continua válida se se substituir W_H por W_H^+ .

Se H é um operador auto-adjunto definido positivo, então $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ é um produto interno definido, de acordo com o referido na secção anterior. Além disso, existe um (único) operador auto-adjunto definido positivo $H^{1/2}$, a *raiz quadrada positiva* de H , tal que $(H^{1/2})^2 = H$. Note-se que a invertibilidade de H garante que $H^{1/2}$ é invertível [32, p.476]. Segue-se que

$$H = (H^{1/2})^* H^{1/2}.$$

Cálculos simples mostram que

$$W_H(A) = W_H^+(A) = W(H^{1/2} A H^{-1/2}),$$

onde $H^{-1/2}$ denota o operador inverso de $H^{1/2}$. Por outro lado, se H é auto-adjunto definido negativo, então $-H$ é definido positivo e idêntica caracterização pode ser feita para $W_H(A)$:

$$W_H(A) = W_{-H}^+(A) = W((-H)^{1/2} A (-H)^{-1/2}),$$

onde $(-H)^{-1/2}$ denota o operador inverso de $(-H)^{1/2}$. Desta forma, se H é definido positivo ou negativo, o estudo do contradomínio numérico- H reduz-se à teoria do contradomínio numérico clássico. Por este motivo, interessa-nos considerar apenas o caso em que H é indefinido.

Em contraste com o contradomínio numérico clássico $W(A)$, se H é indefinido, então o conjunto $W_H^+(A)$ não é, em geral, limitado nem fechado, mesmo que o espaço \mathcal{K} tenha dimensão finita. Contudo, $W_H^+(A)$ é sempre convexo. A proposição que se segue sistematiza algumas propriedades geométricas do conjunto $W_H^+(A)$ [4, 36, 37]:

Proposição 2.4 *Seja A um operador linear e limitado em \mathcal{K} . Para cada operador linear H em \mathcal{K} , limitado, auto-adjunto, invertível e indefinido, tem-se:*

- (a) $W_H^+(A) = \{\lambda\}$ se e só se $A = \lambda I$;
- (b) se $W_H^+(A)$ não é um conjunto singular, então $W_H^+(A)$ não é limitado;
- (c) $W_H^+(A) \subseteq \mathbb{R}$ se e só se A é um operador auto-adjunto- H , isto é, $A = H^{-1} A^* H$;
- (d) $W_H^+(A)$ é um subconjunto convexo de \mathbb{C} .

As três primeiras alíneas da proposição anterior conduzem a resultados análogos para o contradomínio numérico- H .

Proposição 2.5 *Nas mesmas condições da proposição anterior, tem-se:*

- (a) $W_H(A) = \{\lambda\}$ se e só se $A = \lambda I$;
- (b) se $W_H(A)$ não é um conjunto singular, então $W_H(A)$ não é limitado;
- (c) $W_H(A) \subseteq \mathbb{R}$ se e só se A é um operador auto-adjunto- H , isto é, $A = H^{-1}A^*H$.

Um operador linear e limitado A diz-se *essencialmente auto-adjunto- H* se existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$, tais que $\alpha I + \beta A$ é um operador auto-adjunto- H . Em espaços de dimensão finita, dizemos que A é uma matriz *essencialmente hermítica- H* . Da proposição anterior, concluímos que um operador é essencialmente auto-adjunto- H se e só se o seu contradomínio numérico- H estiver contido numa recta. A recta fica completamente caracterizada pelos escalares α e β : se $\alpha I + \beta A$ é auto-adjunto- H , então $W_H(A)$ está contido na recta que passa por $-\alpha/\beta$ e que tem a direcção de $-\arg \beta$.

Como $W_H(A) = W_H^+(A) \cup W_{-H}^+(A)$, a Proposição 2.4 garante que $W_H(A)$ é a união de dois conjuntos convexos. Contudo, esta condição não garante a convexidade de $W_H(A)$. De facto, em geral, $W_H(A)$ não é convexo, mas sim *pseudo-convexo* [37]: dados dois pontos distintos $x, y \in W_H(A)$, ou $W_H(A)$ contém o segmento de recta de extremos x e y , ou $W_H(A)$ contém a recta definida por x e y , excepto o segmento de recta aberto que os une. A primeira possibilidade ocorre quando x e y pertencem à mesma componente convexa de $W_H(A)$, $W_H^+(A)$ ou $W_{-H}^+(A)$, e a segunda quando tal não acontece. Esta propriedade revelar-se-á de extrema importância no decorrer do texto.

Em [6], estabeleceu-se um resultado paralelo ao Teorema do Contradomínio Elíptico para o caso indefinido, que se designou por *Teorema do Contradomínio Hiperbólico*. Em contraste com o caso clássico, o contradomínio numérico indefinido de uma matriz de ordem 2 é determinado por uma hipérbole e não por uma elipse. Os ramos da hipérbole delimitam as suas duas componentes convexas.

Teorema 2.6 *Seja $A \in M_2$ uma matriz com valores próprios α_1 e α_2 . Se $H = \text{diag}(1, -1)$, então $W_H(A)$ é delimitado por uma hipérbole (possivelmente degenerada) com focos α_1 e α_2 , e eixos transverso e não-transverso de comprimento, respectivamente,*

$$\sqrt{\text{tr}(A^{[*]}A) - 2 \text{Re}(\overline{\alpha_1}\alpha_2)} \quad e \quad \sqrt{|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 - \text{tr}(A^{[*]}A)}. \quad (2.8)$$

Nos casos degenerados, $W_H(A)$ pode ser um conjunto singular, uma recta, uma recta excepto um segmento aberto, todo o plano complexo ou o plano complexo excepto uma recta.

A escolha da matriz H no enunciado do teorema anterior não traduz uma perda de generalidade, como observaremos na secção 2.3. A propriedade de inclusão espectral,

válida no caso clássico, pode generalizar-se também ao caso indefinido, com as devidas adaptações. Restringimos a nossa análise a espaços de dimensão finita. Denotando por $\sigma_H^+(A)$ (respectivamente, por $\sigma_H^-(A)$) o conjunto dos valores próprios de A que têm vectores próprios positivos- H (respectivamente, negativos- H), verifica-se facilmente que

$$\sigma_H^+(A) \subseteq W_H^+(A) \quad \text{e} \quad \sigma_H^-(A) \subseteq W_{-H}^+(A), \quad (2.9)$$

o que mostra que os valores próprios de A associados a vectores próprios anisotrópicos- H pertencem obrigatoriamente ao contradomínio numérico- H de A . Porém, se λ é um valor próprio cujos vectores próprios associados são todos isotrópicos- H , não podemos garantir à partida que $\lambda \in W_H(A)$. O conjunto de tais valores próprios denota-se por $\sigma_H^0(A)$ e o seu estudo reveste-se de peculiar interesse. Vejamos um exemplo que mostra que nem sempre $\sigma_H^0(A)$ está contido em $W_H(A)$. Seja A uma matriz hermítica- H com valores próprios não-reais. Pode provar-se que os vectores próprios associados a esses valores próprios são sempre isotrópicos- H [23, p.50]. Isto significa que os valores próprios não-reais de uma matriz A , hermítica- H , pertencem a $\sigma_H^0(A)$. Contudo, não podem pertencer a $W_H(A)$, visto que, de acordo com a Proposição 2.5, se tem $W_H(A) \subseteq \mathbb{R}$.

2.3 Matriz de inércia

Sejam A_1, \dots, A_m matrizes quadradas. Denota-se por $A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ a matriz diagonal de blocos cujos blocos principais são A_1, \dots, A_m . Diz-se que $A_1 \oplus \dots \oplus A_m$ é a *soma directa* das m matrizes iniciais.

Considere-se \mathbb{C}^n munido do produto interno indefinido $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ induzido por uma matriz não-singular $H \in H_n$. Se r é o número de valores próprios positivos de H , contando multiplicidades, então

$$J = I_r \oplus -I_{n-r} \quad (2.10)$$

é a *matriz de inércia* de H . Tem-se $J^* = J$ e $J^2 = I_n$, isto é, J é hermítica, não-singular e $J^{-1} = J$. Como facilmente se constata, se H é definida positiva (respectivamente, definida negativa), todos os seus valores próprios são reais positivos (respectivamente, reais negativos), pelo que a sua matriz de inércia J coincide com I_n (respectivamente, com $-I_n$). Se H é indefinida, então H tem pelo menos um valor próprio positivo e outro negativo, pelo que $0 < r < n$ e $J \neq \pm I_n$.

A *lei de inércia de Sylvester* [26, pp.222–223] assegura a existência de uma matriz

não-singular $S \in M_n$, tal que $S^*HS = J$.⁷ Para cada matriz $A \in M_n$, verifica-se sem dificuldade que

$$W_J(S^{-1}AS) = W_H(A).$$

Assim, podemos restringir-nos, sem perda de generalidade, ao estudo do contradomínio numérico- J de uma matriz. Este será o objecto central de investigação. Estudar o contradomínio numérico- H , com H indefinida, equivale, portanto, a estudar o contradomínio numérico- J , onde J é uma matriz de inércia como em (2.10), satisfazendo $0 < r < n$.

2.4 Curva associada

Chama-se *recta de suporte* de um subconjunto convexo K de \mathbb{C} a toda a recta que intersecta K em pelo menos um ponto e que define dois semi-planos, um contendo K e o outro não contendo ponto algum de K . Considere-se \mathbb{C}^n munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$, onde J é uma matriz de inércia (2.10). Dada uma matriz $A \in M_n$, as *rectas de suporte* do contradomínio numérico- J de A , $W_J(A)$, são as rectas de suporte das suas componentes convexas, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$. As rectas de suporte de $W_J(A)$ podem não existir, existindo, podem não ser únicas.

Cada matriz $A \in M_n$ admite uma *decomposição cartesiana- J* da forma

$$A = H^J + iK^J, \quad (2.11)$$

onde

$$H^J = \frac{A + A^{[*]}}{2} \quad \text{e} \quad K^J = \frac{A - A^{[*]}}{2i}$$

são matrizes hermíticas- J e $A^{[*]}$ é a adjunta- J de A . Se $J = \pm I_n$, obtém-se a conhecida *decomposição cartesiana* ou *de Toeplitz* de A , sendo $H = H^J$ e $K = K^J$ matrizes hermíticas.

Chama-se *polinómio de Kippenhahn* da matriz A ao polinómio nas variáveis u, v e w ,

$$F_A^J(u, v, w) = \det(uH^J + vK^J + wI_n). \quad (2.12)$$

Centrar-nos-emos no estudo da relação entre o polinómio $F_A^J(u, v, w)$ e o contradomínio numérico- J de A , $W_J(A)$.

⁷Note-se que a lei de inércia de Sylvester nada tem a ver com o conceito tradicional de *inércia*. Segundo consta, Sylvester atribuiu esta designação, afirmando: “se Isaac Newton pode ter uma lei de inércia, então eu também posso!” [28, p.106]

O polinómio em (2.12) é homogéneo de grau n , pelo que

$$F_A^J(u, v, w) = 0 \quad (2.13)$$

pode entender-se como a equação em coordenadas de linha homogéneas de uma curva algébrica Γ de classe n definida no plano projectivo complexo PC^2 . Desta forma, as soluções da equação (2.13) fornecem as rectas tangentes de Γ . Note-se que a recta do infinito, de coordenadas de linha homogéneas $(0 : 0 : 1)$, não é solução da equação (2.13), uma vez que $\det(I_n) = 1 \neq 0$. Consequentemente, a recta do infinito não pode ser tangente da curva Γ . Se considerarmos a curva dual definida pela equação (2.13) em coordenadas de ponto homogéneas,

$$\Gamma^* = \{(u : v : w) \in PC^2 : F_A^J(u, v, w) = 0\},$$

podemos determinar Γ por dualização:

$$\Gamma = \{(x : y : z) \in PC^2 : xu + yv + zw = 0 \text{ é uma tangente de } \Gamma^*\}.$$

A parte real da vista afim de Γ segundo o plano $z = 1$,

$$C_J(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x : y : 1) \in \Gamma\},$$

designa-se por *curva associada* de $W_J(A)$. Se $J = \pm I_n$, escreve-se $F_A(u, v, w)$ em vez de $F_A^J(u, v, w)$ e $C(A)$ em vez de $C_J(A)$.

O próximo resultado [6] relaciona o contradomínio numérico e a sua curva associada e legitima a importância de se estudar a equação (2.13) em coordenadas de linha homogéneas.

Proposição 2.7 *Seja $A = H^J + iK^J \in M_n$, onde J é uma matriz de inércia de ordem n . Se $ux + vy + w = 0$ é a equação de uma recta de suporte de $W_J(A)$, então*

$$\det(uH^J + vK^J + wI_n) = 0.$$

Por conseguinte, as rectas de suporte do contradomínio numérico- J , caso existam, são sempre soluções da equação (2.13), isto é, são rectas tangentes da curva associada. Somos conduzidos a uma importante caracterização do contradomínio numérico. No seu famoso artigo de 1951 [30], Kippenhahn provou que o contradomínio numérico clássico $W(A)$ é o invólucro convexo da sua curva associada $C(A)$:

$$W(A) = \text{conv } C(A).$$

Mediante certas condições, um resultado análogo é válido para o caso indefinido se se substituir a noção de invólucro convexo pela de *invólucro pseudo-convexo*. Vejamos em que condições se tem

$$W_J(A) = \text{pconv } C_J(A),$$

onde $\text{pconv } C_J(A)$ denota o invólucro pseudo-convexo de $C_J(A)$, e como devemos proceder para determinar esse invólucro pseudo-convexo. De acordo com [7], se existir um $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que os n valores próprios $\lambda_1(\theta), \dots, \lambda_n(\theta)$ da matriz $\cos \theta H^J + \sin \theta K^J$ sejam reais e induzam uma base de vectores próprios anisotrópicos- J , $\{u_1(\theta), \dots, u_n(\theta)\}$, então

$$x_k(\theta) = \frac{\langle Au_k(\theta), u_k(\theta) \rangle_J}{\langle u_k(\theta), u_k(\theta) \rangle_J} \in C_J(A), \quad k = 1, \dots, n.$$

Considerando as diferentes direcções θ satisfazendo os requisitos anteriores, o conjunto $W_J(A)$ é o invólucro pseudo-convexo dos pontos da curva assim obtidos. Concretamente, para cada par de pontos,

$$x_r(\theta) = \frac{\langle Au_r(\theta), u_r(\theta) \rangle_J}{\langle u_r(\theta), u_r(\theta) \rangle_J} \quad \text{e} \quad x_s(\theta) = \frac{\langle Au_s(\theta), u_s(\theta) \rangle_J}{\langle u_s(\theta), u_s(\theta) \rangle_J},$$

se

$$\langle u_r(\theta), u_r(\theta) \rangle_J \langle u_s(\theta), u_s(\theta) \rangle_J > 0,$$

então $x_r(\theta)$ e $x_s(\theta)$ pertencem à mesma componente convexa de $W_J(A)$, $W_J^+(A)$ ou $W_J^-(A)$, pelo que $W_J(A)$ contém o segmento de recta fechado que une esses pontos

$$\{\alpha x_r(\theta) + (1 - \alpha)x_s(\theta) : 0 \leq \alpha \leq 1\}. \quad (2.14)$$

Por outro lado, se

$$\langle u_r(\theta), u_r(\theta) \rangle_J \langle u_s(\theta), u_s(\theta) \rangle_J < 0,$$

significa que $x_r(\theta)$ e $x_s(\theta)$ pertencem a diferentes componentes convexas, donde $W_J(A)$ contém as duas semi-rectas

$$\{\alpha x_r(\theta) + (1 - \alpha)x_s(\theta) : \alpha \leq 0 \text{ ou } \alpha \geq 1\}. \quad (2.15)$$

Alguns autores recorrem à terminologia empregue por Kippenhahn, utilizando a expressão “curva geradora de fronteira”⁸ em vez de “curva associada”. Contudo, optámos pela última designação uma vez que, no caso indefinido, a curva associada gera a fronteira do contradomínio numérico apenas quando são satisfeitas as condições que permitem tomar o seu invólucro pseudo-convexo. Caso contrário, obtemos casos degenerados, para os quais a curva associada não desempenha um papel relevante.

⁸Do alemão “randerzeugenden Kurve”.

2.5 Os focos da curva associada

Sejam $A \in M_n$ uma matriz arbitrária e J uma matriz de inércia de ordem n . Considere-se a decomposição cartesiana- J de A ,

$$A = H^J + iK^J, \quad (2.16)$$

onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J .

Proposição 2.8 *Os coeficientes do polinómio de Kippenhahn $F_A^J(u, v, w)$ são todos reais.*

DEMONSTRAÇÃO: Aplicando propriedades elementares do determinante [28, p.13], tem-se

$$\begin{aligned} F_A^J(u, v, w) &= \det(uH^J + vK^J + wI_n) \\ &= \det\left(u(H^J)^{[*]} + v(K^J)^{[*]} + wI_n\right) \\ &= \det\left(uJ(H^J)^*J + vJ(K^J)^*J + wI_n\right) \\ &= \det\left(u(H^J)^* + v(K^J)^* + wI_n\right) \\ &= \overline{F_A^J}(u, v, w), \end{aligned}$$

onde $\overline{F_A^J}(u, v, w)$ denota o polinómio obtido de $F_A^J(u, v, w)$, substituindo os coeficientes do último pelos seus complexos conjugados. \square

Como os coeficientes de $F_A^J(u, v, w)$ são reais e o polinómio tem grau n , a curva de classe n definida pela equação em coordenadas de linha homogéneas

$$F_A^J(u, v, w) = 0 \quad (2.17)$$

tem n focos reais. Para o caso clássico, tomando $J = \pm I_n$, Murnaghan [39] e Kippenhahn [30] provaram, independentemente, que os focos reais dessa curva algébrica coincidem com os valores próprios da matriz A , contados de acordo com as correspondentes multiplicidades. A próxima proposição generaliza o resultado para o caso indefinido.

Proposição 2.9 *Os focos reais da curva algébrica definida em coordenadas de linha homogéneas pela equação (2.17) coincidem com os valores próprios de A .*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $A \in M_n$ com valores próprios $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Tomando $u = 1$ e $v = i$ na equação (2.17), obtemos

$$\det(H^J + iK^J + wI_n) = \det(A + wI_n) = 0,$$

pelo que as raízes w coincidem com os valores próprios de A multiplicados por -1 . Repetindo o mesmo raciocínio para $u = 1$ e $v = -i$, vem

$$\det(H^J - iK^J + wI_n) = \det(A^{[*]} + wI_n) = \det(A^* + wI_n) = 0$$

e as raízes w são os valores próprios de A^* multiplicados por -1 , isto é, coincidem com $-\overline{\alpha_1}, \dots, -\overline{\alpha_n}$. Para $k, l = 1, \dots, n$, representemos por g_k as rectas obtidas com coordenadas de linha $(1 : i : -\alpha_k)$ e por $\overline{g_l}$ as com coordenadas de linha $(1 : -i : -\overline{\alpha_l})$. Notemos que as rectas g_k e $\overline{g_l}$ passam pelos pontos circulares do infinito,

$$\mathcal{J} = (1 : i : 0) \quad \text{e} \quad \mathcal{J} = (1 : -i : 0).$$

Concretamente, as primeiras passam por \mathcal{J} e as segundas por $\overline{\mathcal{J}}$. Além disso, sendo soluções da equação de linhas (2.17), estas rectas são tangentes da curva complexa com vista afim $C_J(A)$. Como a curva tem classe n , estas são as únicas rectas tangentes que passam pelos pontos circulares do infinito e as suas intersecções originam todos os focos da curva algébrica, em particular os n focos reais. De acordo com (1.1), a recta g_k intersecta a sua complexa conjugada $\overline{g_k}$ nos pontos de coordenadas homogéneas

$$(x_k : y_k : z_k), \quad k = 1, \dots, n,$$

onde

$$x_k = \begin{vmatrix} i & -\alpha_k \\ -i & -\overline{\alpha_k} \end{vmatrix} = -2i \operatorname{Re} \alpha_k, \quad y_k = - \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_k \\ 1 & -\overline{\alpha_k} \end{vmatrix} = -2i \operatorname{Im} \alpha_k \quad \text{e} \quad z_k = \begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix} = -2i.$$

As coordenadas de ponto podem apresentar-se na forma

$$(\operatorname{Re} \alpha_k : \operatorname{Im} \alpha_k : 1), \quad k = 1, \dots, n,$$

conforme pretendido. □

2.6 Método de Fiedler para a equação de pontos

Partindo da decomposição (2.16) de uma matriz $A \in M_n$, a equação em coordenadas de linha homogêneas (2.17) caracteriza a curva associada $C_J(A)$. A determinação da correspondente equação de pontos reveste-se de extrema utilidade, nomeadamente na representação geométrica de $C_J(A)$.

Uma forma de obter a equação de pontos consiste em aplicar o método tradicional de dualização apresentado no final do capítulo 1. Introduzimos, nesta secção, um método alternativo para deduzir a equação de pontos, que generaliza o método de Fiedler para o caso clássico [20]. O novo método tem interesse em termos teóricos, pois fornece uma expressão para o polinómio que caracteriza a curva algébrica em coordenadas de ponto homogêneas e mostra que os seus coeficientes dependem unicamente da decomposição cartesiana- J da matriz em estudo. Por outro lado, a sua implementação no *Mathematica 5.1* é eficaz na determinação da equação de pontos para matrizes de ordem relativamente pequena. O método que agora apresentamos foi testado para matrizes de ordem 3 na construção das figuras 22 a 30.

A *segunda composta mista* $\mathcal{C}_2(A, B)$ de duas matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}] \in M_{m,n}$ é a matriz de ordem $\binom{m}{2} \times \binom{n}{2}$, com entradas

$$\mathcal{C}_2(A, B)_{PQ} = \frac{1}{2}(a_{ir}b_{js} + a_{js}b_{ir} - a_{is}b_{jr} - a_{jr}b_{is}),$$

onde $P = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq m$, $Q = (r, s)$, $1 \leq r < s \leq n$. Em particular, define-se e denota-se a *segunda composta* de uma matriz A por

$$\mathcal{C}_2(A) = \mathcal{C}_2(A, A).$$

Segue da definição que

$$\mathcal{C}_2(A)_{PQ} = \det \begin{bmatrix} a_{ir} & a_{is} \\ a_{jr} & a_{js} \end{bmatrix},$$

com $P = (i, j)$, $1 \leq i < j \leq m$, $Q = (r, s)$, $1 \leq r < s \leq n$. Desta forma, $\mathcal{C}_2(A)$ é a matriz cujas entradas são os menores de A de ordem 2. Cálculos simples mostram que

$$\mathcal{C}_2(I_n) = I_{\binom{n}{2}}. \quad (2.18)$$

Listamos, em seguida, algumas propriedades adicionais [20, pp.84–85].

Lema 2.10 A segunda composta mista $\mathcal{C}_2(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear e simétrica, isto é, para $A, B, C \in M_{m,n}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, tem-se

$$(a) \mathcal{C}_2(\alpha A + \beta B, C) = \alpha \mathcal{C}_2(A, C) + \beta \mathcal{C}_2(B, C);$$

$$(b) \mathcal{C}_2(A, B) = \mathcal{C}_2(B, A).$$

Lema 2.11 Para $A, B \in M_n$, o polinómio

$$\det(xA + yB)$$

(que pode escrever-se como o produto de factores lineares complexos da forma $\alpha_k x + \beta_k y$) é identicamente nulo ou tem um factor linear múltiplo se e só se

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2(A) & \mathcal{C}_2(A, B) \\ \mathcal{C}_2(A, B) & \mathcal{C}_2(B) \end{bmatrix} = 0.$$

O próximo teorema fornece a equação de pontos para a curva associada.

Teorema 2.12 (Método de Fiedler para a equação de pontos) Seja $A = H^J + iK^J \in M_n$, onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J . Se a curva definida em coordenadas de linha homogéneas pela equação (2.17) é irreduzível, então a equação de pontos de $C_J(A)$ coincide com a parte não-linear de

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2(H^J - xI_n) & \mathcal{C}_2(H^J - xI_n, K^J - yI_n) \\ \mathcal{C}_2(H^J - xI_n, K^J - yI_n) & \mathcal{C}_2(K^J - yI_n) \end{bmatrix} = 0, \quad (2.19)$$

ou, equivalentemente, com a parte não-linear de

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2(H^J) & \mathcal{C}_2(H^J, K^J) & \mathcal{C}_2(H^J, I_n) & xI_{\binom{n}{2}} \\ \mathcal{C}_2(H^J, K^J) & \mathcal{C}_2(K^J) & \mathcal{C}_2(K^J, I_n) & yI_{\binom{n}{2}} \\ \mathcal{C}_2(H^J, I_n) & \mathcal{C}_2(K^J, I_n) & I_{\binom{n}{2}} & I_{\binom{n}{2}} \\ xI_{\binom{n}{2}} & yI_{\binom{n}{2}} & I_{\binom{n}{2}} & 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (2.20)$$

Os factores lineares das equações (2.19) e (2.20) dizem respeito a tangentes de inflexão ou a tangentes múltiplas (em pontos reais ou complexos, finitos ou infinitos) da curva algébrica que contém $C_J(A)$.

DEMONSTRAÇÃO: Se efectuarmos operações elementares com os blocos da matriz em (2.20) e utilizarmos (2.18), o Lema 2.10 e o Teorema de Laplace [33, p.37], concluímos facilmente que os primeiros membros de (2.19) e (2.20) são iguais se $\binom{n}{2}$ é par, ou simétricos se $\binom{n}{2}$ é ímpar. Consequentemente, as equações (2.19) e (2.20) são equivalentes. Por outro lado, a equação (2.19) é invariante perante a substituição

$$A \mapsto A \pm (x + iy)I_n.$$

Além disso, $C_J(A)$ obtém-se de $C_J(A \pm (x + iy)I_n)$ por translação. Por isso, basta provarmos a validade do resultado para a origem do plano afim. Ora, a origem satisfaz (2.19) se e só se

$$\det \begin{bmatrix} \mathcal{C}_2(H^J) & \mathcal{C}_2(H^J, K^J) \\ \mathcal{C}_2(H^J, K^J) & \mathcal{C}_2(K^J) \end{bmatrix} = 0.$$

O Lema 2.11 implica que o polinómio $\det(uH^J + vK^J)$ seja identicamente nulo ou que tenha um factor linear múltiplo. Contudo, $\det(uH^J + vK^J + wI_n)$ é irreduzível, pelo que não pode ser divisível por w . Isto significa que, se escrevermos $\det(uH^J + vK^J + wI_n)$ como um polinómio em w , o termo independente $\det(uH^J + vK^J)$ não se pode anular. Restamos, portanto, uma única possibilidade: o polinómio $\det(uH^J + vK^J)$ tem um factor linear múltiplo.

A demonstração segue por dualização. Consideremos a curva dual definida pela equação (2.17) em coordenadas de ponto homogéneas. Ao efectuarmos a substituição $w = 0$ nessa equação, obtemos os pontos de intersecção da dual com a recta do infinito. Se

$$\det(uH^J + vK^J)$$

tem um factor linear múltiplo, isto significa que a recta do infinito tem, pelo menos, duas intersecções com a dual num determinado ponto do infinito. Se esse ponto é singular, por dualização obtemos uma tangente de inflexão ou uma tangente múltipla da curva que contém $C_J(A)$. Caso contrário, a recta do infinito é a única tangente da curva dual nesse ponto, pelo que a origem do plano afim pertence a $C_J(A)$. Em suma, as equações (2.19) e (2.20) dão-nos os pontos de $C_J(A)$ e as tangentes múltiplas e de inflexão da curva algébrica que contém $C_J(A)$. \square

De (2.20), deduzimos a ordem de $C_J(A)$: $2\binom{n}{2} = n(n-1)$ menos o número de tangentes de inflexão e de tangentes múltiplas, contadas de acordo com as suas multiplicidades. Esta conclusão é concordante com as fórmulas de Plücker (vide alínea (b) do Teorema 1.5).

2.7 Contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J

Quando $A \in M_n$ e $J = \pm I_n$, o conhecimento da curva associada $C(A)$ é suficiente para caracterizar o contradomínio numérico clássico $W(A)$, uma vez que $W(A) = \text{conv } C(A)$. No caso indefinido, a caracterização de $W_J(A)$ pela curva associada $C_J(A)$ requer cuidados adicionais. Por um lado, passamos a lidar com o conceito de invólucro pseudo-convexo, o que implica uma dicotomia de escolha para cada dois pontos da curva associada (vide (2.14) e (2.15)): o que está contido em $W_J(A)$, o segmento fechado que une os dois pontos ou a recta por eles determinada excepto o segmento aberto que os une? Por outro lado, nem sempre podemos tomar o invólucro pseudo-convexo de $C_J(A)$ para obter $W_J(A)$. Assim, o conhecimento da curva associada $C_J(A)$ não é, em geral, suficiente para caracterizar por completo o contradomínio numérico $W_J(A)$. Como forma de ultrapassar este impasse, recorreremos novamente à decomposição cartesiana- J da matriz A .

Denotam-se por $\text{Re } U$ e $\text{Im } U$ as projecções ortogonais de um subconjunto U de \mathbb{C} nos eixos, respectivamente, real e imaginário. Como cada matriz $A \in M_n$ admite uma (única) decomposição cartesiana- J ,

$$A = H^J + iK^J, \quad (2.21)$$

onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J , tem-se

$$\langle Ax, x \rangle_J = \langle H^J x, x \rangle_J + i \langle K^J x, x \rangle_J.$$

Mas, JH^J e JK^J são matrizes hermíticas, pelo que $\langle H^J x, x \rangle_J$ e $\langle K^J x, x \rangle_J$ são números reais. Segue-se que

$$\text{Re } W_J(A) = W_J(H^J) \quad \text{e} \quad \text{Im } W_J(A) = W_J(K^J). \quad (2.22)$$

Sempre que se considerar uma direcção arbitrária (u, v) do plano afim, estará implícita a escolha (arbitrária) de um $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$. Representaremos por $L_{(u,v)}$, ou simplesmente por L_θ , a recta com a direcção θ que passa pela origem do plano afim.

Proposição 2.13 *Considere-se uma matriz $A \in M_n$ e a sua decomposição cartesiana- J (2.21). A projecção ortogonal de $W_J(A)$ na recta $L_{(u,v)}$ coincide com o contradomínio numérico- J da matriz*

$$uH^J + vK^J. \quad (2.23)$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\theta \in \mathbb{R}$. Considere-se a matriz $B = e^{-i\theta}A$. Tem-se

$$W_J(B) = e^{-i\theta}W_J(A),$$

pelo que a projecção de $W_J(B)$ sobre o eixo dos xx coincide com a projecção de $W_J(A)$ sobre a recta $L_{(u,v)}$, com $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$. Além disso, como $A = H^J + iK^J$, tem-se

$$B = (\cos \theta H^J + \sin \theta K^J) + i(-\sin \theta H^J + \cos \theta K^J).$$

De (2.22), segue-se que $\operatorname{Re} W_J(B) = W_J(uH^J + vK^J)$. □

A Proposição 2.13 continua válida se considerarmos apenas os contradomínios numéricos- J positivos. Este resultado fornece uma ferramenta útil na investigação das propriedades geométricas de $W_J(A)$: partimos da decomposição cartesiana- J de A e “varremos” o plano afim, determinando a projecção de $W_J(A)$ segundo cada direcção (u, v) ; a determinação dessas projecções apenas requer o conhecimento do contradomínio numérico- J da família (2.23) de matrizes hermiticas- J .

A caracterização de $W_J(A)$, quando A é hermitica- J , justifica-se assim plenamente. Começemos por estudar a sua curva associada $C_J(A)$. Sendo A hermitica- J , $W_J(A) \subseteq \mathbb{R}$. Por isso, é de esperar que $C_J(A)$ também esteja contida no eixo real.

Proposição 2.14 *Seja A uma matriz hermitica- J de ordem n . Se $\sigma(A) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, então $C_J(A)$ é o conjunto dos pontos do eixo real de abcissa λ , com $\lambda \in \sigma(A) \cap \mathbb{R}$. Caso contrário, $C_J(A)$ é todo o eixo real.*

DEMONSTRAÇÃO: A curva associada de $W_J(A)$ define-se a partir da equação em coordenadas de linha homogéneas

$$F_A^J(u, v, w) = 0. \tag{2.24}$$

Como A é hermitica- J , tem-se $F_A^J(u, v, w) = \det(uA + wI_n)$. Se tomarmos $u = 0$ em (2.24), tem-se obrigatoriamente $w = 0$, uma vez que a matriz identidade tem determinante não-nulo. Obtemos, como solução, a recta com coordenadas de linha $(0 : 1 : 0)$, isto é, o eixo real. Suponhamos agora que $u \neq 0$. Como estamos a considerar coordenadas homogéneas, as soluções podem apresentar-se na forma $(1 : v : w_0/u_0)$, para cada par de valores (u_0, w_0) que satisfaçam a equação (2.24). Mas, tomando $u = 1$, obtemos o polinómio em w com coeficientes reais, $\det(A + wI)$. As únicas soluções reais são obviamente $(1 : v : -\lambda)$, para cada valor próprio real λ de A . Estas soluções formam, juntamente com o eixo real $(0 : 1 : 0)$, a família de rectas que passam pelo ponto $(\lambda : 0 : 1)$. Como habitualmente, identificamos a

família com o ponto em questão. Caso não existam valores próprios reais, resta-nos o eixo real como solução⁹. \square

No caso clássico, as matrizes hermíticas não têm valores próprios complexos. Se A é hermítica, então $C(A)$ é o conjunto de todos os seus valores próprios e $W(A)$, por ser o invólucro convexo de $C(A)$, coincide com o segmento de recta cujos extremos são o menor e o maior valores próprios de A .

De acordo com a Proposição 2.14, se A é uma matriz hermítica- J e se todos os seus valores próprios são complexos (conjugados), então $C_J(A) = \mathbb{R}$. A próxima proposição afirma que, nestas condições, $W_J(A) = \mathbb{R}$.

Proposição 2.15 *Seja $A \in M_n$ uma matriz hermítica- J . Se $C_J(A) = \mathbb{R}$, então $W_J(A) = \mathbb{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $W_J(A) \subsetneq \mathbb{R}$. Como $W_J(A) = W_J^+(A) \cup W_{-J}^+(A)$, as duas componentes convexas estão estritamente contidas em \mathbb{R} , em particular $W_J^+(A) \subsetneq \mathbb{R}$. Sendo A uma matriz hermítica- J , as entradas da diagonal principal são todas reais, pelo que A não pode ser escalar, uma vez que os seus valores próprios são complexos (conjugados). A Proposição 2.4 garante que $W_J^+(A)$ não é limitado. Dada a sua convexidade, $W_J^+(A)$ consiste obrigatoriamente num intervalo não-limitado com um extremo real a . Mas isto significa que $x = a$ é uma recta de suporte de $W_J^+(A)$ e, de acordo com a Proposição 2.7, uma tangente de $C_J(A)$. Como $C_J(A)$ é a recta real, tal conclusão é um absurdo. \square

Quando $J \neq \pm I_n$ e $C_J(A) \neq \mathbb{R}$, o conhecimento da curva associada não é, em geral, suficiente para caracterizar o contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J . Os próximos resultados desempenham um papel chave na resolução deste problema.

A Proposição 2.16 fornece uma caracterização alternativa para as componentes convexas do contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J . Seguimos uma ideia exposta em [42], no contexto do *contradomínio tracial- J* . (Para $A, C \in M_n$, define-se e denota-se o *contradomínio tracial- J* por

$$W_C^J(A) = \{\operatorname{tr}(CU^{-1}AU) : U \text{ é unitária-}J\}.$$

Tomando $C_1 = \operatorname{diag}(1, 0, \dots, 0)$, vem $W_{C_1}^J(A) = W_J^+(A)$.)

⁹Como as raízes complexas do polinómio $\det(A + wI)$ aparecem aos pares, esta situação só pode ocorrer para n par.

Antes de enunciarmos a Proposição 2.16, relembramos que a norma de um operador auto-adjunto J é, por definição,

$$\|J\| = \sup_{x \neq 0} \left| \frac{\langle Jx, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right|.$$

Se J é unitário, isto é, se $J^{-1} = J^*$, então $\|J\| = 1$ [32, p.205].

Proposição 2.16 *Seja $A \in M_n$ uma matriz hermitica- J . Tem-se*

$$W_J^+(A) = \{x \in \mathbb{R}: t(x + i) \in W(JA + iJ), \text{ para algum } 0 < t \leq 1\}; \quad (2.25)$$

$$W_{-J}^+(A) = \{x \in \mathbb{R}: t(-x - i) \in W(JA + iJ), \text{ para algum } 0 < t \leq 1\}. \quad (2.26)$$

DEMONSTRAÇÃO: Basta provar (2.25), pois a igualdade (2.26) é uma consequência imediata da anterior. Seja $x \in W_J^+(A)$. Logo, $x \in \mathbb{R}$ e, de acordo com (2.7), existe $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$x = \langle Az, z \rangle_J \quad \text{e} \quad \langle z, z \rangle_J = 1.$$

Seja $\alpha = \langle z, z \rangle > 0$. Como $\|J\| = 1$, $1 = \langle z, z \rangle_J \leq \langle z, z \rangle$, donde se conclui que $\alpha \geq 1$. Tomando $\zeta = z/\sqrt{\alpha}$, vem

$$\langle (JA + iJ)\zeta, \zeta \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle (JA + iJ)z, z \rangle = \frac{1}{\alpha} (\langle Az, z \rangle_J + i \langle z, z \rangle_J) = \frac{1}{\alpha} (x + i).$$

Mas, $\langle \zeta, \zeta \rangle = \langle z, z \rangle / \alpha = 1$. De (2.5), segue-se que

$$t(x + i) \in W(JA + iJ), \quad (2.27)$$

para algum $0 < t \leq 1$. Reciprocamente, suponhamos que se verifica (2.27). Nestas condições, existe $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$\langle \zeta, \zeta \rangle = 1 \quad \text{e} \quad t(x + i) = \langle (JA + iJ)\zeta, \zeta \rangle.$$

Como $\langle (JA + iJ)\zeta, \zeta \rangle = \langle A\zeta, \zeta \rangle_J + i \langle \zeta, \zeta \rangle_J$, vem

$$x = \frac{1}{t} \langle A\zeta, \zeta \rangle_J \quad \text{e} \quad t = \langle \zeta, \zeta \rangle_J > 0.$$

Tomando $z = \zeta/\sqrt{t}$, obtém-se

$$x = \langle Az, z \rangle_J \quad \text{e} \quad \langle z, z \rangle_J = \frac{1}{t} \langle \zeta, \zeta \rangle_J = 1,$$

pelo que $x \in W_J^+(A)$. □

Em (2.25), estabelece-se uma notável ligação entre o contradomínio numérico positivo de uma matriz A , hermítica- J , e o contradomínio numérico clássico da matriz $JA + iJ$. Investiguemos algumas propriedades de $W(JA + iJ)$.

Proposição 2.17 *Seja $A \in M_n$ uma matriz hermítica- J , com $J \neq \pm I_n$. Nestas condições,*

- (a) *as rectas $y = \pm 1$ são rectas de suporte de $W(JA + iJ)$, o que significa que todos os pontos de $W(JA + iJ)$ estão contidos na faixa do plano determinada pelas duas rectas paralelas;*
- (b) *λ é um valor próprio de JA se e só se $x = \lambda$ é uma recta tangente da curva associada $C(JA + iJ)$;*
- (c) *λ é um valor próprio real de A se e só se $x = \lambda y$ é uma recta tangente da curva associada $C(JA + iJ)$ que passa pela origem do plano afim.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $B = JA + iJ$. As matrizes JA e J são hermíticas, pelo que $JA + iJ$ representa a decomposição cartesiana da matriz B . Consideremos a curva associada $C(B)$ definida em coordenadas de linha homogéneas pela equação

$$\det(uJA + vJ + wI_n) = 0.$$

Como os valores próprios de J são ± 1 , tem-se

$$\det(J \mp I_n) = 0,$$

o que significa que as rectas do plano afim $y = \pm 1$, que têm coordenadas de linha homogéneas $(0 : 1 : \mp 1)$, são tangentes de $C(B)$. Por outro lado, de (2.22), vem

$$\text{Im } W(B) = \text{Im } W(JA + iJ) = W(J) = [-1, 1],$$

pelo que $y = \pm 1$ são duas rectas de suporte de $W(B)$. Consideremos, agora, a família de rectas $x = \lambda$ que têm coordenadas de linha homogéneas $(1 : 0 : -\lambda)$. Uma recta $x = \lambda$ é tangente de $C(B)$ se e só se

$$\det(JA - \lambda I_n) = 0,$$

o que equivale a afirmar que λ é um valor próprio de JA . Por fim, consideremos a família de rectas $x = \lambda y$, ou seja, a família de rectas com coordenadas de linha homogéneas $(1 : -\lambda : 0)$. Uma recta $x = \lambda y$ é tangente de $C(B)$ se e só se

$$\det(JA - \lambda J) = 0.$$

Como $\det(JA - \lambda J) = \det(J) \det(A - \lambda I_n)$, tal equivale a afirmar que λ é um valor próprio real de A . □

A próxima proposição mostra que se conhecermos $W_J^+(A)$, sendo A hermitica- J , podemos impor condições sobre o aspecto geométrico de $W_{-J}^+(A)$ e vice-versa.

Proposição 2.18 *Seja $A \in M_n$ uma matriz hermitica- J , não-escalar, com $J \neq \pm I_n$. Então, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ são intervalos não-limitados. Além disso,*

- (a) $W_J^+(A)$ é um intervalo da forma $[m_1, +\infty[$ ou $]m_1, +\infty]$, para algum $m_1 \in \mathbb{R}$, se e só se $W_{-J}^+(A)$ é um intervalo da forma $] - \infty, m_2]$ ou $] - \infty, m_2[$, para algum $m_2 \in \mathbb{R}$;
- (b) $W_J^+(A) = \mathbb{R}$ se e só se $W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: Como A não é escalar, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ não são conjuntos limitados. Sendo convexos, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ têm que ser intervalos reais não-limitados. Suponhamos que

$$W_J^+(A) = [m_1, +\infty[\quad \text{ou} \quad W_J^+(A) =]m_1, +\infty[$$

e que

$$W_{-J}^+(A) = [m_2, +\infty[\quad \text{ou} \quad W_{-J}^+(A) =]m_2, +\infty[,$$

com $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$. Como $m_1 + 1 \in W_J^+(A)$ e $|m_1| + |m_2| + 2 \in W_{-J}^+(A)$, de (2.25) e (2.26), concluímos que existem $t_1, t_2 \in]0, 1]$ tais que

$$t_1(m_1 + 1 + i) \in W(JA + iJ) \quad \text{e} \quad -t_2(|m_1| + |m_2| + 2 + i) \in W(JA + iJ).$$

Dada a convexidade de $W(JA + iJ)$, o segmento de recta de extremos $t_1(m_1 + 1 + i)$ e $-t_2(|m_1| + |m_2| + 2 + i)$ está contido em $W(JA + iJ)$. Provemos, em seguida, que este segmento de recta contém um ponto da forma $t_3(m_1 - \varepsilon + i)$, para algum $\varepsilon > 0$ e $0 < t_3 \leq 1$. Tal implica que $m_1 - \varepsilon \in W_J^+(A)$, o que se traduz num absurdo. Ora, para cada $\alpha \in [0, 1]$, tem-se

$$\alpha t_1(m_1 + 1 + i) - (1 - \alpha)t_2(|m_1| + |m_2| + 2 + i) = t_3(m_1 - \varepsilon + i),$$

com

$$t_3 = \alpha t_1 + (\alpha - 1)t_2 \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{(1 - \alpha)t_2(|m_1| - m_1 + |m_2| + 1)}{\alpha t_1 + (\alpha - 1)t_2} - 1.$$

Por um lado, $0 < t_3 \leq 1$ se e só se

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} < \alpha \leq \frac{1 + t_2}{t_1 + t_2}. \quad (2.28)$$

Por outro lado, $\varepsilon > 0$ se e só se

$$\frac{(1 - \alpha)t_2(|m_1| - m_1 + |m_2| + 1)}{\alpha t_1 + (\alpha - 1)t_2} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < \frac{t_2}{t_1/m + t_2}, \quad (2.29)$$

com $m = |m_1| - m_1 + |m_2| + 2$. Como $m \geq 2 > 1$, vem

$$\frac{t_2}{t_1 + t_2} < \frac{t_2}{t_1/m + t_2},$$

pelo que existem sempre soluções $\alpha \in]0, 1[$ satisfazendo as desigualdades (2.28) e (2.29). Igual raciocínio pode ser aplicado quando

$$W_J^+(A) = [m_1, +\infty[\quad \text{ou} \quad W_J^+(A) =]m_1, +\infty[$$

e

$$W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}.$$

Para os casos em que $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ são ambos intervalos limitados superiormente, ou um deles é limitado superiormente e o outro coincide com a recta real, caímos nos casos anteriores se substituirmos A por $-A$, ficando demonstrada a proposição. \square

Se $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ forem intervalos diferentes de \mathbb{R} , então os extremos finitos desses intervalos são valores próprios de A .

Proposição 2.19 *Seja A uma matriz hermitica- J . Se*

$$W_J^+(A) = [m_1, +\infty[\quad \text{ou} \quad W_J^+(A) =]m_1, +\infty[$$

e

$$W_{-J}^+(A) =]-\infty, m_2] \quad \text{ou} \quad W_{-J}^+(A) =]-\infty, m_2[,$$

com $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, então m_1 e m_2 são valores próprios de A .

DEMONSTRAÇÃO: De acordo com (2.25) e (2.26), as rectas

$$x = m_1 y \quad \text{e} \quad x = m_2 y$$

são tangentes reais da curva $C(JA + iJ)$. De facto, se $W_J^+(A) = [m_1, +\infty[$, então $x = m_1 y$ é tangente em pelo menos um ponto de ordenada positiva. Se $W_J^+(A) =]m_1, +\infty[$, então a recta tem que ser tangente na origem do plano afim. Análise idêntica vale para $W_{-J}^+(A)$. Recorrendo à Proposição 2.17, concluímos que m_1 e m_2 são valores próprios de A . \square

Corolário 2.20 *Seja $A \in M_n$ uma matriz hermitica- J , não-escalar, com $J \neq \pm I_n$. Se $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ não coincidem com a recta real, então são intervalos não-limitados com o extremo finito num ponto da curva associada $C_J(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: É uma consequência imediata das Proposições 2.14, 2.18 e 2.19. \square

Um *ponto angular* de um subconjunto convexo K de \mathbb{C} é um ponto da fronteira de K que é vértice de um sector, contendo K , de medida angular inferior a π radianos. A fronteira de um conjunto convexo é uma curva diferenciável, excepto quanto muito num conjunto numerável de pontos angulosos [49, p.13].

O próximo teorema estabelece um critério que permite averiguar quando é que $W_J^+(A)$ é um intervalo não-limitado diferente de \mathbb{R} ou quando coincide com toda a recta real. Baseia-se na posição da origem do plano afim relativamente ao conjunto $W(JA + iJ)$.

Teorema 2.21 (Contradomínio numérico positivo de uma matriz hermitica- J) *Se $A \in M_n$ é uma matriz hermitica- J , não-escalar, com $J \neq \pm I_n$, então*

- (a) $W_J^+(A)$ é um intervalo não-limitado diferente de \mathbb{R} se e só se $0 \in \partial W(JA + iJ)$ ou $0 \notin W(JA + iJ)$;
- (b) $W_J^+(A) = \mathbb{R}$ se e só se 0 é um ponto do interior de $W(JA + iJ)$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, em primeiro lugar, que $0 \notin W(JA + iJ)$. O conjunto $W(JA + iJ)$ é compacto e convexo e, por isso, existem duas rectas de suporte de $W(JA + iJ)$ que passam pela origem: $a_1x + b_1y = 0$ e $a_2x + b_2y = 0$. A Proposição 2.17(a) assegura a existência de números reais $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 + i, x_2 - i \in W(JA + iJ)$. Isto significa que nenhuma das duas rectas de suporte pode coincidir com o eixo dos xx , pelo que $a_1, a_2 \neq 0$. Consequentemente, as rectas de suporte são da forma

$$x = m_1y \quad \text{e} \quad x = m_2y$$

e são tangentes de $C(JA + iJ)$ em dois pontos, $t_1(m_1 + i)$ e $t_2(-m_2 - i)$, com $t_1, t_2 \in]0, 1[$. Isto significa que $W_J^+(A)$ é um intervalo fechado de extremo m_1 e $W_{-J}^+(A)$ é um intervalo fechado de extremo m_2 .

Suponhamos, agora, que $0 \in \partial W(JA + iJ)$. Como $\det(J) = \pm 1 \neq 0$, o eixo dos xx , ou seja, a recta $(0 : 1 : 0)$, não é solução da equação

$$\det(uJA + vJ + wI_3) = 0.$$

Desta forma, nem todas as rectas que passam pela origem são tangentes de $C(JA + iJ)$. Assim, a origem nunca poderá ser um ponto isolado da curva associada, pelo que não é um ponto angular de $W(JA + iJ)$. Então, existe uma única recta tangente de $C(JA + iJ)$ que passa por 0, $x = my$. Nestas condições, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ são intervalos de extremo m . Se a recta $x = my$ passar por outros pontos de $\partial W(JA + iJ)$ de ordenada positiva (respectivamente, negativa), então $W_J^+(A)$ (respectivamente, $W_{-J}^+(A)$) é fechado em m . Caso contrário, $W_J^+(A)$ (respectivamente, $W_{-J}^+(A)$) é aberto em m .

Por fim, se 0 for um ponto do interior de $W(JA + iJ)$, então existe uma bola aberta centrada na origem que está totalmente contida em $W(JA + iJ)$. De (2.25) e (2.26), isto implica que $W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}$. \square

Da demonstração deste teorema decorre um método eficaz na determinação do contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J . Em algumas situações particulares, a aplicação deste método não é necessária. Por exemplo, se $A \in M_n$ tiver n valores próprios reais que determinam uma base de vectores próprios anisotrópicos- J , podemos determinar directamente $W_J(A)$ a partir do invólucro pseudo-convexo da curva associada $C_J(A)$: se $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_J^+(A)$ (respectivamente, $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_J^-(A)$), então o intervalo fechado de extremos λ_1 e λ_2 está contido em $W_J^+(A)$ (respectivamente, em $W_{-J}^+(A)$); se $\lambda_1 \in \sigma_J^+(A)$ e $\lambda_2 \in \sigma_J^-(A)$, então o intervalo não-limitado de extremo λ_1 , que não passa por λ_2 , está contido em $W_J^+(A)$ e o intervalo não-limitado de extremo λ_2 , que não passa por λ_1 , em $W_{-J}^+(A)$. A próxima proposição retrata uma situação particular.

Dizemos que os valores próprios de uma matriz A , hermítica- J , se *entrelaçam* se existirem três valores próprios reais distintos, $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, tais que

$$\lambda_1, \lambda_3 \in \sigma_J^+(A), \lambda_2 \in \sigma_J^-(A) \quad \text{ou} \quad \lambda_1, \lambda_3 \in \sigma_J^-(A), \lambda_2 \in \sigma_J^+(A).$$

Proposição 2.22 *Se A é uma matriz hermítica- J e se os seus valores próprios se entrelaçam, então $W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Basta recorrer a (2.9) e ao facto de o contradomínio numérico- J ser pseudo-convexo. \square

Existem outras situações para as quais

$$W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}.$$

Por exemplo, se A é hermítica- J e se todos os seus valores próprios são complexos (vide Proposição 2.19). Contudo, esta é uma condição demasiado forte. Em [7, p.20], provou-se que basta supor dois dos valores próprios complexos (conjugados). Apresentamos uma

demonstração alternativa deste resultado. Recorremos a duas propriedades bem conhecidas, a primeira relativa a matrizes hermíticas [26, p.176] e a segunda a matrizes hermíticas- H [23, pp.91–92].

Lema 2.23 (Rayleigh-Ritz) *Se $A \in M_n$ é uma matriz hermítica e se $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ são os seus valores próprios, então*

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \quad e \quad \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Lema 2.24 *Seja $H \in H_n$ não-singular. Se $A \in M_n$ é uma matriz hermítica- H e se*

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \langle Ax, x \rangle_H \leq 0 \quad \text{ou} \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, \langle Ax, x \rangle_H \geq 0,$$

então $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Teorema 2.25 (Matrizes hermíticas- J de espectro não-real) *Se A é uma matriz hermítica- J com valores próprios não-reais, então $W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja A uma matriz hermítica- J . Suponhamos que A tem, pelo menos, dois valores próprios complexos conjugados, λ e $\bar{\lambda}$. Para cada $u = \cos \theta$, $v = \sin \theta$, $\theta \in \mathbb{R}$, consideremos a matriz $B = uA + vI_n$. Ora, B ainda é hermítica- J . Além disso, se $u \neq 0$, B tem dois valores próprios complexos, $u\lambda + v$ e $u\bar{\lambda} + v$. Aplicando o Lema 2.24, existem $x_1, x_2 \neq 0$ tais que

$$\langle JBx_1, x_1 \rangle = \langle Bx_1, x_1 \rangle_J < 0 \quad e \quad \langle JBx_2, x_2 \rangle = \langle Bx_2, x_2 \rangle_J > 0.$$

Mas, JB é hermítica e o Lema 2.23 implica que JB tenha um valor próprio estritamente positivo e outro estritamente negativo. Se $u = 0$, então $v \neq 0$ e $JB = vJ$ também tem um valor próprio estritamente positivo e outro estritamente negativo ($\pm v$). Isto significa que a projecção de $W(JA + iJ)$ em relação a qualquer recta que passe pela origem é sempre um intervalo que contém a origem no seu interior. Consequentemente, a origem pertence ao interior de $W(JA + iJ)$. Aplicando o Teorema 2.21, obtemos o pretendido. \square

Passados mais de 55 anos, o conceito de “curva geradora de fronteira” perdura como um tópico de investigação actual e “Über den Wertevorrat einer Matrix” [de R. Kippenhahn] está quase sempre presente na bibliografia dos artigos sobre este tópico.

Paul Zachlin e Michiel Hochstenbach

Capítulo 3

Contradomínio numérico indefinido em M_2 e M_3

3.1 Caracterização de $W_J(A)$ quando $A \in M_2$

3.1.1 O caso em que A é hermítica- J

Seja $A \in M_2$ uma matriz hermítica- J , onde J é uma matriz de inércia de ordem 2. Pretendemos caracterizar o seu contradomínio numérico indefinido. Consideremos, por isso, $J \neq \pm I_2$, o que equivale a supor $J = \text{diag}(1, -1)$. Excluimos a situação em que $A = 0$, pois $C_J(0)$ e $W_J(0)$ reduzem-se simplesmente à origem do plano afim. A matriz A ou tem dois valores próprios complexos conjugados, ou tem dois valores próprios reais (coincidentes ou não). De acordo com a Proposição 2.14, $C_J(A)$ coincide com o eixo real ou reduz-se a um ou dois pontos desse eixo. O Teorema 3.3 afirma que, no primeiro caso, $W_J(A) = \mathbb{R}$, enquanto que, no segundo caso, $W_J(A)$ coincide com o eixo real excepto o segmento de recta aberto determinado por esses dois pontos ou com o eixo real excepto um dos pontos, se eles forem coincidentes. Começemos por estudar a situação em que a matriz hermítica- J tem traço nulo.

Proposição 3.1 *Seja $A \in M_2$ uma matriz hermítica- J tal que $A \neq 0$ e $\text{tr } A = 0$.*

- (a) *Se $\det(A) > 0$, então $C_J(A) = \mathbb{R}$;*
- (b) *Se $\det(A) = 0$, então $C_J(A) = \{0\}$;*

(c) Se $\det(A) < 0$, então $C_J(A) = \left\{ \left(-\sqrt{|\det(A)|}, 0 \right), \left(\sqrt{|\det(A)|}, 0 \right) \right\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Como A é hermítica- J e o seu traço é nulo, os valores próprios de A são da forma $\pm a$ ou $\pm bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. No primeiro caso, $\det(A) = -a^2$ e, no segundo caso, $\det(A) = b^2$. A caracterização da curva associada $C_J(A)$ decorre de forma natural da Proposição 2.14. \square

Determinemos os correspondentes contradomínios numéricos- J .

Proposição 3.2 *Nas condições da proposição anterior, tem-se:*

(a) se $\det(A) > 0$, então $W_J(A) = \mathbb{R}$;

(b) se $\det(A) = 0$, então $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(c) se $\det(A) < 0$, então $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{|\det(A)|}, \sqrt{|\det(A)|}[$.

DEMONSTRAÇÃO: A alínea (a) é consequência imediata das Proposições 2.15 e 3.1. Contudo, utilizaremos o método empregue na demonstração do Teorema 2.21 que permite uma abordagem uniforme para as três situações. Seja A uma matriz hermítica- J tal que $A \neq 0$ e $\text{tr } A = 0$. A matriz A é da forma

$$A = \begin{bmatrix} c & z \\ -\bar{z} & -c \end{bmatrix},$$

com $c \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{C}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$A = \begin{bmatrix} c & d \\ -d & -c \end{bmatrix},$$

com $c \in \mathbb{R}$ e $d \geq 0$. Efectivamente, se $z \neq 0$, recorremos à matriz unitária- J

$$U = \text{diag}(e^{i(\arg z)/2}, e^{-i(\arg z)/2})$$

e ao facto de $W_J(A) = W_J(U^{-1}AU)$. Estudemos o campo de valores da matriz

$$JA + iJ = \begin{bmatrix} c + i & d \\ d & c - i \end{bmatrix}.$$

A curva associada $C(JA + iJ)$ é definida pela equação em coordenadas de linha homogéneas

$$\det(uJA + vJ + wI_n) = 0.$$

Recorrendo ao Teorema 2.12, determinamos a correspondente equação de pontos pelo método de Fiedler. Tem-se

$$\det \begin{bmatrix} c^2 - d^2 & 0 & c & x \\ 0 & -1 & 0 & y \\ c & 0 & 1 & 1 \\ x & y & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$

donde

$$(x - c)^2 + d^2 y^2 = d^2. \quad (3.1)$$

Se $d \neq 0$, então $C(JA + iJ)$ é a elipse centrada no ponto $(c, 0)$, com um semi-eixo contido no eixo dos xx , de comprimento d . Analisemos as três possibilidades que podem ocorrer. Se $\det(A) > 0$, então $d > |c|$. Nestas condições, a origem está no interior de $W(JA + iJ)$, pelo que

$$W_J(A) = W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}.$$

Se $\det(A) = 0$, então $d = |c|$ e a origem é um ponto da elipse. A tangente que passa por 0 identifica-se com o eixo dos yy e não intersecta outro ponto de $W(JA + iJ)$. Logo, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ coincidem com os dois intervalos abertos não-limitados com extremo na origem, pelo que

$$W_J(A) = W_J^+(A) \cup W_{-J}^+(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Por outro lado, se $\det(A) < 0$, então $d < |c|$ e a origem do plano afim não pertence a $W(JA + iJ)$. Para determinarmos as duas rectas de suporte de $W(JA + iJ)$ que passam pela origem, efectuamos em (3.1) a substituição $x = \lambda y$ e resolvemos a equação obtida em ordem a y . As tangentes correspondem aos valores de λ para os quais

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 c^2 - 4(\lambda^2 + d^2)(c^2 - d^2) &= 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{c^2 - d^2} \\ &\Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{|\det(A)|}. \end{aligned}$$

Assim, $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ coincidem com os intervalos fechados não-limitados com extremo λ , que não passam por $-\lambda$, donde

$$W_J(A) = W_J^+(A) \cup W_{-J}^+(A) = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{|\det(A)|}, \sqrt{|\det(A)}[.$$

Por fim, se $d = 0$, então $W(JA + iJ)$ é o segmento de recta de extremos $(c, -1)$ e $(c, 1)$. Como a matriz A é não-nula, tem-se $c \neq 0$. Logo, a origem não pertence a $W(JA + iJ)$ e $x = \pm cy$ são as duas rectas de suporte que passam pela origem. De $\det(A) = -c^2 < 0$, obtemos novamente

$$W_J(A) = W_J^+(A) \cup W_{-J}^+(A) = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{|\det(A)|}, \sqrt{|\det(A)}[,$$

conforme pretendido. \square

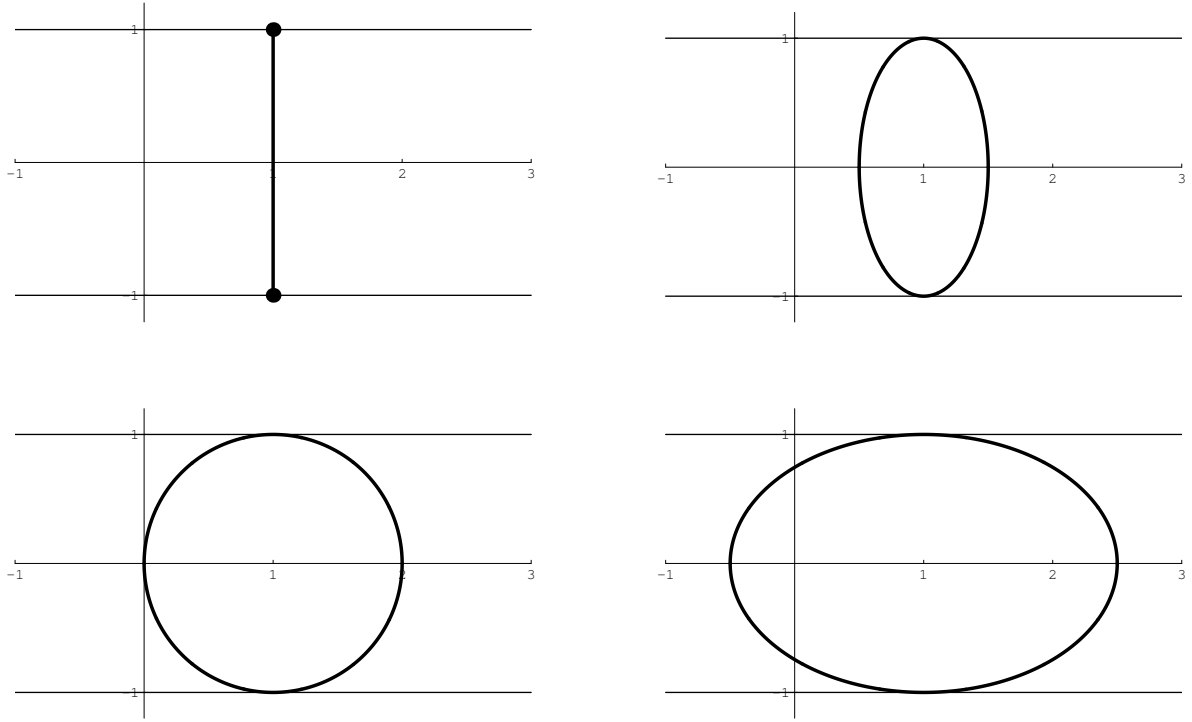


Figura 6: Representação geométrica de $W(JA_d + iJ)$, quando $d = 0, 1/2, 1, 3/2$.

Apresentamos um exemplo que ilustra o procedimento adoptado na demonstração anterior. Consideremos a família de matrizes hermíticas- J de traço nulo,

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -d & -1 \end{bmatrix},$$

com $d \geq 0$. Tem-se (cfr. figura 6):

$$W_J(A_0) = W_{-J}^+(A_0) \cup W_J^+(A_0) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[;$$

$$W_J(A_{1/2}) = W_{-J}^+(A_{1/2}) \cup W_J^+(A_{1/2}) =]-\infty, -\sqrt{3}/2] \cup [\sqrt{3}/2, +\infty[;$$

$$W_J(A_1) = W_{-J}^+(A_1) \cup W_J^+(A_1) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$W_J(A_{3/2}) = W_{-J}^+(A_{3/2}) \cup W_J^+(A_{3/2}) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

O próximo teorema mostra que, no caso $n = 2$, o conhecimento da curva associada de uma matriz hermítica- J é suficiente para caracterizar o correspondente contradomínio numérico- J .

Teorema 3.3 (Contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J de ordem 2) *Seja $A \in M_2$ uma matriz hermítica- J não-nula.*

- (a) *Se $C_J(A) = \mathbb{R}$, então $W_J(A) = \mathbb{R}$;*
- (b) *Se $C_J(A) = \{\lambda\}$, então $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$;*
- (c) *Se $C_J(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, com $\lambda_1 < \lambda_2$, então $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus]\lambda_1, \lambda_2[$.*

DEMONSTRAÇÃO: Se $A \in M_2$ é uma matriz hermítica- J arbitrária, então

$$B = A - \frac{\operatorname{tr}(A)}{2} I_2$$

ainda é hermítica- J e tem traço nulo. Como $\operatorname{tr}(A)$ é um número real, os valores próprios de A e B apresentam o mesmo comportamento: são ambos complexos ou ambos reais (coincidentes ou não). Além disso, $W_J(A)$ obtém-se de $W_J(B)$ por uma translação segundo o vector $\operatorname{tr}(A)/2$. Nas condições da alínea (b), $\operatorname{tr}(A)/2 = \lambda$, e da alínea (c),

$$\frac{\operatorname{tr}(A)}{2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad \text{e} \quad \sqrt{|\det(B)|} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}.$$

Recorrendo à Proposição 3.2, a demonstração fica concluída. \square

3.1.2 Caso geral

Sejam $A \in M_2$ uma matriz arbitrária e $J \in M_2$ uma matriz de inércia como em (2.10). Com vista à caracterização do contradomínio numérico- J da matriz A , a Proposição 2.3 permite supor, sem perda de generalidade, A com traço nulo e determinante real. Com efeito, sejam $B = -\zeta/2 I_2 + A$, com $\zeta = \operatorname{tr}(A)$, e $C = e^{-i\theta/2} B$, com $\theta = \arg \det(B)$. Constata-se facilmente que a matriz C tem traço nulo e determinante real, e que

$$W_J(C) = e^{-i\theta/2}(-\zeta/2 + W_J(A)) \Leftrightarrow W_J(A) = \zeta/2 + e^{i\theta/2} W_J(C),$$

ou seja, $W_J(A)$ obtém-se de $W_J(C)$ por uma rotação com respeito ao ângulo $\theta/2$, seguida de uma translação segundo o vector $\zeta/2$.

Recorrendo à decomposição cartesiana- J de A , $A = H^J + iK^J$, onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J , cálculos simples mostram que o polinómio de Kippenhahn de A assume a expressão

$$\begin{aligned} F_A^J(u, v, w) = & \det(H^J)u^2 + \det(K^J)v^2 + w^2 \\ & + \operatorname{Re} \operatorname{tr}(A)uw + \operatorname{Im} \operatorname{tr}(A)vw + \operatorname{Im} \det(A)uv. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Os coeficientes do polinómio $F_A^J(u, v, w)$ são invariantes da matriz A . Tendo em conta as condições impostas a A , obtém-se a expressão simplificada

$$F_A^J(u, v, w) = \det(H^J)u^2 + \det(K^J)v^2 + w^2. \quad (3.3)$$

Como A tem traço nulo, também H^J e K^J o têm, pelo que os seus valores próprios são simétricos, da forma $\pm a$ ou $\pm bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Em ambos os casos, os determinantes de H^J e K^J são números reais, o que vai ao encontro do estabelecido na Proposição 2.8.

Importa, portanto, analisar as soluções de uma equação em coordenadas de linha homogéneas da forma $c_u u^2 + c_v v^2 + w^2 = 0$, onde c_u e c_v são constantes reais.

Proposição 3.4 *Seja C a parte real da curva algébrica definida em coordenadas de linha homogéneas pela equação*

$$G(u, v, w) = c_u u^2 + c_v v^2 + w^2 = 0,$$

com $c_u, c_v \in \mathbb{R}$.

- (a) Se $c_u = c_v = 0$, então $C = \{0\}$;
- (b) Se $c_u < 0$ e $c_v = 0$, então $C = \left\{ \left(-\sqrt{|c_u|}, 0 \right), \left(\sqrt{|c_u|}, 0 \right) \right\}$;
- (c) Se $c_u > 0$ e $c_v = 0$, então $C = \mathbb{R}$;
- (d) Se $c_u = 0$ e $c_v < 0$, então $C = \left\{ \left(0, -\sqrt{|c_v|} \right), \left(0, \sqrt{|c_v|} \right) \right\}$;
- (e) Se $c_u = 0$ e $c_v > 0$, então $C = i\mathbb{R}$;
- (f) Se $c_u > 0$ e $c_v > 0$, então $C = \emptyset$ ¹⁰;
- (g) Se $c_u < 0$ e $c_v < 0$, então C é a elipse, centrada na origem, com os eixos maior e menor contidos nos eixos coordenados, de comprimento, respectivamente,

$$2\sqrt{\max\{|c_u|, |c_v|\}} \quad \text{e} \quad 2\sqrt{\min\{|c_u|, |c_v|\}};$$

- (h) Se $c_u < 0$ e $c_v > 0$, então C é a hipérbole, centrada na origem, com os eixos transversos e não-transversos contidos, respectivamente, nos eixos real e imaginário, de comprimento, respectivamente, $2\sqrt{|c_u|}$ e $2\sqrt{|c_v|}$;
- (i) Se $c_u > 0$ e $c_v < 0$, então C é a hipérbole, centrada na origem, com os eixos transversos e não-transversos contidos, respectivamente, nos eixos imaginário e real, de comprimento, respectivamente, $2\sqrt{|c_v|}$ e $2\sqrt{|c_u|}$.

¹⁰Esta situação corresponde ao caso de uma elipse imaginária.

DEMONSTRAÇÃO: (a) Se $c_u = c_v = 0$, então $G(u, v, w) = 0$ se e só se $w = 0$. Obtemos, como solução, a família de rectas $(u : v : 0)$ que passam pelo ponto $(0 : 0 : 1)$. Consequentemente, C reduz-se à origem do plano afim.

(b) Suponhamos que $c_v = 0$. Tem-se $G(u, v, w) = 0$ se e só se $w = \pm \sqrt{-c_u}u$. Se $c_u < 0$, então as soluções reais são $(u : v : \sqrt{|c_u|}u)$ e $(u : v : -\sqrt{|c_u|}u)$, ou seja, são as famílias de rectas que passam, respectivamente, pelos pontos do eixo real

$$(-\sqrt{|c_u|} : 0 : 1) \quad \text{e} \quad (\sqrt{|c_u|} : 0 : 1).$$

(c) Se $c_v = 0$ e $c_u > 0$, então a única solução real da equação $G(u, v, w) = 0$ obtém-se considerando $u = 0$ e $w = 0$. Essa solução é a recta de coordenadas de linha homogéneas $(0 : 1 : 0)$, ou seja, o eixo real. Isto implica que C coincida com esse eixo.

A demonstração das alíneas (d) e (e) segue passos análogos, respectivamente, aos das alíneas (b) e (c).

(f) Se $c_u > 0$ e $c_v > 0$, então $G(u, v, w) = 0$ se e só se $|c_u|u^2 + |c_v|v^2 + w^2 = 0$. Esta equação não tem soluções reais, uma vez que $(0 : 0 : 0)$ não representa recta alguma do plano projectivo. Desta forma, C é o conjunto vazio.

(g) Suponhamos que $c_u < 0$ e $c_v < 0$. Então, $G(u, v, w) = -|c_u|u^2 - |c_v|v^2 + w^2$. Para determinar a equação de pontos da curva algébrica, toma-se $w = 1$ e $u = (-1 - vy)/x$. Cálculos elementares mostram que

$$\frac{\partial G}{\partial v}(x, y, v) = -2|c_u| \frac{y + y^2v}{x^2} - 2|c_v|v.$$

Igualando a expressão anterior a zero e resolvendo em ordem a v , vem

$$v = -\frac{|c_u|y}{|c_v|x^2 + |c_u|y^2},$$

pelo que

$$u = -\frac{|c_v|x}{|c_v|x^2 + |c_u|y^2}.$$

Substituindo u e v na equação $G(u, v, 1) = 0$, tem-se

$$\frac{x^2}{|c_u|} + \frac{y^2}{|c_v|} = 1.$$

Seguindo o mesmo método, obtemos para as alíneas (h) e (i), respectivamente, as equações

$$\frac{x^2}{|c_u|} - \frac{y^2}{|c_v|} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{|c_v|} - \frac{x^2}{|c_u|} = 1,$$

conforme pretendido. □

Consideremos o caso clássico, tomando $J = \pm I_2$. A Proposição 3.4 fornece uma demonstração alternativa bastante simples do Teorema do Contradomínio Elíptico (Teorema 2.2). A análise faz-se sobre os determinantes das matrizes hermíticas decorrentes da decomposição cartesiana da matriz.

Teorema 3.5 (Teorema do Contradomínio Elíptico) *Seja $A = H + iK$ uma matriz em M_2 satisfazendo $\text{tr}(A) = 0$ e $\text{Im det}(A) = 0$. Sejam $h = \det(H)$ e $k = \det(K)$. Podem ocorrer as seguintes possibilidades:*

- (a) se $h = k = 0$, então $C(A) = \{0\}$ e $W(A) = \{0\}$;
- (b) se $h \neq 0, k = 0$, então $C(A) = \left\{ \left(-\sqrt{|h|}, 0 \right), \left(\sqrt{|h|}, 0 \right) \right\}$ e $W(A) = [-\sqrt{|h|}, \sqrt{|h|}]$;
- (c) se $h = 0, k \neq 0$, então $C(A) = \left\{ \left(0, -\sqrt{|k|} \right), \left(0, \sqrt{|k|} \right) \right\}$ e $W(A) = i[-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}]$;
- (d) se $h \neq 0, k \neq 0$, então $C(A)$ é a elipse, centrada na origem, com os eixos maior e menor contidos nos eixos coordenados, de comprimento, respectivamente,

$$2\sqrt{\max\{|h|, |k|\}} \quad \text{e} \quad 2\sqrt{\min\{|h|, |k|\}}.$$

O contradomínio numérico $W(A)$ coincide com a elipse e o seu interior¹¹.

DEMONSTRAÇÃO: Como H e K são hermíticas e têm traço nulo, os seus valores próprios são reais e simétricos. Consequentemente,

$$\det(H) \leq 0 \quad \text{e} \quad \det(K) \leq 0.$$

Recordando que $W(A)$ é o invólucro convexo de $C(A)$, o resultado segue da Proposição 3.4 (a), (b), (d) e (g). \square

Com vista à caracterização do contradomínio numérico no caso indefinido, consideremos $J = \text{diag}(1, -1)$. Partindo da decomposição cartesiana- J da matriz A e analisando os determinantes das correspondentes matrizes hermíticas- J , deduzimos com relativa facilidade o Teorema do Contradomínio Hiperbólico (Teorema 2.6).

Note-se que, ao contrário do caso clássico, as matrizes hermíticas- J podem ter determinante estritamente positivo, dado que o seu espectro pode ser não-real. Assim, surge a possibilidade, antes negada, de a curva associada ser uma hipérbole. Por outro lado, a hipótese de a curva ser uma elipse já não é possível, como mostra o lema que se segue.

¹¹Sempre que nos referirmos ao “interior” ou ao “exterior” de uma determinada curva algébrica, estaremos a utilizar o termo no sentido geométrico e não topológico.

Lema 3.6 *Seja $A = [a_{ij}] \in M_2$ tal que $A = H^J + iK^J$, onde H^J e K^J são matrizes hermiticas- J . Suponhamos que $\text{tr}(A) = 0$ e $\text{Im det}(A) = 0$.*

- (a) *As desigualdades $\det(H^J) < 0$ e $\det(K^J) < 0$ não podem ocorrer simultaneamente;*
- (b) *Se $\det(H^J) < 0$ e $\det(K^J) = 0$, então $K^J = 0$;*
- (c) *Se $\det(H^J) = 0$ e $\det(K^J) < 0$, então $H^J = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: (a) Como $\text{tr}(A) = 0$, tem-se $a_{22} = -a_{11}$. Das desigualdades

$$\det(H^J) < 0 \quad \text{e} \quad \det(K^J) < 0,$$

vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(a_{12} - \overline{a_{21}})(\overline{a_{12}} - a_{21}) &< \frac{1}{4}(a_{11} + \overline{a_{11}})^2; \\ \frac{1}{4}(a_{12} + \overline{a_{21}})(\overline{a_{12}} + a_{21}) &< -\frac{1}{4}(a_{11} - \overline{a_{11}})^2. \end{aligned}$$

Como os membros das desigualdades anteriores são não-negativos, ao multiplicarmos essas desigualdades membro-a-membro, obtemos

$$\frac{1}{16}(a_{12}^2 - \overline{a_{21}}^2)(\overline{a_{12}}^2 - a_{21}^2) < -\frac{1}{16}(a_{11}^2 - \overline{a_{11}}^2)^2. \quad (3.4)$$

Mas, $\det(A)$ é um número real, donde $-a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = -\overline{a_{11}}^2 - \overline{a_{12}}\overline{a_{21}}$. Segue-se que

$$(a_{12}^2 - \overline{a_{21}}^2)(\overline{a_{12}}^2 - a_{21}^2) < -(a_{12}a_{21} - \overline{a_{12}}\overline{a_{21}})^2.$$

Logo, $|a_{12}|^4 + |a_{21}|^4 - 2|a_{12}|^2|a_{21}|^2 = (|a_{12}|^2 - |a_{21}|^2)^2 < 0$, o que é um absurdo.

(b) Suponhamos que $\det(H^J) < 0$ e $\det(K^J) = 0$. Se $a_{11} \neq \overline{a_{11}}$, então a desigualdade (3.4) continua válida e chegamos novamente a uma contradição. Desta forma, a_{11} tem que ser um número real. De $\det(K^J) = 0$, vem $a_{12} = -\overline{a_{21}}$. Logo,

$$K^J = \begin{bmatrix} \text{Im } a_{11} & -\frac{1}{2}i(a_{12} + \overline{a_{21}}) \\ -\frac{1}{2}i(a_{21} + \overline{a_{12}}) & -\text{Im } a_{11} \end{bmatrix} = 0.$$

(c) A prova é análoga à da alínea anterior. □

Teorema 3.7 (Teorema do Contradomínio Hiperbólico) *Para uma matriz A nas condições do lema anterior, com $h = \det(H^J)$ e $k = \det(K^J)$, as seguintes possibilidades podem ocorrer:*

(a) *se $h = k = 0$, então $C_J(A) = \{0\}$. Se $A = 0$, então $W_J(A) = \{0\}$; caso contrário, $W_J(A)$ é a recta que passa pelos pontos a_{11} e $-a_{11}$, excepto a origem;*

(b) *se $h < 0, k = 0$, então $C_J(A) = \left\{ \left(-\sqrt{|h|}, 0 \right), \left(\sqrt{|h|}, 0 \right) \right\}$ e*

$$W_J(A) = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{|h|}, \sqrt{|h|}[;$$

(c) *se $h > 0, k = 0$, então $C_J(A) = \mathbb{R}$. Se $K^J = 0$, então $W_J(A) = \mathbb{R}$; caso contrário, $W_J(A) = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$;*

(d) *se $h = 0, k < 0$, então $C_J(A) = \left\{ \left(0, -\sqrt{|k|} \right), \left(0, \sqrt{|k|} \right) \right\}$ e*

$$W_J(A) = i\mathbb{R} \setminus]-\sqrt{|k|}, \sqrt{|k|}[;$$

(e) *se $h = 0, k > 0$, então $C_J(A) = i\mathbb{R}$. Se $H^J = 0$, então $W_J(A) = i\mathbb{R}$; caso contrário, $W_J(A) = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$;*

(f) *se $h > 0, k > 0$, então $C_J(A) = \emptyset$ e $W_J(A) = \mathbb{C}$;*

(g) *se $h < 0, k > 0$, então $C_J(A)$ é a hipérbole, centrada na origem, com os eixos transverso e não-transverso contidos, respectivamente, nos eixos real e imaginário, de comprimento, respectivamente, $2\sqrt{|h|}$ e $2\sqrt{|k|}$; $W_J(A)$ é a hipérbole e o seu interior;*

(h) *se $h > 0, k < 0$, então $C_J(A)$ é a hipérbole, centrada na origem, com os eixos transverso e não-transverso contidos, respectivamente, nos eixos imaginário e real, de comprimento, respectivamente, $2\sqrt{|k|}$ e $2\sqrt{|h|}$; $W_J(A)$ é a hipérbole e o seu interior.*

DEMONSTRAÇÃO: A Proposição 3.4 e o Lema 3.6(a) caracterizam a curva associada $C_J(A)$. Resta determinar, para cada caso, o correspondente contradomínio numérico- J .

(a) Tomemos $h = k = 0$. Tem-se $C_J(A) = \{0\}$.

Suponhamos que $K^J = 0$. Se $H^J = 0$, então $A = 0$ e $W_J(A) = \{0\}$. Caso contrário, $A = H^J$, $a_{11} \neq 0$ é um número real e a Proposição 3.2 implica que $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Suponhamos, agora, que $K^J \neq 0$. Defina-se $B = e^{-i\theta} A \neq 0$, com $\theta = \arg a_{11}$. Das condições $h = 0$ e $k = 0$, vem

$$(\operatorname{Re} a_{11})^2 = 1/4|a_{12} - \overline{a_{21}}|^2 \quad \text{e} \quad (\operatorname{Im} a_{11})^2 = 1/4|a_{12} + \overline{a_{21}}|^2.$$

Segue-se que

$$\operatorname{Re}(a_{11}^2) = (\operatorname{Re} a_{11})^2 - (\operatorname{Im} a_{11})^2 = -\operatorname{Re}(a_{12}a_{21}). \quad (3.5)$$

Mas, A tem determinante real, pelo que $\det(A) = \operatorname{Re}(-a_{11}^2 - a_{12}a_{21})$. Assim, (3.5) implica que $\det(A) = 0$. Como as matrizes A , H^J e K^J têm determinante nulo, prova-se facilmente que $|a_{11}| = |a_{12}| = |a_{21}|$. Então, $-a_{11}^2 - a_{12}a_{21} = 0$ implica que

$$e^{i \arg a_{11}} e^{i \arg a_{11}} + e^{i \arg a_{12}} e^{i \arg a_{21}} = 0 \Leftrightarrow e^{i \arg a_{11}} e^{-i \arg a_{21}} + e^{-i \arg a_{11}} e^{i \arg a_{12}} = 0.$$

Logo, B é hermítica- J e $\det(B) = 0$. Pela Proposição 3.2, $W_J(B) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Consequentemente, $W^J(A) = e^{i\theta} \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Suponhamos que $h < 0$ e $k = 0$. Do Lema 3.6(b), vem $K^J = 0$. Então, $A = H^J$ é hermítica- J e o resultado segue das Proposições 3.2 e 3.4.

(c) Para $h > 0$ e $k = 0$, a curva associada $C_J(A)$ coincide com o eixo real. Se $K^J = 0$, então $A = H^J$ e, de acordo com a Proposição 3.2, $W_J(A) = \mathbb{R}$. Se $K^J \neq 0$, pela Proposição 3.2, $W_J(K^J) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, a projecção de $W_J(A)$ no eixo imaginário é o eixo imaginário excepto a origem. Assim, $W_J(A)$ é todo o plano complexo excepto o eixo real.

A demonstração das alíneas (d) e (e) segue passos análogos, respectivamente, aos das alíneas (b) e (c).

(f) Suponhamos que $h > 0$ e $k > 0$. A Proposição 3.2 garante que $W_J(H^J) = \mathbb{R}$ e $W_J(K^J) = \mathbb{R}$. Pela Proposição 3.4, $C_J(A) = \emptyset$, pelo que $W_J(A) = \mathbb{C}$.

(g) Se $h < 0$ e $k > 0$ e de acordo com a Proposição 3.2, vem

$$W_J(H^J) = \mathbb{R} \setminus]-\sqrt{|h|}, \sqrt{|h}|[\quad \text{e} \quad W_J(K^J) = \mathbb{R}.$$

Da Proposição 3.4, concluímos que $C_J(A)$ é a hipérbole, centrada na origem, com os eixos transverso e não-transverso contidos, respectivamente, nos eixos real e imaginário, de comprimento, respectivamente, $2\sqrt{|h|}$ e $2\sqrt{|k|}$. Então, $W_J(A)$ é a hipérbole e o seu interior.

(h) A prova é análoga à da alínea anterior. □

A próxima proposição relaciona o determinante de uma matriz de ordem 2 com os determinantes das matrizes hermíticas- J resultantes da sua decomposição cartesiana- J , sendo J uma matriz de inércia arbitrária ($J = \pm I_2$ ou $J = \operatorname{diag}(1, -1)$).

Proposição 3.8 *Se $A = H^J + iK^J$ é a decomposição cartesiana- J de $A \in M_2$, então*

$$\operatorname{Re} \det(A) = \det(H^J) - \det(K^J).$$

DEMONSTRAÇÃO: A segunda composta de uma matriz de ordem 2 coincide com o seu determinante. Logo, do Lema 2.10 vem

$$\det(A) = \det(H^J) - \det(K^J) + 2i\mathcal{C}_2(H^J, K^J).$$

Cálculos elementares mostram que $2i\mathcal{C}_2(H^J, K^J) = i \operatorname{Im} \det(A)$ e o resultado fica estabelecido. \square

Se $A = [a_{ij}] \in M_2$ tem traço nulo e determinante real, então os seus valores próprios são simétricos (ambos reais ou imaginários puros), α e $-\alpha$. As expressões (2.6) e (2.8) também se podem obter directamente dos Teoremas 3.5 e 3.7, recorrendo à Proposição 3.8. Vejamos o procedimento a adoptar, por exemplo, para o caso indefinido. De acordo com (2.8), os eixos transverso e não-transverso da hipérbole têm comprimento, respectivamente,

$$\sqrt{2|a_{11}|^2 - |a_{12}|^2 - |a_{21}|^2 + 2|\alpha|^2} \quad \text{e} \quad \sqrt{-2|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 + 2|\alpha|^2}. \quad (3.6)$$

Em contraponto, apliquemos o Teorema 3.7. Obtemos uma hipérbole sempre que os determinantes $\det(H^J)$ e $\det(K^J)$ tiverem sinais contrários. Suponhamos que $\det(H^J) < 0$ e $\det(K^J) > 0$. De acordo com o Teorema 3.7, os eixos transverso e não-transverso têm comprimento, respectivamente,

$$2\sqrt{|\det(H^J)|} = \sqrt{-4\det(H^J)} \quad \text{e} \quad 2\sqrt{|\det(K^J)|} = \sqrt{4\det(K^J)}. \quad (3.7)$$

Mediante alguns cálculos envolvendo as entradas das matrizes H^J e K^J , obtemos, respectivamente,

$$\sqrt{2|a_{11}|^2 - |a_{12}|^2 - |a_{21}|^2 - 2\det(A)} \quad \text{e} \quad \sqrt{-2|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{21}|^2 - 2\det(A)}.$$

Como $\det(H^J) < 0$ e $\det(K^J) > 0$, a Proposição 3.8 garante que $\det(A) < 0$. Por outro lado, $\det(A)$ coincide com o produto dos valores próprios da matriz, que são ambos reais ou imaginários puros. O sinal do determinante impõe que eles sejam reais, tendo-se

$$\det(A) = -|\alpha|^2.$$

Desta forma, as expressões (3.6) e (3.7) coincidem. Igual raciocínio pode ser empregue para o caso em que $\det(H^J) > 0$ e $\det(K^J) < 0$.

3.2 Caracterização de $W_J(A)$ quando $A \in M_3$

Sejam $A \in M_3$ uma matriz arbitrária e $J \in M_3$ uma matriz de inércia como em (2.10). Recorrendo à decomposição cartesiana- J de A , $A = H^J + iK^J$, onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J , facilmente obtemos a expressão para o polinómio de Kippenhahn em termos dos invariantes da matriz A :

$$\begin{aligned} F_A^J(u, v, w) = & w^3 + \det(H^J)u^3 + \det(K^J)v^3 + \operatorname{Re} \operatorname{tr}(A)uw^2 + \operatorname{Im} \operatorname{tr}(A)vw^2 \\ & + \operatorname{Im} \operatorname{tr} \mathcal{C}_2(A)uvw + \operatorname{tr} \mathcal{C}_2(H^J)u^2w + \operatorname{tr} \mathcal{C}_2(K^J)v^2w \\ & + [\det(H^J) - \operatorname{Re} \det(A)]uv^2 + [\det(K^J) + \operatorname{Im} \det(A)]u^2v, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde $\operatorname{tr} \mathcal{C}_2(B)$ denota a soma dos menores principais 2×2 de uma matriz B .

Pretendemos estudar o caso indefinido. Assumiremos, sem perda de generalidade, que

$$J = \operatorname{diag}(1, 1, -1).$$

De facto, existem apenas duas possibilidades para uma matriz de inércia (2.10), de ordem 3 e indefinida: ou coincide com J ou com $J' = \operatorname{diag}(1, -1, -1)$. Por outro lado, como $W_{J'}(A) = W_{-J'}(A)$, podemos supor $J' = \operatorname{diag}(-1, 1, 1)$ e a caracterização de $W_{J'}(A)$ segue os mesmos passos que a de $W_J(A)$.

3.2.1 O caso em que A é hermítica- J

Seja $A \in M_3$ uma matriz hermítica- J . Da mesma forma como procedemos no caso $n = 2$, caracterizaremos $W_J(A)$ a partir das propriedades geométricas do conjunto

$$W(JA + iJ).$$

De acordo com a Proposição 2.17, as rectas $y = \pm 1$ são rectas de suporte de $W(JA + iJ)$, pelo que são tangentes da curva associada $C(JA + iJ)$. Como -1 e 1 são valores próprios de J de multiplicidade, respectivamente, 1 e 2, a equação

$$\det(uJA + vJ + wI_3) = 0$$

tem uma raiz simples, $(0 : 1 : 1)$, e uma raiz dupla, $(0 : 1 : -1)$. Consequentemente, a recta $y = -1$ é uma tangente simples de $C(JA + iJ)$, enquanto que $y = 1$ é uma tangente dupla¹². Em seguida, deduzimos os pontos da curva por onde passam estas tangentes.

¹²No caso geral, se $J = I_r \oplus I_{n-r}$, então as rectas $y = 1$ e $y = -1$ são tangentes da curva associada em, respectivamente, r e $n - r$ pontos.

Proposição 3.9 Se $A = [a_{ij}] \in M_3$ é uma matriz hermitica- J , então:

- (a) a recta $y = -1$ é tangente de $C(JA + iJ)$ no ponto de abcissa $-a_{33}$;
 (b) a recta $y = 1$ é tangente de $C(JA + iJ)$ nos pontos de abcissa

$$\frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Recorrendo a (3.8) e efectuando cálculos elementares, obtemos uma expressão para o polinómio de Kippenhahn da matriz $J A + i J$:

$$\det(uJA + vJ + wI_3) = w^3 - \det(A)u^3 - v^3 + (\operatorname{tr}(A) - 2a_{33})uw^2 + vw^2 - 2a_{33}uvw \\ + (-\operatorname{tr} \mathfrak{C}_2(A) + 2a_{11}a_{22} - 2a_{21}a_{12})u^2w - v^2w - \operatorname{tr}(A)uv^2 - \operatorname{tr} \mathfrak{C}_2(A)u^2v.$$

Em seguida, estudamos a curva dual de $C(JA + iJ)$, que é definida em coordenadas de ponto homogéneas pela equação

$$\det(xJA + yJ + zI_3) = 0.$$

Sabemos que $(0 : 1 : 1)$ e $(0 : -1 : 1)$ são pontos da curva dual. Consideramos a vista afim $z = 1$ e

$$f(x, y) = \det(xJA + yJ + I_3).$$

Tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1) = -4a_{33} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1) = -4 \neq 0,$$

donde $(0 : 1 : 1)$ é um ponto simples da curva. A sua tangente é determinada pelo rácio $\mu : \nu$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 1)\mu + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1)\nu = 0.$$

Tem-se $\mu = 1$, $\nu = -a_{33}$, pelo que a tangente é definida pelas equações paramétricas

$$x = 0 + t \quad \text{e} \quad y = 1 - a_{33}t,$$

ou seja, pela equação

$$-a_{33}x - y + 1 = 0.$$

Isto significa que a tangente tem coordenadas de linha homogéneas $(-a_{33} : -1 : 1)$. Por outro lado, o ponto $(0 : -1 : 1)$ é um ponto singular da curva dual, uma vez que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, -1) = 0.$$

Calculamos as derivadas de segunda ordem e obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) = -2a_{33} + 2 \operatorname{tr}(A) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) = 4.$$

As duas tangentes no ponto $(0 : -1 : 1)$ são determinadas pelas soluções da equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1)\mu^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1)\mu\nu + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1)\nu^2 = 0.$$

Tem-se

$$\mu = 1 \quad \text{e} \quad \nu = \frac{-(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}}{2}.$$

A partir das equações paramétricas das duas rectas, deduzimos as suas coordenadas de linha homogéneas: $(-\nu : 1 : 1)$. O resultado pretendido segue por dualização. \square

Conhecemos, portanto, três pontos da curva associada $C(JA + iJ)$. Note-se que os dois pontos que pertencem à recta $y = 1$ podem ser coincidentes. Eles coincidem se e só se

$$(a_{11} + a_{22})^2 = 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Se não for válida a igualdade anterior, os três pontos formam um triângulo. Obviamente que se a origem do plano afim pertencer ao interior desse triângulo, então também pertence ao interior de $W(JA + iJ)$, dada a convexidade do contradomínio numérico clássico. Do Teorema 2.21 e da Proposição 2.18, vem

$$W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}.$$

Caso a origem não pertença ao interior do triângulo, não temos a garantia de as igualdades anteriores continuarem válidas.

De acordo com a classificação de Kippenhahn para o caso clássico [30], a curva associada para uma matriz de ordem 3 corresponde a uma das seguintes possibilidades: 3 pontos (coincidentes ou não), 1 ponto e uma elipse ou uma curva, irreduzível e limitada, do tipo C1 ou C3 (vide Teorema 1.7). Atendendo a esta classificação e ao comportamento das rectas $y = \pm 1$, a curva associada $C(JA + iJ)$ corresponde a um dos três casos que se seguem:

- (i) três pontos, um da recta $y = -1$ e dois da recta $y = 1$;
- (ii) um ponto da recta $y = 1$ e uma elipse delimitada pelas duas rectas;
- (iii) uma curva do tipo cardióide, delimitada pelas duas rectas e com tangente dupla $y = 1$.

Determinando o invólucro convexo de $C(JA + iJ)$, obtemos o campo de valores $W(JA + iJ)$. Se recorrermos a (2.25) e a (2.26), caracterizamos $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ e, conseqüentemente, $W_J(A)$. Apresentamos, em seguida, alguns exemplos ilustrativos.

Considere-se a matriz hermítica- J

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

É imediato constatar que $C(JA_1 + iJ) = \{(0, 1), (\sqrt{2}, -1)\}$, sendo $W(JA_1 + iJ)$ o segmento de recta determinado pelos dois pontos (cfr. figura 7). Tem-se

$$W_J^+(A_1) = [0, +\infty[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A_1) =]-\infty, -\sqrt{2}]. \quad (3.9)$$

Seja, agora,

$$A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O campo de valores $W(JA_2 + iJ)$ é o triângulo de vértices nos pontos $(3, 1)$, $(-5, 1)$ e $(0, -1)$ (cfr. figura 8). Neste caso, a origem pertence ao interior de $W(JA_2 + iJ)$, pelo que

$$W_J^+(A_2) = W_{-J}^+(A_2) = \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Por outro lado, para a matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

o campo de valores $W(JA_3 + iJ)$ ainda é um triângulo, de vértices $(1, 1)$, $(0, 1)$ e $(-1, -1)$ (cfr. figura 9), mas a origem pertence à fronteira de $W(JA_3 + iJ)$. Tem-se

$$W_J^+(A_3) =]-\infty, 1] \quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A_3) = [1, +\infty[. \quad (3.11)$$

Quando $W(JA + iJ)$ contém a origem do plano afim na fronteira, os conjuntos $W_J^+(A)$

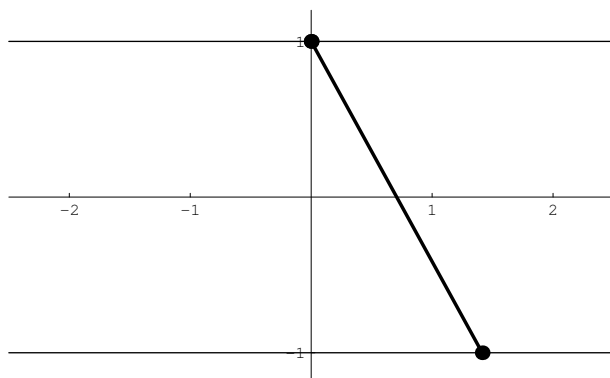


Figura 7: Invólucro convexo de $C(JA_1 + iJ)$.

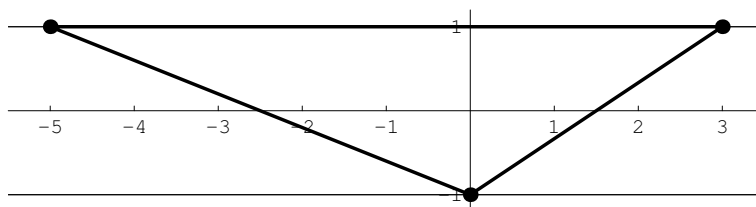


Figura 8: Invólucro convexo de $C(JA_2 + iJ)$.

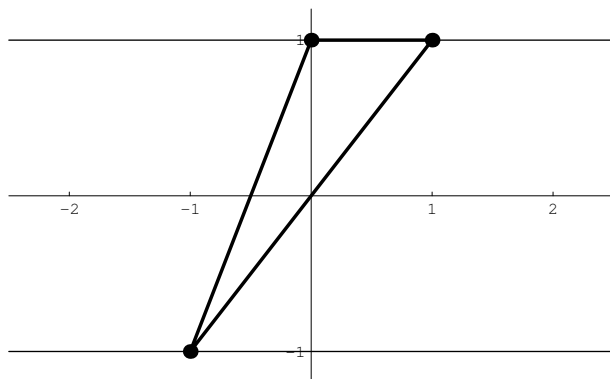


Figura 9: Invólucro convexo de $C(JA_3 + iJ)$.

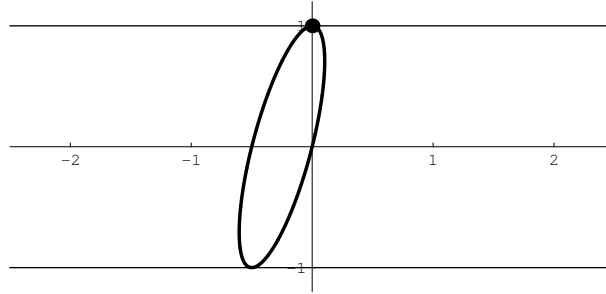


Figura 10: Invólucro convexo de $C(JA_4 + iJ)$.

e $W_{-J}^+(A)$ podem não ser intervalos fechados. Por exemplo, se

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix},$$

então a curva associada $C(JA_4 + iJ)$ consiste no ponto $(0, 1)$ e numa elipse que passa por esse ponto (cfr. figura 10). A elipse pode ser obtida, por exemplo, pelo método de Fiedler. A sua equação é dada por

$$8x^2 - 4x(y - 1) + y(y - 1) = 0.$$

Efectuando a substituição $x = \lambda y$ na equação anterior e resolvendo em ordem a y , obtemos a tangente da elipse na origem: $x = 1/4y$. Outro processo para obter a tangente consiste simplesmente em recorrer à alínea (c) da Proposição 2.17 e ao facto de $\sigma(A_4) = \{0, 1/4\}$.¹³ Por conseguinte,

$$W_J^+(A_4) =] - \infty, 1/4[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A_4) =]1/4, +\infty[. \quad (3.12)$$

A matriz

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

é outro exemplo de uma matriz hermítica- J para a qual $C(JA_5 + iJ)$ consiste no ponto $(0, 1)$ e numa elipse que passa pelo ponto. Contudo, neste caso, a origem não pertence a $W(JA_5 + iJ)$ (cfr. figura 11). A elipse da figura é definida pela equação

$$1 + 4x^2 - 4\sqrt{2}x(y - 1) - 4y + 3y^2 = 0.$$

¹³A recta $x = 0$ é a recta que passa pela origem e pelo ponto isolado da curva associada. É considerada uma tangente da curva nesse ponto isolado.

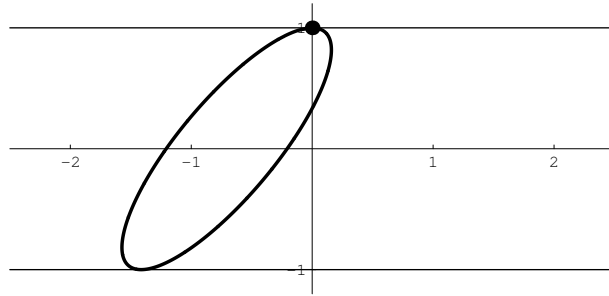


Figura 11: Invólucro convexo de $C(JA_5 + iJ)$.

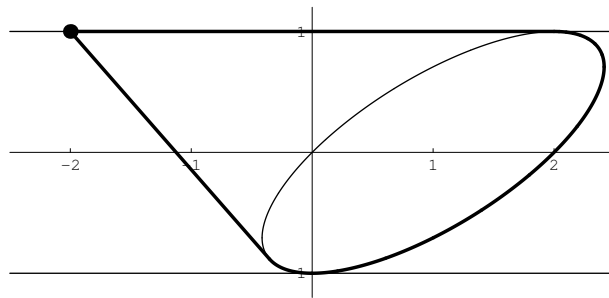


Figura 12: Invólucro convexo de $C(JA_6 + iJ)$.

Efectuando a substituição $x = \lambda y$ e resolvendo em ordem a y , obtemos as duas tangentes da elipse que passam pela origem: $x = (\sqrt{2} + 1)/2y$ e $x = (\sqrt{2} - 1)/2y$. Chegamos à mesma conclusão se recorrermos à Proposição 2.17 e ao facto de $\sigma(A_5) = \{0, (\sqrt{2} \pm 1)/2\}$. Desta forma,

$$W_J^+(A_5) =] -\infty, (\sqrt{2} - 1)/2] \quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A_5) = [(\sqrt{2} + 1)/2, +\infty[. \quad (3.13)$$

Por outro lado, para as matrizes

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2}/2 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

as curvas associadas, $C(JA_6 + iJ)$ e $C(JA_7 + iJ)$, consistem num ponto e numa elipse que não passa por esse ponto (cfr. figuras 12 e 13). No primeiro caso, a origem é um ponto da elipse, enquanto que no segundo pertence ao interior do correspondente disco elíptico.

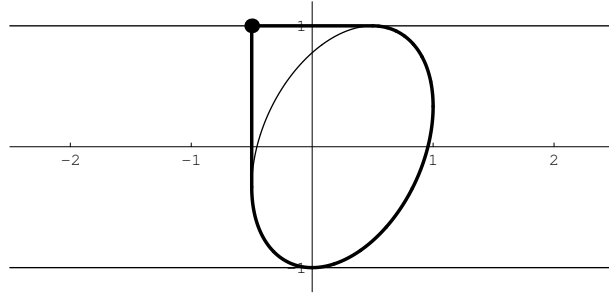


Figura 13: Invólucro convexo de $C(JA_7 + iJ)$.

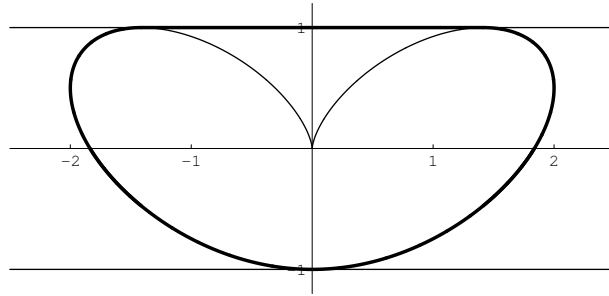


Figura 14: Invólucro convexo de $C(JA_8 + iJ)$.

Contudo, ao considerar o invólucro convexo das curvas associadas¹⁴, 0 está no interior dos dois campos de valores, $W(JA_6 + iJ)$ e $W(JA_7 + iJ)$. Assim,

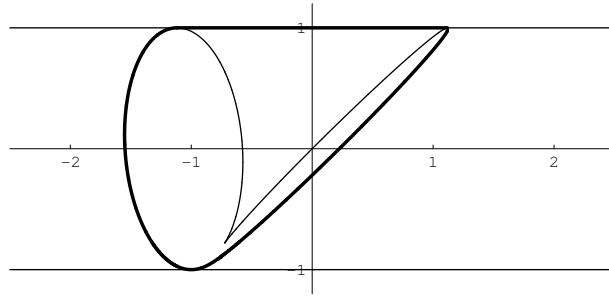
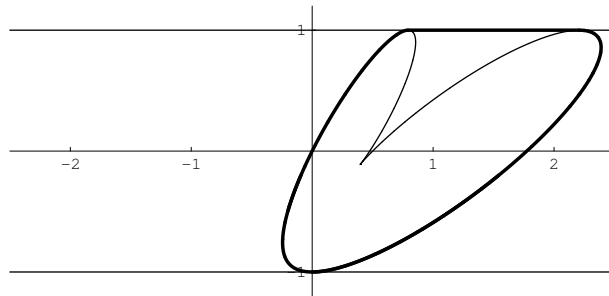
$$W_J^+(A_6) = W_{-J}^+(A_6) = W_J^+(A_7) = W_{-J}^+(A_7) = \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Vejam os exemplos para os quais a curva associada $C(JA + iJ)$ é do tipo cardióide. Para

$$A_8 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_9 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix},$$

as curvas associadas, $C(JA_8 + iJ)$ e $C(JA_9 + iJ)$, estão representadas nas figuras 14 e 15.

¹⁴Recorrendo ao método de Fiedler, determinamos, em cada caso, não só a equação da elipse, como também as equações das duas tangentes da elipse que passam pelo ponto isolado, visto serem tangentes duplas da curva associada. Em seguida, obtemos os pontos de intersecção das rectas com a elipse e o invólucro convexo da curva associada fica completamente caracterizado.

Figura 15: Invólucro convexo de $C(JA_9 + iJ)$.Figura 16: Invólucro convexo de $C(JA_{10} + iJ)$.

Tem-se, novamente,

$$W_J^+(A_8) = W_{-J}^+(A_8) = W_J^+(A_9) = W_{-J}^+(A_9) = \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Por fim, a curva associada $C(JA_{10} + iJ)$, com

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

é uma curva do tipo cardióide que passa pela origem (cfr. figura 16). O espectro de A_{10} é dado por $\sigma(A_{10}) = \{1/2, 2\}$. Da Proposição 2.17, concluímos que $x = 1/2y$ é a tangente do cardióide na origem¹⁵, donde

$$W_J^+(A_{10}) =]1/2, +\infty[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A_{10}) =]-\infty, 1/2[. \quad (3.16)$$

¹⁵A recta $x = 2y$ é a outra tangente do cardióide que passa pela origem.

Os próximos resultados destinam-se a estabelecer um método que permitirá determinar com rigor o contradomínio numérico indefinido de uma matriz hermítica- J de ordem 3, recorrendo apenas à análise dos valores próprios dessa matriz (vide Teorema 3.14).

Lema 3.10 *Se $A = [a_{ij}] \in M_3$ é uma matriz hermítica- J e $\text{tr}(A) = \alpha$, então existem $c \geq 0$ e $U \in M_3$, unitária- J , tal que*

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \alpha - a - b & c & 0 \\ c & b & d \\ 0 & -d & a \end{bmatrix},$$

com $a = a_{33}$. Adicionalmente, se $a_{13} \neq 0$, $d = \frac{|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2}{\sqrt{|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2}}$ e

$$b = \frac{a_{11}|a_{13}|^2 + a_{22}|a_{23}|^2 + 2|a_{13}||a_{23}||a_{12}|\cos(-\arg a_{13} + \arg a_{23} + \arg a_{12})}{|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2};$$

caso contrário, $d = |a_{23}|$ e $b = a_{22}$.

DEMONSTRAÇÃO: Tomando

$$U_1 = \text{diag}(e^{i\beta}, e^{i\gamma}, 1), \quad \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

podemos obter uma matriz $B = [b_{ij}] = U_1^{-1}AU_1$, com $b_{13} = -b_{31} \geq 0$ e $b_{23} = -b_{32} \geq 0$. Em seguida, aplicando a transformação unitária- J associada a uma matriz da forma

$$U_2 = \begin{bmatrix} p & q & 0 \\ -q & p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $p, q \in \mathbb{R}$ e $p^2 + q^2 = 1$, obtemos $C = [c_{ij}] = U_2^{-1}BU_2$, tal que $c_{13} = c_{31} = 0$. Finalmente, recorrendo a uma matriz diagonal dada por

$$U_3 = \text{diag}(e^{i\beta}, 1, 1), \quad \beta \in \mathbb{R},$$

determinamos $D = [d_{ij}] = U_3^{-1}CU_3$, tal que $d_{12}, d_{21} \geq 0$.

Se $a_{13} \neq 0$, toma-se $U = U_1U_2U_3$. Caso contrário, é suficiente considerar $U = U_1U_3$. A entrada a_{33} é invariante segundo estas operações. As expressões para b e d determinam-se sem dificuldade. \square

Uma matriz $A \in M_n$ diz-se *nilpotente* se existir um $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$. O *índice de nilpotência* de uma matriz nilpotente A é o menor natural k tal que $A^k = 0$. Recorde-se a matriz A_8 dos exemplos apresentados nesta secção,

$$A_8 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz é nilpotente com índice de nilpotência $k = 3$. De acordo com (3.15),

$$W_J(A_8) = W_J^+(A_8) = W_{-J}^+(A_8) = \mathbb{R}.$$

O próximo teorema mostra que esta é uma propriedade comum a todas as matrizes hermíticas- J de M_3 , nilpotentes com índice de nilpotência $k = 3$. Para $k = 2$, o contradomínio numérico- J continua a coincidir com \mathbb{R} , mas as suas componentes convexas estão estritamente contidas em \mathbb{R} .

Teorema 3.11 (Caracterização de $W_J(A)$, com A hermítica- J , de ordem 3 e nilpotente)

Seja $A = [a_{ij}] \in M_3$ uma matriz hermítica- J . Suponhamos que A é nilpotente com índice de nilpotência $k = 2$ ou $k = 3$. Nestas condições, $W_J(A) = \mathbb{R}$. Além disso,

- (a) se $k = 2$ e $a_{33} > 0$, então $W_J^+(A) =]-\infty, 0]$, $W_{-J}^+(A) =]0, +\infty[$;
- (b) se $k = 2$ e $a_{33} < 0$, então $W_J^+(A) = [0, +\infty[$, $W_{-J}^+(A) =]-\infty, 0[$;
- (c) se $k = 3$, então $W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}$.

DEMONSTRAÇÃO: Como A é nilpotente, $\sigma(A) = \{0\}$ e o seu traço é nulo. Da Proposição 2.3(b) e do Lema 3.10, podemos supor, sem perda de generalidade, que

$$A = \begin{bmatrix} -a-b & c & 0 \\ c & b & d \\ 0 & -d & a \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

com $a = a_{33}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$ e $d > 0$. Note-se que se $d = 0$, da igualdade $A^3 = 0$, facilmente se conclui que $a = b = c = 0$, o que é um absurdo, visto A ser não-nula. Por outro lado, como c é um número real e $A^3 = 0$, se considerarmos as entradas (2, 3) e (3, 3) de A^3 , obtemos sem dificuldade $d^2 - a^2 \geq 0$. A entrada (3, 3) de A^2 coincide precisamente com $-(d^2 - a^2)$. Logo, se $d \neq |a|$, isto é, se $d > |a|$, o índice de nilpotência k é igual a 3. Se $d = |a|$, analisando as entradas de A^3 e A^2 , facilmente se conclui que $k = 2$.

Estudemos o campo de valores de

$$JA + iJ = \begin{bmatrix} -a - b + i & c & 0 \\ c & b + i & d \\ 0 & d & -a - i \end{bmatrix}.$$

Recorrendo a (3.8), cálculos elementares mostram que

$$\begin{aligned} \det(uJA + vJ + wI_3) &= w^3 - \det(A)u^3 - v^3 + (\operatorname{tr}(A) - 2a)uw^2 + vw^2 - 2auvw \\ &\quad - (\operatorname{tr} \mathcal{C}_2(A) + 2ab + 2b^2 + 2c^2)u^2w - v^2w - \operatorname{tr}(A)uv^2 - \operatorname{tr} \mathcal{C}_2(A)u^2v. \end{aligned}$$

Mas, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr} \mathcal{C}_2(A) = \det(A) = 0$, pois A é nilpotente. Como

$$0 = \operatorname{tr} \mathcal{C}_2(A) = -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - ab, \quad (3.18)$$

vem $2ab + 2b^2 + 2c^2 = 2(d^2 - a^2)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \det(uJA + vJ + wI_3) &= w^3 - v^3 - 2a(uw^2 + uvw) + vw^2 - v^2w + 2(a^2 - d^2)u^2w \\ &= (w + v)(w^2 - v^2 - 2auw) + 2(a^2 - d^2)u^2w. \end{aligned}$$

A curva é redutível se e só se $d = |a|$. Nesse caso, $C(JA + iJ)$ consiste no ponto $(0 : 1 : 1)$ e na dual da cónica de equação $w^2 - v^2 - 2auw = 0$. Pelo método tradicional de dualização, obtemos a elipse

$$\frac{(x + a)^2}{a^2} + y^2 = 1.$$

Note-se que $a \neq 0$, pois $d = |a|$ e d não se pode anular. A elipse passa pela origem e a sua tangente na origem é o eixo dos yy . Consequentemente,

$$W_J^+(A) =] - \infty, 0] \quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A) =]0, +\infty[,$$

se $a > 0$, ou

$$W_J^+(A) = [0, +\infty[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(A) =] - \infty, 0],$$

se $a < 0$. Suponhamos, agora, que $d > |a|$. Como $C(JA + iJ)$ é irredutível, a curva associada

é obrigatoriamente uma curva do tipo cardióide com tangente dupla $y = 1$. Consideremos a dual definida em coordenadas de ponto homogéneas pela equação

$$\det(xJA + yJ + zI_3) = 0.$$

Tomemos a vista afim $x = 1$ e definamos

$$f(y, z) = \det(JA + yJ + zI_3) = (z + y)(z^2 - y^2 - 2az) + 2(a^2 - d^2)z.$$

Calculando as derivadas parciais de f de primeira ordem, vem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = 2(a^2 - d^2) \neq 0,$$

donde $(1 : 0 : 0)$ é um ponto simples da curva. A sua tangente é determinada pelo rácio $\mu : \nu$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\mu + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0)\nu = 0.$$

Tem-se $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0$, pelo que a tangente é definida pelas equações paramétricas

$$y = 0 + \mu t \quad \text{e} \quad z = 0,$$

ou seja, pela equação

$$z = 0.$$

Isto significa que a tangente tem coordenadas de linha homogéneas $(0 : 0 : 1)$. Se calcularmos as derivadas parciais de f de segunda ordem, constatamos que, para $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0$, vem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\mu^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0)\mu\nu + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0)\nu^2 = 0.$$

Isto significa que a recta $(0 : 0 : 1)$ tem mais de duas intersecções com a curva dual, ou seja, é uma tangente de inflexão. Dualizando os resultados obtidos, concluímos que $(0 : 0 : 1)$ é um cúspide de $C(JA + iJ)$ e a sua tangente é a recta $(1 : 0 : 0)$, isto é, o eixo dos yy . Se a origem do plano afim coincide com o cúspide da curva do tipo cardióide, então está sempre no interior do seu invólucro convexo. Segue-se que

$$W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R},$$

conforme pretendido. □

Ilustremos o procedimento adoptado na demonstração anterior. Seja A uma matriz hermitica- J nilpotente como em (3.17) com $d = 1$. Calculando a entrada da terceira linha e terceira coluna de A^3 , vem $b = a^3 - 2a$. A partir de (3.18), determinamos o valor de $c \geq 0$. Tem-se

$$c = \sqrt{(1 - a^2)^3}.$$

Além disso, como c é um número real, $1 - a^2 \geq 0$, isto é, $|a| \leq 1$. Uma vez que as entradas da matriz A dependem apenas do parâmetro $\lambda = a$, podemos considerar a família

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda - \lambda^3 & \sqrt{(1 - \lambda^2)^3} & 0 \\ \sqrt{(1 - \lambda^2)^3} & \lambda^3 - 2\lambda & 1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{bmatrix},$$

com $|\lambda| \leq 1$. As curvas $C(JA_\lambda + iJ)$ são do tipo cardióide com um cúspide na origem, se $|\lambda| \neq 1$, ou consistem no ponto $(0, 1)$ e numa circunferência que passa pela origem, caso contrário. De acordo com a Proposição 3.9, a recta $y = 1$ é tangente nos pontos de abcissa

$$\frac{-\lambda - \sqrt{4 - 3\lambda^2}}{2} \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{-\lambda + \sqrt{4 - 3\lambda^2}}{2} \geq 0$$

e a recta $y = -1$ no ponto de abcissa $-\lambda$. Tem-se (cfr. figura 17):

$$W_J(A_{-1}) = W_J^+(A_{-1}) \cup W_J^-(A_{-1}) = [0, +\infty[\cup] - \infty, 0[= \mathbb{R};$$

$$W_J(A_1) = W_J^+(A_1) \cup W_J^-(A_1) =] - \infty, 0] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Para $|\lambda| \neq 1$, vem

$$W_J(A_\lambda) = W_J^+(A_\lambda) \cup W_J^-(A_\lambda) = \mathbb{R} \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Quando $n = 2$, o conhecimento da curva associada $C_J(A)$ de uma matriz hermitica- J é suficiente para caracterizar o contradomínio numérico $W_J(A)$ (vide Teorema 3.3). Contudo, se $n = 3$, tal já não é possível. Por exemplo, se $A \in M_3$ for uma matriz hermitica- J , com três valores próprios reais que determinam uma base de vectores próprios anisotrópicos- J , podemos obter $W_J(A)$ tomando o invólucro pseudo-convexo de $C_J(A)$ e, dependendo de os valores próprios se entrelaçarem ou não, existem duas possibilidades para $W_J(A)$: ou é toda a recta real ou consiste na recta real excepto um segmento aberto determinado por dois desses valores próprios. Noutras situações, nomeadamente quando A tem um valor próprio em $\sigma_J^0(A)$, não podemos determinar $W_J(A)$ a partir do invólucro pseudo-convexo de $C_J(A)$. Com o objectivo de contornar esta dificuldade, estabeleceremos no Teorema 3.14 uma caracterização uniforme para $W_J(A)$, a partir da multiplicidade algébrica dos valores próprios de A . Antes, estudaremos alguns casos particulares.

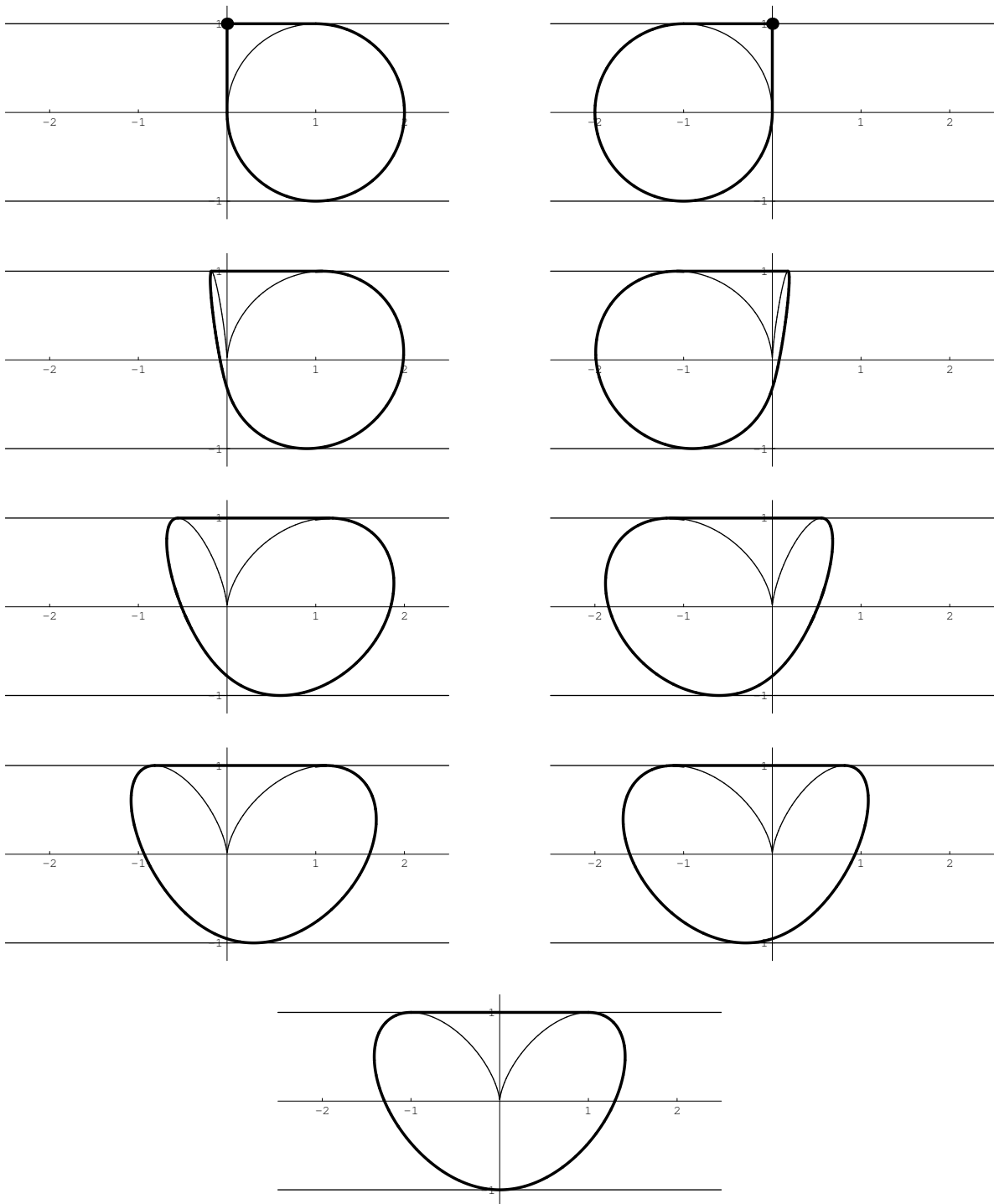


Figura 17: Comportamento de $W(JA_\lambda + iJ)$, quando λ varia entre -1 e 1 . Na coluna da esquerda, de cima para baixo: $\lambda = -1, -0.9, -0.6, -0.3$; em baixo: $\lambda = 0$; na coluna da direita, de baixo para cima: $\lambda = 0.3, 0.6, 0.9, 1$.

Seja $A \in M_3$ uma matriz hermítica- J tal que $\sigma(A) = \{0\}$. Se $A = 0$, então

$$W_J(A) = W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \{0\}.$$

Se $A \neq 0$, a próxima proposição mostra que $W_J(A)$ é caracterizado pelo Teorema 3.11.

Proposição 3.12 *Seja $A \in M_3$ uma matriz hermítica- J . Se 0 é valor próprio triplo de A , então A é nilpotente com índice de nilpotência $k \leq 3$.*

DEMONSTRAÇÃO: Recorrendo ao Lema 3.10, existe uma matriz $U \in M_3$, unitária- J , tal que

$$B = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} -a-b & c & 0 \\ c & b & d \\ 0 & -d & a \end{bmatrix},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, $c, d \geq 0$. Mas, 0 é também valor próprio triplo de B , pelo que

$$\text{tr } \mathcal{C}_2(B) = -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - ab = 0 \quad (3.19)$$

e

$$\det(B) = -a^2b - ab^2 - ac^2 - ad^2 - bd^2 = 0. \quad (3.20)$$

Analisando as entradas de B^3 , as igualdades (3.19) e (3.20) permitem concluir que $B^3 = 0$. Logo, $A^3 = 0$, ou seja, A é nilpotente com índice de nilpotência $k \leq 3$. \square

Vejam os que sucede quando 0 é valor próprio duplo da matriz hermítica- J .

Proposição 3.13 *Seja $A = [a_{ij}] \in M_3$ uma matriz hermítica- J . Suponhamos que 0 é valor próprio duplo e que $\alpha \neq 0$ é valor próprio simples. Considere-se*

$$\delta = a_{33}(a_{33} - \alpha) - |a_{23}|^2 - |a_{13}|^2.$$

- (a) Se $\delta > 0$, então $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; as componentes convexas coincidem com os intervalos $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$, tendo-se $\alpha \in W_J^+(A)$.
- (b) Se $\delta < 0$, então $W_J(A) = W_J^+(A) = W_{-J}^+(A) = \mathbb{R}$.
- (c) Suponhamos que $\delta = 0$.

(c1) Se $A = \text{diag}(0, 0, \alpha)$ ou se $|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2 \neq 0$ e

$$|a_{33}| > \frac{|a_{11}|a_{13}|^2 + a_{22}|a_{23}|^2 + 2|a_{13}||a_{23}||a_{12}|\cos\theta}{|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2},$$

com $\theta = -\arg a_{13} + \arg a_{23} + \arg a_{12}$, então $W_J(A)$ é o eixo real excepto o segmento aberto que une 0 e α ; $W_J^+(A)$ coincide com o intervalo fechado de extremo em 0 e $W_{-J}^+(A)$ com o de extremo em α .

(c2) Caso contrário, $W_J(A) = \mathbb{R}$; as componentes convexas reduzem-se aos intervalos $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$, tendo-se $\alpha \in W_J^+(A)$.

DEMONSTRAÇÃO: De acordo com o Lema 3.10, existe $U \in M_3$, unitária- J , tal que

$$B = U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \alpha - a - b & c & 0 \\ c & b & d \\ 0 & -d & a \end{bmatrix},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, $c, d \geq 0$. A Proposição 2.3(b) garante que os contradomínios numéricos- J de A e B coincidem, bem como as correspondentes componentes convexas. Por isso, restringimos o nosso estudo à matriz B . Note-se que o Lema 3.10 fornece as expressões para a , b e d em função das entradas a_{ij} da matriz A . Estudemos o campo de valores de

$$JB + iJ = \begin{bmatrix} \alpha - a - b + i & c & 0 \\ c & b + i & d \\ 0 & d & -a - i \end{bmatrix}.$$

Recorrendo a (3.8), cálculos elementares mostram que

$$\begin{aligned} \det(uJB + vJ + wI_3) &= w^3 - \det(B)u^3 - v^3 + (\operatorname{tr}(B) - 2a)uw^2 + vw^2 - 2auvw \\ &\quad - (\operatorname{tr}\mathcal{C}_2(B) + 2ab + 2b^2 + 2c^2 - 2b\alpha)u^2w - v^2w - \operatorname{tr}(B)uv^2 - \operatorname{tr}\mathcal{C}_2(B)u^2v. \end{aligned}$$

Mas, $\operatorname{tr}(B) = \alpha$ e $\operatorname{tr}\mathcal{C}_2(B) = \det(B) = 0$. De

$$0 = \operatorname{tr}\mathcal{C}_2(B) = -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - ab + a\alpha + b\alpha,$$

vem $2ab + 2b^2 + 2c^2 - 2b\alpha = -2(a^2 - d^2 - a\alpha)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \det(uJB + vJ + wI_3) &= w^3 - v^3 + (\alpha - 2a)uw^2 + vw^2 - 2auvw \\ &\quad + 2(a^2 - d^2 - a\alpha)u^2w - v^2w - \alpha uv^2. \end{aligned}$$

Seja $\delta = a^2 - d^2 - a\alpha = a_{33}(a_{33} - \alpha) - |a_{23}|^2 - |a_{13}|^2$. Consideremos a curva dual de $C(JB + iJ)$, definida em coordenadas de ponto homogêneas pela equação

$$\det(xJB + yJ + zI_3) = 0.$$

Tomemos a vista afim $x = 1$ e definamos

$$\begin{aligned} f(y, z) &= \det(JB + yJ + zI_3) \\ &= z^3 - y^3 + (\alpha - 2a)z^2 + yz^2 - 2ayz + 2\delta z - y^2z - \alpha y^2. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais de f de primeira ordem, vem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0) = 2\delta.$$

Se $\delta \neq 0$, então $(1 : 0 : 0)$ é um ponto simples da curva. A sua tangente é determinada pelo rácio $\mu : \nu$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\mu + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0)\nu = 0.$$

Tem-se $\mu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0$, pelo que a tangente é definida pela equação $z = 0$. Trata-se da recta com coordenadas de linha homogéneas $(0 : 0 : 1)$, isto é, da recta do infinito. Se $\delta = 0$, então $(1 : 0 : 0)$ é um ponto singular. Vem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2\alpha, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0) = -2a \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0) = 2(\alpha - 2a).$$

As duas tangentes correspondentes são determinadas pela equação

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\mu^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0)\mu\nu + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0)\nu^2 = 0,$$

cujas soluções são $\mu = -1$, $\nu = 1$ e $\mu = (\alpha - 2a)/\alpha$, $\nu = 1$. Deduzindo as equações paramétricas das tangentes, obtemos as rectas com coordenadas de linha homogéneas

$$(0 : 1 : 1) \quad \text{e} \quad (0 : \alpha/(2a - \alpha) : 1).$$

Dualizando os resultados obtidos, concluímos que, se $\delta \neq 0$, então $(0 : 0 : 1)$ é um ponto da curva associada $C(JB + iJ)$ e a sua tangente é a recta $(1 : 0 : 0)$, isto é, o eixo dos yy . A tangente é simples, pelo que não pode ser tangente de outros pontos da curva associada. Desta forma, ou $C(JB + iJ)$ é uma curva do tipo cardióide ou é uma elipse não-degenerada mais um ponto da recta $y = 1$, diferente do ponto $(0 : 1 : 1)$. A localização dos dois pontos de intersecção da recta $y = 1$ com $C(JB + iJ)$ permite caracterizar $W_J(B)$. De acordo com a Proposição 3.9, esses pontos têm abcissas

$$\frac{(\alpha - a) \pm \sqrt{(\alpha - a)^2 - 4(b\alpha - ab - b^2 - c^2)}}{2} = \frac{(\alpha - a) \pm \sqrt{(\alpha - a)^2 - 4\delta}}{2}.$$

Ora, o produto das abcissas coincide com δ . Assim, se $\delta > 0$, os dois pontos encontram-se ambos à direita ou à esquerda do eixo dos yy . As componentes convexas, $W_J^+(B)$ e $W_J^-(B)$, coincidem com os dois intervalos abertos não-limitados com extremo na origem, tendo-se $\alpha \in W_J^+(B)$, pelo que

$$W_J(B) = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Se $\delta < 0$, então os dois pontos estão separados pelo eixo dos yy , que é tangente da curva associada na origem. Segue-se que

$$W_J(B) = W_J^+(B) = W_{-J}^+(B) = \mathbb{R}.$$

Por fim, se $\delta = 0$, então o eixo dos yy é uma tangente dupla de $C(JB + iJ)$ nos pontos $(0 : 1 : 1)$ e $(0 : \alpha/(2a - \alpha) : 1)$. Das igualdades

$$\text{tr } \mathcal{C}_2(B) = 0, \quad \det(B) = 0 \quad \text{e} \quad \delta = 0,$$

retiramos algumas informações relevantes. Prova-se facilmente que a matriz B é diagonal por blocos, verificando-se uma das duas condições que se seguem:

$$d = 0, \quad a = 0 \tag{3.21}$$

ou

$$\alpha = a + b, \quad c = 0. \tag{3.22}$$

Se (3.21), então $W(JB + iJ)$ é o triângulo de vértices $(0 : 1 : 1)$, $(0 : -1 : 1)$ e $(\alpha : 1 : 1)$. As componentes convexas, $W_J^+(B)$ e $W_{-J}^+(B)$, coincidem com os dois intervalos fechados não-limitados com extremo na origem, tendo-se $\alpha \in W_J^+(B)$, pelo que

$$W_J(B) = \mathbb{R}.$$

Suponhamos que se verifica (3.22). Analisemos as diferentes possibilidades.

- I.** Se $B = \text{diag}(0, \alpha, 0)$, caímos no caso anterior.
- II.** Se $B = \text{diag}(0, 0, \alpha)$, então $W(JB + iJ)$ é o segmento de recta que une os pontos $(0 : 1 : 1)$ e $(-\alpha : -1 : 0)$. Logo, $W_J^+(B)$ e $W_{-J}^+(B)$ coincidem, respectivamente, com o intervalo fechado de extremo em 0, que não passa por α , e com o de extremo em α , que não passa por 0. Por conseguinte, $W_J(B)$ é o eixo real, excepto o segmento aberto que une 0 e α .
- III.** Finalmente, se B não é diagonal, $C(JB + iJ)$ consiste no ponto $(0 : 1 : 1)$ e numa elipse. O eixo dos yy é tangente da elipse no ponto de ordenada

$$\frac{\alpha}{2a - \alpha} = \frac{a + b}{a - b}.$$

Como $\alpha \neq 0$, a ordenada do ponto de tangência é não-nula. Ela é estritamente negativa, se $|a| < |b|$, e estritamente positiva, se $|a| > |b|$. No primeiro caso, 0 é um ponto da fronteira de $W(JB + iJ)$, pelo que obtemos a mesma caracterização para $W_J(B)$, $W_J^+(B)$ e $W_{-J}^+(B)$ que em **I**. Se $|a| > |b|$, a origem não pertence a $W(JB + iJ)$. As duas rectas de suporte que passam pela origem são o eixo dos yy e a recta $x = \alpha y$. Por conseguinte, obtemos resultados idênticos aos de **II**. \square

Impõe-se, agora, tecer algumas considerações sobre os valores próprios 0 e α da proposição anterior. Cálculos elementares mostram que $0 \in \sigma_J^0(A)$ se e só se $\delta \neq 0$. De acordo com o enunciado, se $\delta < 0$, então $0 \in W_J(A)$. Mas, o mesmo não acontece se $\delta > 0$. Reforça-se, portanto, a ideia de que nem sempre os valores próprios de $\sigma_J^0(A)$ pertencem ao contradomínio numérico- J . Já o valor próprio α está sempre associado a vectores próprios positivos- J ou negativos- J . De facto, os valores próprios reais de uma matriz A , hermítica- J , que pertencem a $\sigma_J^0(A)$ têm, pelo menos, multiplicidade 2 [23, pp.89–90]. Logo, sendo um valor próprio simples, $\alpha \in \sigma_J^+(A)$ ou $\alpha \in \sigma_J^-(A)$. De (2.9), vem $\alpha \in W_J^+(A)$ ou $\alpha \in W_{-J}^+(A)$, o que vai ao encontro das diferentes possibilidades estabelecidas na Proposição 3.13.

O Teorema 2.25 caracteriza $W_J(A)$, quando A é hermítica- J de espectro não-real. Para matrizes hermíticas- J de espectro real, apresentamos o próximo resultado em M_3 .

Teorema 3.14 (Contradomínio numérico de uma matriz hermítica- J de ordem 3) *Seja $A = [a_{ij}] \in M_3$ uma matriz hermítica- J de espectro real.*

(a) *Suponhamos que A tem um valor próprio triplo, β . Nestas condições, $W_J(A) = \{\beta\}$, se A for escalar; ou $W_J(A) = \mathbb{R}$, caso contrário.*

(b) *Suponhamos que A tem um valor próprio simples, α , e um valor próprio duplo, $\beta \neq \alpha$. Seja*

$$\delta = (a_{33} - \alpha)(a_{33} - \beta) - |a_{23}|^2 - |a_{13}|^2.$$

(b1) *Se $\delta > 0$, então $W_J(A) = \mathbb{R} \setminus \{\beta\}$;*

(b2) *Se $A = \text{diag}(\beta, \beta, \alpha)$ ou se $\delta = 0$, $|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2 \neq 0$ e*

$$|a_{33} - \beta| > \frac{|(a_{11} - \beta)|a_{13}|^2 + (a_{22} - \beta)|a_{23}|^2 + 2|a_{13}||a_{23}||a_{12}|\cos\theta|}{|a_{13}|^2 + |a_{23}|^2}, \quad (3.23)$$

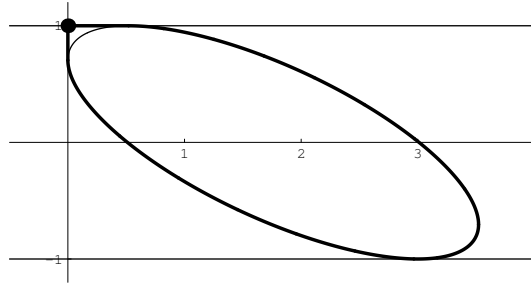
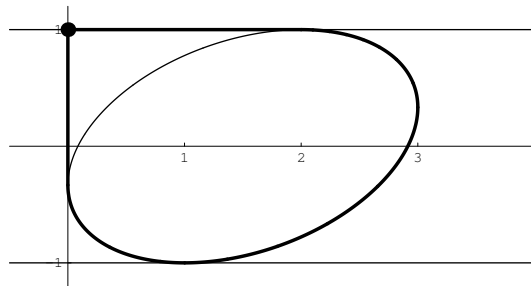
com $\theta = -\arg a_{13} + \arg a_{23} + \arg a_{12}$, então $W_J(A)$ coincide com o eixo real, excepto o segmento aberto que une α e β .

Nos restantes casos, $W_J(A) = \mathbb{R}$.

(c) *Suponhamos que A tem três valores próprios reais distintos. Se eles se entrelaçam, vem $W_J(A) = \mathbb{R}$. Caso contrário, $W_J(A)$ coincide com o eixo real, excepto o segmento aberto determinado por dois desses pontos.*

DEMONSTRAÇÃO: A alínea (c) é imediata. Para provar as alíneas (a) e (b), basta aplicar o Teorema 3.11 e as Proposições 3.12 e 3.13 à matriz $B = A - \beta I_3$. \square

Obtemos facilmente as componentes convexas de $W_J(A)$ a partir dos resultados apresentados nesta secção (vide Teorema 3.11 e Proposição 3.13).

Figura 18: Invólucro convexo de $C(JA_1 + iJ)$.Figura 19: Invólucro convexo de $C(JA_2 + iJ)$.

Os resultados obtidos nos exemplos (3.9)–(3.16) podem deduzir-se directamente dos Teoremas 2.25 e 3.14. Basta determinar o espectro de cada matriz hermítica- J e, caso se justifique, averiguar se os valores próprios em causa pertencem a $\sigma_J^+(A)$ ou $\sigma_J^-(A)$. Em seguida, analisamos dois exemplos de aplicação da alínea (b2) do Teorema 3.14. Consideremos as matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \\ -3/4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ambas têm 0 como valor próprio duplo e satisfazem a condição $\delta = 0$. A primeira verifica a desigualdade (3.23), enquanto que a segunda não. Tem-se

$$W_J(A_1) =]-\infty, -119/48] \cup [0, +\infty[\quad \text{e} \quad W_J(A_2) = \mathbb{R}. \quad (3.24)$$

As figuras 18 e 19 ilustram os campos de valores de $JA_1 + iJ$ e $JA_2 + iJ$. A validade ou não da desigualdade (3.23) determina a posição da origem do plano afim relativamente ao campo de valores e o correspondente contradomínio numérico de cada matriz hermítica- J .

3.2.2 Caso geral

Sejam $A \in M_3$ uma matriz arbitrária e $J \in M_3$ uma matriz de inércia como em (2.10). Partindo da decomposição cartesiana- J de A , $A = H^J + iK^J$, onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J , a expressão (3.8) descreve o polinómio de Kippenhahn em termos dos invariantes da matriz A .

O método que utilizaremos para caracterizar a curva associada $C_J(A)$ baseia-se na factorabilidade do polinómio $F_A^J(u, v, w)$. Este método foi empregue por Kippenhahn para o caso clássico [30], quando $J = \pm I_3$. O nosso objectivo consiste em generalizar o raciocínio de Kippenhahn para o caso indefinido. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $J = \text{diag}(1, 1, -1)$. Façamos a seguinte divisão em casos.

Primeiro Caso: Suponhamos que a matriz A é *decomponível- J* , isto é, que existe uma matriz $U \in M_3$, unitária- J , tal que

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

ou

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

onde $b \in \mathbb{C}$ e $B \in M_2$. Como

$$W_J(A) = W_J(U^{-1}AU),$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que A é uma matriz diagonal por blocos como em (3.25) ou (3.26). Se A é da forma (3.25), o polinómio $F_A^J(u, v, w)$ é redutível e decompõe-se em dois factores,

$$F_A^J(u, v, w) = (\text{Re } b u + \text{Im } b v + w) F_B^{J_1}(u, v, w),$$

com $J_1 = \text{diag}(1, -1)$. O factor linear corresponde ao valor próprio b da matriz A . De facto, a equação em coordenadas de linha homogéneas

$$\text{Re } b u + \text{Im } b v + w = 0$$

tem como solução a família de rectas $(u : v : -\text{Re } b u - \text{Im } b v)$ que passam pelo ponto $(\text{Re } b : \text{Im } b : 1)$. Consequentemente, b é um ponto da curva associada, tendo-se

$$C_J(A) = \{b\} \cup C_{J_1}(B).$$

O Teorema do Contradomínio Hiperbólico permite caracterizar $C_{J_1}(B)$, pelo que concluímos que $C_J(A)$ consiste num ponto e numa hipérbole (possivelmente degenerada). Suponhamos, agora, que A é da forma (3.26). Tem-se claramente

$$C_J(A) = \{b\} \cup C(B).$$

Aplicando o Teorema do Contradomínio Elíptico a $C(B)$, conclui-se que $C_J(A)$ consiste num ponto e numa elipse (possivelmente degenerada).

Segundo Caso: A matriz A não é decomponível- J , mas o polinómio $F_A^J(u, v, w)$ factoriza-se em três factores lineares ou num factor linear e num quadrático. Os factores lineares correspondem aos focos da curva e, por conseguinte, aos valores próprios de A . O factor quadrático, se existir, corresponde a uma hipérbole ou elipse (note-se que a cónica em jogo não pode ser uma parábola, uma vez que um dos seus focos está na recta do infinito, o que não é compatível com a Proposição 2.9). Desta forma, $C_J(A)$ consiste em três pontos, ou num ponto e numa elipse ou hipérbole.

Terceiro Caso: Suponhamos, por fim, que o polinómio $F_A^J(u, v, w)$ é irreduzível. Como o polinómio é do terceiro grau, podemos recorrer à classificação de Newton para as cúbicas (Teorema 1.6) e à correspondente dualização (Teorema 1.7): a curva associada

- C1. tem ordem 6, três cúspides e pelo menos uma componente oval;
- C2. é uma quártica com três cúspides e uma tangente dupla (em dois pontos complexos da curva algébrica que a contém);
- C3. é uma quártica com um cúspide e uma tangente dupla em dois dos seus pontos;
- C4. é uma cúbica com um cúspide e um ponto de inflexão;
- C5. tem ordem 6, três cúspides e não apresenta componentes ovais nem tangentes duplas.

Kippenhahn [30] provou que, no caso clássico, não existem curvas associadas do tipo C2, C4 e C5. No caso indefinido e em contraste com o clássico, os exemplos que apresentaremos nesta secção mostram que são contemplados todos os casos previstos no Teorema 1.7.

Vejamos, para cada caso, como determinar o contradomínio numérico- J . Analisemos o Primeiro Caso. Se A é da forma (3.25), então $C_J(A)$ é a união do ponto b com $C_{J_1}(B)$. Do Teorema do Contradomínio Hiperbólico, deduz-se $W_{J_1}(B)$. Como

$$b \in W_J^+(A), \quad W_{J_1}^+(B) \subseteq W_J^+(A) \quad e \quad W_{-J_1}^+(B) \subseteq W_{-J}^+(A),$$

para obter $W_J(A)$ consideram-se os segmentos de recta fechados ligando cada ponto z de $W_{J_1}^+(B)$ a b e, para cada $z \in W_{-J_1}^+(B)$, considera-se a recta que liga z a b , removendo o

segmento de recta aberto correspondente. Simbolicamente,

$$W_J(A) = \text{pconv}[\{b\} \cup W_{J_1}(B)].$$

Por outro lado, quando A é da forma (3.26), $C_J(A)$ é a união de b com $C(B)$. O conjunto $W(B)$ determina-se a partir do Teorema do Contradomínio Elíptico. Como $b \in W_{-J}^+(A)$ e $W(B) \subseteq W_J^+(A)$, para obter $W_J(A)$ consideram-se as rectas ligando cada ponto $z \in W(B)$ a b , excepto o segmento de recta aberto definido pelos dois pontos. Simbolicamente,

$$W_J(A) = \text{pconv}[\{b\} \cup W(B)].$$

Para o Segundo Caso e para o Terceiro Caso, fazemos a análise que se segue. A investigação das projecções de $W_J^+(A)$ (respectivamente, de $W_{-J}^+(A)$) nas rectas L_θ , que passam pela origem e que definem um ângulo θ com o eixo real, reveste-se de particular interesse. De acordo com a Proposição 2.13, estas projecções coincidem com $W_J^+(\cos \theta H^J + \sin \theta K^J)$ (respectivamente, com $W_{-J}^+(\cos \theta H^J + \sin \theta K^J)$), sendo determinadas pelos Teoremas 2.25 e 3.14 que caracterizam o contradomínio numérico das matrizes hermiticas- J de ordem 3.

Se existe uma única direcção $\theta \in \mathbb{R}$ para a qual $W_J^+(\cos \theta H^J + \sin \theta K^J)$ é uma semi-recta, então $W_J^+(A)$ é um semi-plano (possivelmente aberto) delimitado por uma recta perpendicular a essa direcção θ . Quando existem várias direcções satisfazendo a condição anterior, $W_J^+(A)$ é a intersecção dos semi-planos correspondentes. As rectas que delimitam esses semi-planos são rectas de suporte de $W_J^+(A)$ e tangentes da curva associada. Neste caso, a intersecção dos semi-planos referidos coincide com o invólucro pseudo-convexo da curva associada. Se não existir direcção alguma θ para a qual $W_J^+(\cos \theta H^J + \sin \theta K^J)$ seja uma semi-recta, então $W_J^+(A)$ é todo o plano complexo. Igual análise vale para $W_{-J}^+(A)$.

3.2.3 Exemplos

A completa caracterização de $W_J(A)$, com $A = H^J + iK^J \in M_3$ arbitrária, depende apenas do conhecimento da curva associada $C_J(A)$ e da determinação de algumas das projecções de $W_J(A)$ em relação a rectas que passam pela origem. Nos exemplos que apresentaremos, será suficiente considerar apenas uma projecção: a projecção em relação ao eixo real, $W_J(H^J)$. Isto porque as matrizes que estudaremos têm entradas reais, o que implica que o seu contradomínio numérico- J seja simétrico em relação ao eixo real.

Caracterizaremos os conjuntos $W_J^+(H^J)$, $W_{-J}^+(H^J)$ e $W_J(H^J)$ a partir do Teorema 2.25, no caso de H^J ter espectro não-real, e do Teorema 3.14 (com o auxílio da Proposição 3.13 e

do Teoremas 3.11 para a determinação das componentes convexas), caso contrário. Contudo, chamamos a atenção para o facto de que os exemplos (3.10)–(3.15) e (3.24) descrevem grande parte desses contradomínios numéricos.

As figuras que apresentaremos foram produzidas no *Mathematica 5.1*, recorrendo ao método de Fiedler (Teorema 2.12) para determinar a equação de pontos. Representaremos geometricamente não só a curva associada, como também os valores próprios de cada matriz em estudo. As fronteiras de $W_J^+(A)$ e de $W_{-J}^+(A)$ serão apresentadas a negrito.

Para $J = \pm I_3$, Kippenhahn mostrou que as curvas associadas do tipo C1 e C3 correspondem, respectivamente, a uma curva oval fechada com uma curva do tipo deltóide no seu interior e a uma curva do tipo cardióide (vide figuras 20 e 21). Com a generalização ao caso indefinido, estabeleceremos um interessante paralelismo com estas duas situações quando não tivermos casos degenerados (vide figuras 22 e 24), em tudo semelhante ao paralelismo elipse-hipérbole estabelecido na secção anterior para o caso $n = 2$.

Começamos por analisar os exemplos do caso clássico apresentados por Kippenhahn no artigo [30] de 1951. Considere-se a matriz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 0 & 1/2 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A curva associada $C(A_1)$ está representada na figura 20 e a sua equação de linhas é

$$4 - 2u^2 - 2v^2 + \sqrt{2}/2uv^2 = 0.$$

Por ser o invólucro convexo de $C(A_1)$, o campo de valores $W(A_1)$ é a porção do plano delimitada pela componente oval.

Por outro lado, seja

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A figura 21 representa geometricamente a curva $C(A_2)$, cuja equação de linhas é

$$2\sqrt{2} + 4u - \sqrt{2}v^2 - uv^2 = 0.$$

O campo de valores $W(A_2)$ é o conjunto constituído pelos pontos delimitados pelo cardióide juntamente com os pontos compreendidos entre a tangente dupla e o cardióide.

Passamos aos exemplos do caso indefinido, quando $J = \text{diag}(1, 1, -1)$. Começamos por apresentar um exemplo de uma matriz que não é decomponível- J , cujo polinómio de Kippenhahn é redutível. Prova-se facilmente que a matriz

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

não é decomponível- J e que $F_{A_3}^J(u, v, w) = -(u - w)(u + w)^2$. Tomando $w = 1$, vem

$$C_J(A_3) = \{(-1 : 0 : 1), (1 : 0 : 1)\}.$$

Observamos que A_3 não é hermítica- J , pelo que $W_J(A_3)$ não pode estar contido na recta real. Recorrendo ao Teorema 3.14(b), determinemos a projecção de $W_J(A_3)$ no eixo real. A matriz

$$H_3^J = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

tem um valor próprio duplo, 1, e um valor próprio simples, -1 . Como $\delta = -1/4 < 0$, vem

$$W_J(H_3^J) = W_J^+(H_3^J) = W_{-J}^+(H_3^J) = \mathbb{R}.$$

Segue-se que

$$W_J(A_3) = W_J^+(A_3) = W_{-J}^+(A_3) = \mathbb{C}.$$

Os restantes exemplos retratam a situação em que o polinómio de Kippenhahn é irreduzível. Consideremos a matriz A_2 dos exemplos do caso clássico:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad H_2^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vejamos que não existe qualquer relação entre $C(A_2)$ e $C_J(A_2)$. A equação de linhas de $C_J(A_2)$ é dada por

$$4 + 4\sqrt{2}u + u^2 - v^2 - \sqrt{2}uv^2 = 0.$$

A figura 22 representa a curva associada $C_J(A_2)$. Note-se que as curvas $C(A_2)$ e $C_J(A_2)$ não são do mesmo tipo, pelo que não são equivalentes do ponto de vista projectivo. Os valores próprios de H_2^J são 0 , $(\sqrt{2} - 1)/2 \in \sigma_J^+(H_2^J)$ e $(\sqrt{2} + 1)/2 \in \sigma_J^-(H_2^J)$. De acordo com o Teorema 3.14(c), vem

$$W_J^+(H_2^J) =] - \infty, (\sqrt{2} - 1)/2] \quad \text{e} \quad W_{-J}^+(H_2^J) = [(\sqrt{2} + 1)/2, +\infty[.$$

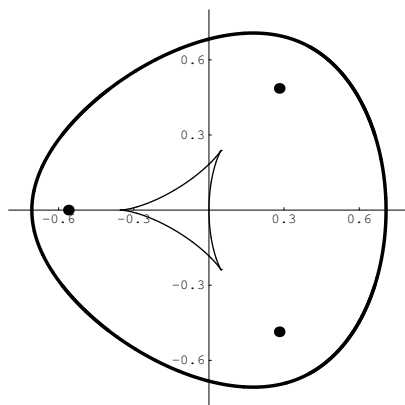


Figura 20: Curva do tipo C1 - componente oval fechada com um deltóide no seu interior.

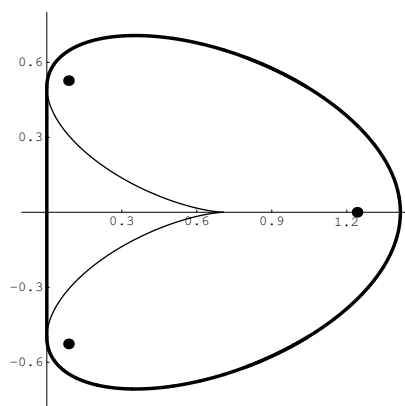


Figura 21: Curva do tipo C3 - cardióide com cúspide no eixo dos xx e cuja tangente dupla é o eixo dos yy .

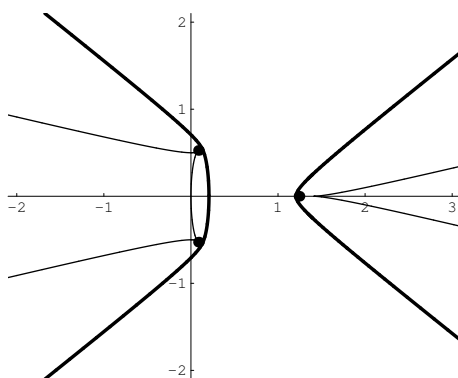


Figura 22: Curva do tipo C1, com duas componentes ovais e duas componentes com cúspides.

Por conseguinte, $W_J^+(A_2)$ está contido no semi-plano

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq (\sqrt{2} - 1)/2\}$$

e $W_{-J}^+(A_2)$ no semi-plano

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq (\sqrt{2} + 1)/2\}.$$

Além disso, $W_J^+(A_2)$ e $W_{-J}^+(A_2)$ são delimitados pelas respectivas componentes ovais.

Seja

$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_4^J = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação de linhas de $C_J(A_4)$ é

$$1 - 2u - 3(5u^2 + v^2) - 5uv^2 = 0.$$

A curva associada encontra-se representada na figura 23. Os valores próprios de H_4^J entrelaçam-se, pois $-5, 3 \in \sigma_J^+(H_4^J)$ e $0 \in \sigma_J^-(H_4^J)$, pelo que

$$W_J^+(H_4^J) = W_{-J}^+(H_4^J) = \mathbb{R}.$$

Logo, obtemos um caso degenerado com

$$W_J(A_4) = W_J^+(A_4) = W_{-J}^+(A_4) = \mathbb{C}.$$

Considere-se, agora,

$$A_5 = \begin{bmatrix} 3/16 & -7/4 & 3/4 \\ 9/4 & 1/3 & -3/2 \\ -3/4 & -7/2 & -3 \end{bmatrix}; \quad H_5^J = \begin{bmatrix} 3/16 & 1/4 & 3/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \\ -3/4 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

A curva associada $C_J(A_5)$ está representada na figura 24 e a sua equação de linhas é

$$4 + 9v^2 + 7u(-68 + 567v^2)/48 = 0.$$

O espectro de H_5^J consiste no valor próprio simples $-119/48$ e no valor próprio duplo 0. Recorrendo ao Teorema 3.14(b), sendo $\delta = 0$ e verificando-se a desigualdade (3.23), vem

$$W_J^+(H_5^J) = [0, +\infty[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(H_5^J) =]-\infty, -119/48].$$

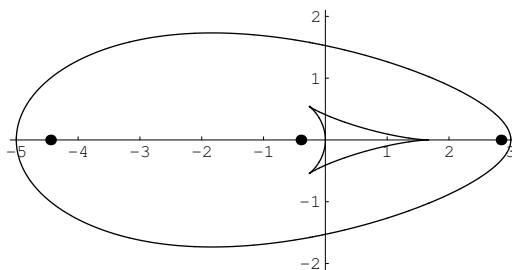


Figura 23: Curva do tipo C1 - componente oval fechada com uma componente com três cúspides no seu interior.

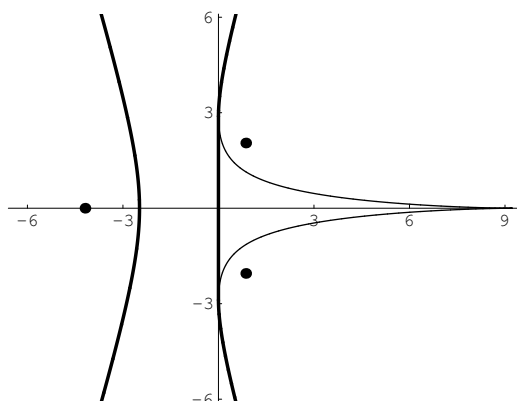


Figura 24: Curva do tipo C3 - a tangente dupla é o eixo dos yy e o cúspide pertence ao eixo dos xx .

Logo, $W_J^+(A_5)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$, sendo o invólucro convexo da componente de $C_J(A_5)$ nesse semi-plano. Analogamente, $W_{-J}^+(A_5)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq -119/48\}$ e é delimitado pela curva contida nessa região.

Seja

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_6^J = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2}/2 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação de linhas de $C_J(A_6)$ é

$$1 - 3(u^2 + v^2) - 2u(u^2 + v^2) = 0.$$

Na figura 25, representa-se a curva associada. A matriz H_6^J tem dois valores próprios dis-

tintos: -2 , simples, e 1 , duplo. Do Teorema 3.14(b), como $\delta = -3 < 0$, vem

$$W_J^+(H_6^J) = W_{-J}^+(H_6^J) = \mathbb{R},$$

pelo que obtemos um caso degenerado com

$$W_J(A_6) = W_J^+(A_6) = W_{-J}^+(A_6) = \mathbb{C}.$$

Vejamos dois exemplos de curvas associadas do tipo C2. Tomando

$$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 1 \end{bmatrix}; \quad H_7^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a equação de linhas de $C_J(A_7)$ é dada por

$$1 + 2u + u^2 - 3v^2 - 8uv^2 = 0.$$

A curva associada está representada na figura 26. Do Teorema 3.14(b), vem

$$W_J^+(H_7^J) =]-\infty, 1] \quad \text{e} \quad W_{-J}^+(H_7^J) = [1, +\infty[,$$

pelo que $W_J^+(A_7)$ coincide com o semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq 1\}$ e $W_{-J}^+(A_7)$ com o semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 1\}$. Desta forma, $W_J(A_7) = \mathbb{C}$.

Seja

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}; \quad H_8^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A equação de linhas de $C_J(A_8)$ é

$$16 + u^2 + 9v^2 - 8u(v^2 - 1) = 0.$$

A curva associada está representada na figura 27. Os valores próprios de H_8^J são 0 , simples, e $1/4$, duplo. Como $\delta = 1/16 > 0$, o Teorema 3.14(b) implica que

$$W_J^+(H_8^J) =]-\infty, 1/4[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(H_8^J) =]1/4, +\infty[.$$

Assim, $W_J^+(A_8)$ é o semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 1/4\}$, enquanto que $W_{-J}^+(A_8)$ é o semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z > 1/4\}$. Segue-se que

$$W_J(A_8) = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z = 1/4\}.$$

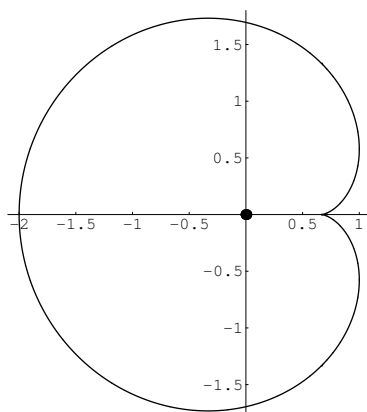


Figura 25: Curva do tipo C3 - cardióide com cuspide no eixo dos xx e cuja tangente dupla é a recta $x = 1$.

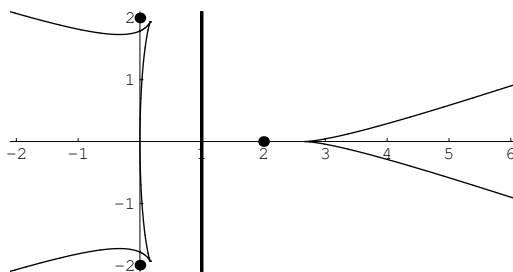


Figura 26: Curva do tipo C2, com duas componentes com cúspides e uma tangente dupla (em pontos complexos) de equação $x = 1$.

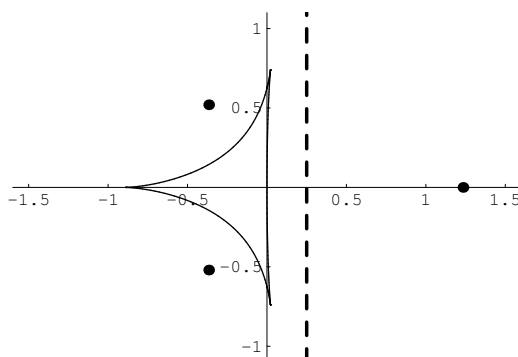


Figura 27: Curva do tipo C2, com uma componente com cúspides e uma tangente dupla (em pontos complexos) de equação $x = 1/4$.

Considere-se, agora,

$$A_9 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_9^J = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A equação de linhas de $C_J(A_9)$ é

$$1 + 10v^2 + 8\sqrt{2}uv^2 = 0.$$

A figura 28 caracteriza a curva associada $C_J(A_9)$. Como 0 é valor próprio triplo de H_9^J , do Teorema 3.14(a), vem

$$W_J^+(H_9^J) = W_{-J}^+(H_9^J) = \mathbb{R},$$

pelo que

$$W_J(A_9) = W_J^+(A_9) = W_{-J}^+(A_9) = \mathbb{C}.$$

Por fim, sejam

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_{10}^J = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_{11}^J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

As figuras 29 e 30 representam as curvas associadas $C_J(A_{10})$ e $C_J(A_{11})$. As equações de linhas são, respectivamente,

$$4 + (u^2 + v^2) - u(u^2 + v^2) = 0 \quad \text{e} \quad 2 - (u^2 + v^2) - u(u^2 + v^2) = 0.$$

As matrizes H_{10}^J e H_{11}^J têm valores próprios complexos, respectivamente,

$$1/4(1 \pm i\sqrt{7}) \quad \text{e} \quad 1/2(1 \pm i).$$

O Teorema 2.25 implica que

$$W_J^+(H_{10}^J) = W_{-J}^+(H_{10}^J) = W_J^+(H_{11}^J) = W_{-J}^+(H_{11}^J) = \mathbb{R},$$

donde se conclui que

$$W_J(A_{10}) = W_J^+(A_{10}) = W_{-J}^+(A_{10}) = \mathbb{C}$$

e

$$W_J(A_{11}) = W_J^+(A_{11}) = W_{-J}^+(A_{11}) = \mathbb{C}.$$

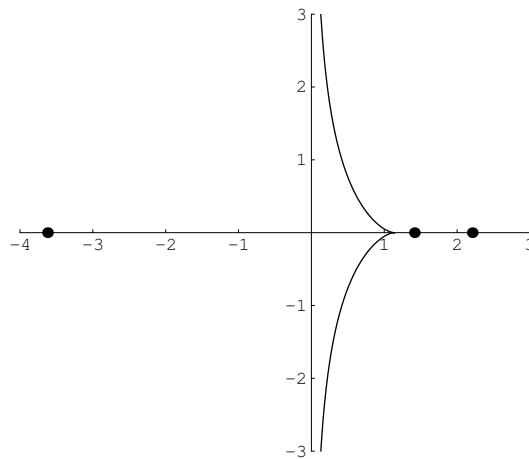


Figura 28: Curva do tipo C4, com um cuspide no eixo dos xx e um ponto de inflexão na recta do infinito. O eixo dos yy é a tangente de inflexão e corresponde a uma assíntota da curva. Trata-se de um Cissóide de Diocles.

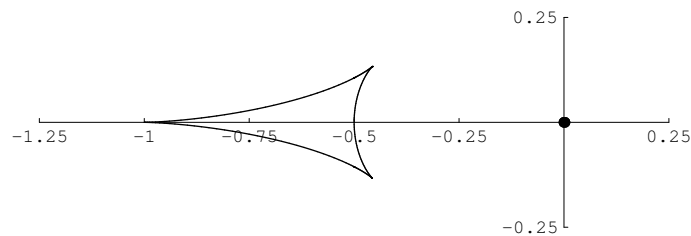


Figura 29: Curva do tipo C5: tem ordem 6 e reduz-se a uma componente com três cúspides.

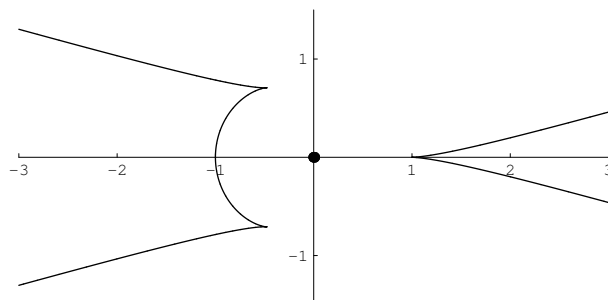


Figura 30: Novamente uma curva do tipo C5, mas com duas componentes.

3.3 Contando “flat portions”

Um problema que ocupa muitos investigadores na área dos contradomínios numéricos prende-se com o estudo da existência ou não de porções rectilíneas na sua fronteira [17, 29, 38]. Sejam $A \in M_n$ uma matriz arbitrária e $J \in M_n$ uma matriz de inércia como em (2.10). Suponhamos que A não é essencialmente hermítica- J , o que, de acordo com a Proposição 2.5, equivale a afirmar que o seu contradomínio numérico $W_J(A)$ não está contido numa recta. Se

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by + c = 0\},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma recta de suporte de $W_J(A)$ e se $L \cap \partial W_J(A)$ contiver mais de um ponto, dizemos que $L \cap \partial W_J(A)$ é uma *porção rectilínea* ou “flat portion” na fronteira de $W_J(A)$. Podemos definir, de forma análoga, porção rectilínea ou “flat portion” em $\partial W_J^+(A)$ e em $\partial W_J^-(A)$.

Para $n = 2$ e $J = \text{diag}(1, -1)$, de acordo com o Teorema 3.7, não existem porções rectilíneas na fronteira do contradomínio numérico (note-se que, para a contagem de “flat portions”, excluímos os casos em que o contradomínio numérico está contido numa recta). Na próxima proposição, determinamos um limite superior para o número de porções rectilíneas na fronteira do contradomínio numérico indefinido de uma matriz arbitrária A de ordem superior ou igual a 3.

Proposição 3.15 *Para $A \in M_n$, com $n \geq 3$, o número de porções rectilíneas $l_J(A)$ em $\partial W_J(A)$ é inferior ou igual a $n(n-1)/2$. Se $F_A^J(u, v, w)$ é irredutível, então*

$$l_J(A) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO: As rectas que geram porções rectilíneas na fronteira de $W_J(A)$ são obrigatoriamente tangentes múltiplas ou tangentes de inflexão da curva associada $C_J(A)$, pelo que correspondem a pontos singulares da curva dual de $C_J(A)$. Como $C_J(A)$ tem classe n , a sua dual tem ordem n e, de acordo com a Proposição 1.3, o número máximo de singularidades da dual é de $n(n-1)/2$. Para uma curva irredutível de ordem n , esse valor não ultrapassa $(n-1)(n-2)/2$. \square

Para $n = 3$ e $J = \text{diag}(1, 1, -1)$, os limites superiores da Proposição 3.15 são atingidos. Considere-se a matriz

$$A = \text{diag}(1 + i, 1 - i, 0).$$

A curva associada $C_J(A)$ reduz-se ao espectro da matriz A . Como $1 + i, 1 - i \in \sigma_J^+(A)$ e $0 \in \sigma_J^-(A)$, existem três porções rectilíneas na fronteira de $W_J(A)$ determinadas por três

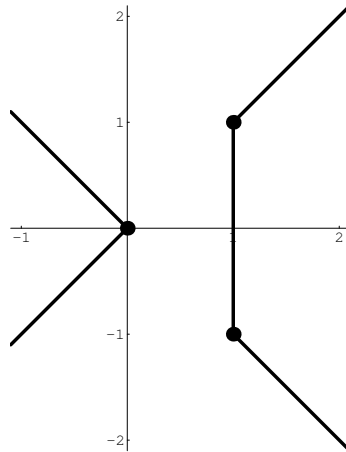


Figura 31: O contradomínio numérico $W_J(A)$ é o invólucro pseudo-convexo dos pontos $(0 : 0 : 1)$, $(1 : 1 : 1)$ e $(1 : -1 : 1)$.

rectas distintas (vide figura 31). Obtém-se igual número de porções rectilíneas se se substituir a matriz A por qualquer outra matriz normal- J com valores próprios distintos. A razão é simples: o contradomínio numérico de uma matriz normal- J , com valores próprios simples, consiste no invólucro pseudo-convexo desses valores próprios [7, p.23]. Para o caso em que $F_A^J(u, v, w)$ é irreduzível, as figuras 34–38 (páginas 117–119) mostram que $W_J(A)$ pode ter uma porção rectilínea na sua fronteira.

Cada porção rectilínea em $\partial W_J(A)$, com $A = H^J + iK^J$, implica que uma determinada matriz hermítica- J da família

$$uH^J + vK^J,$$

$u = \cos \theta, v = \sin \theta, \theta \in \mathbb{R}$, tenha um valor próprio múltiplo.

Proposição 3.16 *Seja $A = H^J + iK^J \in M_n$. Se a fronteira de $W_J(A)$ tem uma porção rectilínea contida na recta perpendicular à direcção (u, v) , então a matriz $uH^J + vK^J$ tem um valor próprio múltiplo.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $W_J(A)$ tem uma porção rectilínea na fronteira, contida na recta L . Por intermédio de uma translação e de uma rotação, é suficiente considerar

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}.$$

O eixo imaginário define uma porção rectilínea em $\partial W_J(A)$ se e só se é uma tangente de inflexão de $C_J(A)$ ou uma tangente múltipla da curva associada em (pelo menos) dois pontos

distintos (os pontos podem ser finitos ou infinitos, reais ou complexos). Considere-se a curva dual de $C_J(A)$, definida em coordenadas de ponto homogêneas pela equação

$$F_A^J(x, y, z) = \det(xH^J + yK^J + zI_n) = 0.$$

Por dualização, se L é uma tangente múltipla ou de inflexão de $C_J(A)$, então $(1 : 0 : 0)$ é um ponto singular da curva dual, com multiplicidade $m \geq 2$. Segue-se que

$$F_A^J(1, 0, 0) = \frac{\partial F_A^J}{\partial z}(1, 0, 0) = \dots = \frac{\partial^{m-1} F_A^J}{\partial z^{m-1}}(1, 0, 0) = 0,$$

o que implica que sejam nulos os coeficientes $x^n, x^{n-1}z, \dots, x^{n-(m-1)}z^{m-1}$ do polinómio $F_A^J(x, y, z)$. Analisando as soluções da equação característica

$$\det(H^J - \lambda I_n) = 0,$$

conclui-se que 0 é um valor próprio de H^J com multiplicidade igual ou superior a m . \square

As matrizes decomponíveis- J apresentam com frequência porções rectilíneas na fronteira do seu contradomínio numérico. Se $A \in M_n$ é uma matriz *decomponível- J* , isto é, se existe $U \in M_n$, unitária- J , tal que

$$U^{-1}AU = A_1 \oplus A_2 \quad \text{e} \quad U^{-1}JU = J_1 \oplus J_2,$$

com A_1, A_2, J_1, J_2 matrizes quadradas de ordem superior ou igual a 1, então tem-se obrigatoriamente

$$W_J(A) = \text{pconv}[W_{J_1}(A_1) \cup W_{J_2}(A_2)].$$

Esta propriedade generaliza para matrizes de ordem arbitrária o procedimento adoptado na subsecção 3.2.2, aquando da caracterização do contradomínio numérico de uma matriz decomponível- J de ordem 3 a partir dos seus blocos diagonais. Designa-se por *indecomponível- J* toda a matriz que não é decomponível- J .

Para $n = 3$, estabelecemos a classificação de $C_J(A)$ baseada na factorabilidade do polinómio de Kippenhahn $F_A^J(u, v, w)$. Contudo, o método empregue não permite determinar, de forma construtiva, as propriedades geométricas de $W_J(A)$ a partir das entradas da matriz A . As próximas duas subsecções surgem como forma de colmatar esta lacuna. Na primeira, analisaremos o contradomínio numérico de matrizes triangulares decomponíveis- J . Na segunda, estudaremos a ocorrência de uma porção rectilínea na fronteira do contradomínio numérico de matrizes indecomponíveis- J . Assumiremos doravante que $J = \text{diag}(1, 1, -1)$.

3.3.1 Estudo de $W_J(A)$, com $A \in M_3$ triangular e decomponível- J

Seja $A \in M_3$ uma matriz triangular. Provemos, em primeiro lugar, que não existem porções rectilíneas em $\partial W_J(A)$, sempre que $\sigma(A)$ é um conjunto singular (independentemente de A ser decomponível- J ou não).

Proposição 3.17 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} p & x & y \\ 0 & p & z \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \in M_3.$$

Se pelo menos uma das entradas x , y ou z é não-nula, então $W_J(A)$ coincide com \mathbb{C} . Caso contrário, $W_J(A) = \{p\}$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $z \neq 0$. Sejam $A' = A[2, 3]$ e $J' = \text{diag}(1, -1)$. Aplicando o Teorema do Contradomínio Hiperbólico (Teorema 3.7) à matriz $A' - pI_2$, vem $W_{J'}(A') = \mathbb{C}$. Como

$$W_{J'}(A') \subseteq W_J(A),$$

segue-se que $W_J(A) = \mathbb{C}$. O caso $y \neq 0$ pode ser tratado de forma análoga, considerando $A' = A[1, 3]$ e $J' = \text{diag}(1, -1)$. Se $x \neq 0$, tomamos $A' = A[1, 2]$ e $J' = \text{diag}(1, 1)$. Aplicando o Teorema do Contradomínio Elíptico (Teorema 3.5) à matriz $A' - pI_2$, conclui-se que $W_{J'}(A')$ é o disco centrado no ponto p de raio $|x|/2$. Além disso,

$$W_{J'}(A') \subseteq W_J^+(A).$$

Por outro lado, $p \in W_J^+(A)$, pois p é produzido pelo vector negativo- J de coordenadas $(0, 0, 1)$. Consequentemente, o invólucro pseudo-convexo do disco e do ponto p é todo o plano complexo. Finalmente, se $x = y = z = 0$, então

$$W_J(A) = W_J(pI_3) = pW_J(I_3) = \{p\},$$

conforme pretendido. □

Se $A \in M_3$ é decomponível- J , então existe uma matriz $U \in M_3$, unitária- J , tal que

$$U^{-1}AU = A_1 \oplus A_2,$$

podendo ocorrer uma de duas situações: ou A_1 tem ordem 2 (Primeiro Caso), ou tem ordem 1 (Segundo Caso). Começemos por analisar o Primeiro Caso.

Teorema 3.18 (Matrizes triangulares: $C_J(A)$ reduz-se a um ponto e uma elipse) *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in M_3. \quad (3.27)$$

A curva associada $C_J(A)$ consiste no ponto c e na elipse E (possivelmente degenerada numa circunferência), com focos a, b e eixo menor de comprimento s , se e só se

- I. $s^2 = |d|^2 - |e|^2 - |f|^2 > 0$;
- II. $s^2c = c|d|^2 - b|e|^2 - a|f|^2 + d\bar{e}f$.

DEMONSTRAÇÃO: Considere-se a matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & s & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad s > 0,$$

e definam-se $B' = B[12]$ e $J' = \text{diag}(1, 1)$. Recorrendo a (2.6), cálculos elementares mostram que $C_{J'}(B')$ é a elipse com eixo menor de comprimento s . Além disso, os seus focos correspondem aos valores próprios de B' : a e b .

De (3.8) conclui-se facilmente que os polinómios $F_A^J(u, v, w)$ e $F_B^J(u, v, w)$ têm os mesmos coeficientes, excepto possivelmente os coeficientes de $u^3, v^3, uv^2, u^2v, u^2w$ e v^2w . Além disso, os coeficientes de u^2w e v^2w são iguais nos dois polinómios se e só se

$$s^2 = |d|^2 - |e|^2 - |f|^2.$$

Por outro lado, os coeficientes de u^3 e v^3 coincidem (bem como os de uv^2 e u^2v) se e só se

$$s^2c = c|d|^2 - b|e|^2 - a|f|^2 + d\bar{e}f.$$

Desta forma, as condições I. e II. são necessárias e suficientes para que as matrizes A e B tenham a mesma curva associada. \square

Com vista à determinação de uma forma invariante para as condições I. e II. do teorema anterior, notamos que

$$|d|^2 - |e|^2 - |f|^2 = \text{tr}(A^{[*]}A) - (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2); \quad (3.28)$$

e que

$$\begin{aligned} c|d|^2 - b|e|^2 - a|f|^2 + d\bar{e}f &= (|d|^2 - |e|^2 - |f|^2) \text{tr}(A) - \text{tr}(A^{[*]}A^2) \\ &\quad + (a|a|^2 + b|b|^2 + c|c|^2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Assim, as condições I. e II. podem apresentar-se como se segue:

$$\text{I'. } s^2 = \text{tr}(A^{[*]}A) - (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2) > 0;$$

$$\text{II'. } s^2c = s^2 \text{tr}(A) - \text{tr}(A^{[*]}A^2) + (a|a|^2 + b|b|^2 + c|c|^2).$$

Corolário 3.19 *Seja A uma matriz como em (3.27). Suponhamos que se verificam as condições I. e II. do Teorema 3.18. O contradomínio numérico $W_J(A)$ tem duas porções rectilíneas na fronteira (produzidas pelo invólucro pseudo-convexo de E e c) se e só se o ponto c está no exterior da elipse E . Caso contrário, $W_J(A)$ é todo o plano complexo ou o plano complexo excepto alguns pontos.*

DEMONSTRAÇÃO: A elipse E é gerada por vectores positivos- J , enquanto que o ponto c é produzido pelo vector negativo- J de coordenadas $(0, 0, 1)$. Logo, se c pertence ao exterior de E , então c é um ponto angular de $W_J(A)$. Em contraponto, se c pertence ao interior de E , tem-se $W_J(A) = \mathbb{C}$, e se c é um ponto da elipse E , então $W_J(A)$ coincide com o plano complexo, excepto os pontos (diferentes de c) que pertencem à tangente de E em c . \square

Mediante as condições impostas às matrizes J e A , o corolário anterior mostra que $W_J(A)$ nunca pode ser um disco elíptico. Investiguemos, agora, o Segundo Caso.

Teorema 3.20 (Matrizes triangulares: $C_J(A)$ reduz-se a um ponto e uma hipérbole)

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \in M_3.$$

A curva associada $C_J(A)$ consiste no ponto a e na hipérbole H , com focos b, c e eixo não-transverso de comprimento s , se e só se

$$\text{I. } s^2 = -|d|^2 + |e|^2 + |f|^2; \quad 0 < s^2 < |b|^2 + |c|^2 - 2 \text{Re}(\bar{b}c);$$

$$\text{II. } s^2a = -c|d|^2 + b|e|^2 + a|f|^2 - d\bar{e}f.$$

DEMONSTRAÇÃO: Considere-se a matriz

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & s \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad s > 0.$$

Tomando $B' = B[23]$ e $J' = \text{diag}(1, -1)$, de (2.8), conclui-se facilmente que $C_{J'}(B')$ consiste na hipérbole com eixos transverso e não-transverso de comprimento, respectivamente,

$$\sqrt{-s^2 + |b|^2 + |c|^2 - 2 \text{Re}(\bar{b}c)} \quad \text{e} \quad s.$$

Os seus focos correspondem aos valores próprios de B' : b e c . A prova segue passos análogos aos da demonstração do Teorema 3.18. \square

De (3.28) e (3.29), obtemos uma forma invariante para as condições I. e II. do Teorema 3.20:

$$\text{I'. } s^2 = -\text{tr}(A^{[*]}A) + (|a|^2 + |b|^2 + |c|^2); \quad 0 < s^2 < |b|^2 + |c|^2 - 2\text{Re}(\bar{b}c);$$

$$\text{II'. } s^2 a = -s^2 \text{tr}(A) + \text{tr}(A^{[*]}A^2) - (a|a|^2 + b|b|^2 + c|c|^2).$$

Corolário 3.21 *Seja A uma matriz como em (3.27). Suponhamos que se verificam as condições I. e II. do Teorema 3.20. Denotamos por H_1 (respectivamente, H_2) o ramo da hipérbole H que contém b (respectivamente, c) no seu interior. O contradomínio numérico $W_J(A)$ tem duas porções rectilíneas na fronteira (produzidas pelo invólucro pseudo-convexo de H e a) se e só se o ponto a pertence à região (aberta) do plano compreendida entre H_1 e H_2 . Caso contrário,*

- (a) *se a está no interior de H_1 ou pertence a H_1 , então $W_J(A)$ coincide com as duas regiões (fechadas) do plano delimitadas por H_1 e H_2 ;*
- (b) *se a está no interior de H_2 , então $W_J(A) = \mathbb{C}$;*
- (c) *se a é um ponto de H_2 , então $W_J(A)$ é o plano complexo, excepto os pontos (diferentes de a) que pertencem à tangente de H_2 em a .*

DEMONSTRAÇÃO: Basta ter em conta que o ramo H_1 e o ponto a são produzidos por vectores positivos- J , enquanto que o ramo H_2 é produzido por vectores negativos- J . \square

3.3.2 Matrizes $A \in M_3$ indecomponíveis- J com uma “flat portion” na fronteira de $W_J(A)$

De agora em diante, suporemos que $A \in M_3$ é uma matriz indecomponível- J , com

$$A = H^J + iK^J,$$

onde H^J e K^J são matrizes hermíticas- J . Para evitar situações triviais, assumimos igualmente que A não é essencialmente hermítica- J .

Uma “flat portion” na fronteira do contradomínio numérico- J pode traduzir-se num segmento de recta fechado, numa semi-recta fechada, numa recta excepto um segmento aberto, ou mesmo, em toda uma recta. O próximo teorema mostra que os dois primeiros casos só podem ocorrer em $\partial W_J^+(A)$.

Teorema 3.22 *Seja $A \in M_3$ uma matriz indecomponível- J . Suponhamos que $W_J(A)$ tem um segmento de recta ou uma semi-recta na fronteira. Então, essa porção rectilínea está contida em $\partial W_J^+(A)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Provemos por redução ao absurdo que um segmento de recta, a existir como porção rectilínea, pertence necessariamente a $\partial W_J^+(A)$. Suponhamos que $W_{-J}^+(A)$ contém um segmento de recta na sua fronteira. Aplicando, se necessário, uma translação, uma rotação e uma ampliação/redução, podemos assumir, sem perda de generalidade, que os extremos do segmento de recta são os pontos 0 e i . Então, de acordo com a Proposição 3.16, 0 é um valor próprio de H^J com multiplicidade superior ou igual a 2. Além disso, existe $e_3 \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$e_3^* J e_3 = -1 \quad \text{e} \quad H^J e_3 = 0.$$

Consideremos dois vectores $e_1, e_2 \in \mathbb{C}^n$,

$$e_1^* J e_1 = e_2^* J e_2 = 1,$$

tais que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormada- J de \mathbb{C}^3 . Nesta base, a representação matricial de JH^J é

$$\begin{bmatrix} a & c & 0 \\ \bar{c} & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C},$$

onde $ab = |c|^2 \neq 0$, uma vez que A não é essencialmente hermítica- J . Assim, por aplicação de uma transformação unitária- J , JH^J pode escrever-se na forma

$$\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $a' = a + b$. Mas, $x^* JH^J x$ anula-se se e só se $x = (0, \zeta, \eta) \in \mathbb{C}^3$. Seja S o subespaço gerado por $\{e_2, e_3\}$ e denote-se por $A' \in M_2$ a restrição de A a S . Para $J' = \text{diag}(1, -1)$, $W_{J'}(A')$ está contido no eixo dos yy , o que implica que A' seja essencialmente hermítica- J' . Segundo o Teorema 3.3, $W_{J'}(A')$ pode ser uma recta, uma recta excepto um ponto ou uma recta excepto um segmento aberto, pelo que não pode degenerar apenas numa semi-recta ou num segmento de recta. Consequentemente, $[0, i]$ está contido na fronteira de $W_J^+(A)$.

A segunda parte do teorema prova-se por argumentos análogos, supondo que a porção rectilínea coincide com o semi-eixo positivo dos yy . □

Em seguida, deriva-se uma forma canónica para as matrizes indecomponíveis- J com um segmento de recta na fronteira do contradomínio numérico- J .

Teorema 3.23 (Matrizes indecomponíveis- J com um segmento de recta em $\partial W_J(A)$)

Seja $A \in M_3$ uma matriz indecomponível- J . A menos de uma transformação unitária- J e de uma translação, rotação e ampliação/redução, A pode escrever-se na forma

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ c_1 & c_2 & \xi \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

onde c_1, c_2 são números reais positivos e $\operatorname{Re} \xi < 0$, se e só se $W_J(A)$ tem um segmento de recta na fronteira. Na forma (3.30), $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ e tem o segmento $[0, i]$ como porção rectilínea na fronteira.

DEMONSTRAÇÃO: (\Rightarrow) Suponhamos que, a menos de uma transformação unitária- J e de uma translação, rotação e ampliação/redução, A se escreve na forma (3.30). Consideremos as matrizes hermíticas,

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\operatorname{Re} \xi \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JK^J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -ic_1 \\ 0 & 0 & -ic_2 \\ ic_1 & ic_2 & -\operatorname{Im} \xi \end{bmatrix}.$$

Como $\operatorname{Re} \xi < 0$, $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, \operatorname{Re} \xi]$, $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$, pelo que $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Por outro lado, $x^* JH^J x$ anula-se se e só se $x = (\zeta, \eta, 0) \in \mathbb{C}^3$. Para estes vectores x ,

$$\frac{x^* JK^J x}{x^* Jx} = \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 + |\eta|^2}$$

descreve o intervalo $[0, 1]$. Consequentemente, o segmento $[0, i]$ está contido em $W_J^+(A)$, sendo o eixo dos yy uma recta de suporte de $W_J^+(A)$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $W_J^+(A)$ tem um segmento de recta como porção rectilínea na fronteira. Por aplicação de uma translação, rotação e ampliação/redução, podemos assumir que o segmento de recta coincide com $[0, i]$. Da Proposição 3.16, conclui-se que 0 é valor próprio de H^J com multiplicidade (pelo menos) 2. Logo, existe $e_1 \in \mathbb{C}^n$ tal que

$$e_1^* J e_1 = 1 \quad \text{e} \quad H^J e_1 = 0.$$

Consideremos dois vectores $e_2, e_3 \in \mathbb{C}^n$,

$$e_2^* J e_2 = 1, \quad e_3^* J e_3 = -1,$$

tais que $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormada- J de \mathbb{C}^3 . Nesta base, a matriz JH^J tem a representação matricial

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & \bar{c} & b \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ satisfazem a condição $ab = |c|^2$. Como A não é essencialmente hermítica- J , $JH^J \neq 0$, pelo que $|c| \neq 0$.

Provemos, por redução ao absurdo, que $|a| \neq |c|$. Suponhamos que $|a| = |c|$. Da igualdade $ab = |c|^2$, segue-se que $|a| = |b| = |c|$. Se aplicarmos a transformação unitária- J associada a uma matriz da forma $U = \text{diag}(1, e^{i\theta}, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$, podemos considerar $c > 0$. Verifica-se uma de duas possibilidades: $a = b = c$ ou $a = b = -c$. Suponhamos que $a = b = c$. Tem-se $x^* JH^J x = 0$ se e só se $x = (1, \eta, -\eta) \in \mathbb{C}^3$ (donde $x^* Jx = 1$). Considere-se a representação matricial de JK^J na base $\{e_1, e_2, e_3\}$,

$$JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\bar{v}_1 & \beta & -iv_3 \\ i\bar{v}_2 & i\bar{v}_3 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}.$$

Para $x = (1, \eta, -\eta) \in \mathbb{C}^3$, a função

$$f(x) := x^* JK^J x = \alpha + (\beta + \gamma - 2 \text{Im } v_3) |\eta|^2 + 2|\eta| |v_1 - v_2| \sin \phi,$$

com $\phi = \arg \eta + \arg(v_1 - v_2)$ a percorrer o conjunto dos números reais, descreve um ponto se

$$\beta + \gamma - 2 \text{Im } v_3 = 0 \quad \text{e} \quad v_1 - v_2 = 0,$$

uma recta se

$$\beta + \gamma - 2 \text{Im } v_3 = 0 \quad \text{e} \quad v_1 - v_2 \neq 0,$$

e uma semi-recta se

$$\beta + \gamma - 2 \text{Im } v_3 \neq 0.$$

Contudo, nunca é produzido um segmento de recta, o que contradiz a hipótese. Obtém-se uma conclusão análoga se se supuser $a = b = -c$.

Como $|a| \neq |c|$, a matriz (3.31) representa-se, numa determinada base, da forma

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

ou da forma

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a' \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

com $a' = a - b$. Verifica-se facilmente que a forma (3.32) conduz a uma contradição, visto ser incompatível com a existência de um segmento de recta na fronteira. Por conseguinte, tem-se (3.33), pelo que $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$ e $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, a']$ (sendo $a' < 0$ para assegurar que $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$).

Tem-se $x^* JH^J x = 0$ para $x = (\zeta, \eta, 0) \in \mathbb{C}^3$. Sejam $J' = \operatorname{diag}(1, 1)$ e A' a submatriz principal de

$$A = H^J + iK^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\bar{v}_1 & \beta & -iv_3 \\ -i\bar{v}_2 & -i\bar{v}_3 & -\gamma \end{bmatrix},$$

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$, determinada pelas duas primeiras linhas e colunas. Observe-se que o subconjunto de $W_J(A)$, $W_{J'}(A')$, é o segmento de recta de extremos

$$i \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \pm \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)^2}{4} + |v_1|^2} \right).$$

Se $\alpha = 1, \beta = 0, v_1 = 0$, então esse segmento coincide com $[0, i]$, tendo-se

$$A = H^J + iK^J = \begin{bmatrix} i & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & v_3 \\ \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & a' - i\gamma \end{bmatrix},$$

com $a' < 0$. Sem perda de generalidade, podemos aplicar uma matriz da forma

$$V = \operatorname{diag}(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, 1), \quad \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},$$

e tomar $c_1 = v_2 > 0, c_2 = v_3 > 0$. Assim, A é da forma pretendida. \square

Se $\partial W_J(A)$ tem uma porção rectilínea constituída por duas semi-rectas da mesma recta, então uma delas está em $\partial W_J^+(A)$ e a outra em $\partial W_{-J}^+(A)$. Esta é uma consequência imediata da convexidade de $W_J^+(A)$ e de $W_{-J}^+(A)$.

Teorema 3.24 (Matrizes indecomponíveis- J com duas semi-rectas em $\partial W_J(A)$)

Seja $A \in M_3$ uma matriz indecomponível- J . A menos de uma transformação unitária- J e de uma translação, rotação e ampliação/redução, A pode escrever-se na forma

$$A = \begin{bmatrix} a + i\alpha & b & c \\ -b & i & 0 \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $a, b, c > 0$, se e só se $W_J(A)$ tem duas semi-rectas da mesma recta na fronteira. Na forma (3.34), $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$, a semi-recta $i[1, +\infty[$ está em $\partial W_J^+(A)$, enquanto que o semi-eixo negativo dos y pertence a $\partial W_{-J}^+(A)$.

DEMONSTRAÇÃO: (\Rightarrow) Suponhamos que A é da forma (3.34). Tem-se

$$JH^J = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -ib & -ic \\ ib & 1 & 0 \\ ic & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $a > 0$, vem $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$, $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0]$. Por outro lado, $x^* JH^J x$ anula-se quando $x = (0, \zeta, \eta) \in \mathbb{C}^3$. Para estes vectores x , obtém-se

$$\frac{x^* JK^J x}{x^* Jx} = \frac{|\zeta|^2}{|\zeta|^2 - |\eta|^2}.$$

O quociente descreve o intervalo $] -\infty, 0]$, se considerarmos os vectores x tais que $x^* Jx < 0$, e descreve $[1, +\infty[$, se tomarmos os vectores x verificando $x^* Jx > 0$. Logo, $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$ e a semi-recta $i[1, +\infty[$ está em $\partial W_J^+(A)$. Por outro lado, $W_{-J}^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq 0\}$ e o semi-eixo negativo dos y pertence a esse conjunto.

(\Leftarrow) Por intermédio de uma translação, rotação e ampliação/redução, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $W_J(A)$ apresenta as duas semi-rectas do enunciado na fronteira. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormada- J de \mathbb{C}^3 satisfazendo

$$H^J e_2 = 0, \quad e_1^* J e_1 = e_2^* J e_2 = 1, \quad e_3^* J e_3 = -1.$$

Considere-se a representação matricial de JH^J nesta base,

$$JH^J = \begin{bmatrix} a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{c} & 0 & b \end{bmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ são tais que $ab = |c|^2$. Aplicando um procedimento análogo ao utilizado no Teorema 3.23, conclui-se facilmente que $|a| \neq |c|$. Consequentemente, a submatriz principal de H^J , determinada pelas suas linhas e colunas ímpares, tem como valores próprios 0 e $a - b$, aos quais correspondem dois vectores próprios associados, linearmente independentes e anisotrópicos- J , pelo que H^J pode ser diagonalizada por uma transformação unitária- J . Assim, numa base apropriada,

$$JH^J = \begin{bmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

ou

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a' \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

com $a' = a - b$. Verifica-se sem dificuldade que a forma (3.36) conduz a uma contradição, pois é incompatível com a existência de duas semi-rectas na fronteira de $W_J(A)$, pelo que se tem necessariamente (3.35). Então, $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$ e $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0]$. Tomamos $a' > 0$ para assegurar que $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. Seja

$$JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\bar{v}_1 & \beta & -iv_3 \\ i\bar{v}_2 & i\bar{v}_3 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}.$$

Considere-se a submatriz principal 2×2 de $A = H^J + iK^J$,

$$A' = i \begin{bmatrix} \beta & -iv_3 \\ -i\bar{v}_3 & -\gamma \end{bmatrix},$$

determinada pelas duas últimas linhas e colunas de A . Para $J' = \operatorname{diag}(1, -1)$, $W_{J'}(A')$ reduz-se a duas semi-rectas com origem nos pontos

$$i \left(\frac{\beta - \gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{(\beta + \gamma)^2}{4} - |v_3|^2} \right).$$

Estes pontos coincidem com 0 e i se $\beta = 1, \gamma = 0, v_3 = 0$, e o resultado fica provado. \square

Investigamos, agora, a ocorrência de toda uma recta em $\partial W_J^+(A)$ e derivamos duas formas canónicas para a matriz A .

Teorema 3.25 (Matrizes indecomponíveis- J com uma recta em $\partial W_J(A)$) *Seja $A \in M_3$ uma matriz indecomponível- J . A menos de uma transformação unitária- J e de uma translação e rotação, A pode escrever-se na forma*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ -\overline{v_1} & a + i\beta & v_3 \\ \overline{v_2} & \overline{v_3} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

com $v_1, v_3 \in \mathbb{C}$, $v_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a > 0$, ou na forma

$$A = \begin{bmatrix} i\alpha & v_1 & v_2 \\ -\overline{v_1} & a + i\beta & -a + v_3 \\ \overline{v_2} & a + \overline{v_3} & -a - i\gamma \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

com $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\beta + \gamma + 2 \operatorname{Im} v_3 = 0$, $v_1 + v_2 \neq 0$, se e só se $\partial W_J^+(A)$ coincide com uma recta. Nas formas (3.37) e (3.38), $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$ e a sua fronteira coincide com o eixo dos yy .

DEMONSTRAÇÃO: (\Rightarrow) De acordo com a hipótese, se A é da forma (3.37), tem-se

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JK^J = \begin{bmatrix} 0 & -iv_1 & -iv_2 \\ i\overline{v_1} & \beta & -iv_3 \\ i\overline{v_2} & i\overline{v_3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $a > 0$, vem $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$ e $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0]$. Além disso, $x^* JH^J x = 0$ se $x = (\zeta, 0, \eta) \in \mathbb{C}^3$ e

$$\frac{x^* JK^J x}{x^* Jx} = \frac{2|v_2||\zeta||\eta| \sin \theta}{|\zeta|^2 - |\eta|^2},$$

com $\theta = \arg v_2 - \arg \zeta + \arg \eta$, descreve a recta real porque $v_2 \neq 0$.

Para a forma (3.38), obtém-se

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\overline{v_1} & \beta & -iv_3 \\ i\overline{v_2} & i\overline{v_3} & \gamma \end{bmatrix}.$$

Como $a > 0$, vem $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$ e $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0]$. Mas, $x^* JH^J x = 0$ se $x = (1, \eta, \eta) \in \mathbb{C}^3$, e o quociente

$$\frac{x^* JK^J x}{x^* Jx} = \alpha + (\beta + \gamma + 2 \operatorname{Im} v_3)|\eta|^2 + 2|v_1 + v_2||\eta| \sin \phi,$$

com $\phi = \arg(v_1 + v_2) + \arg \eta$, descreve a recta real porque o coeficiente de $|\eta|^2$ é nulo e porque $|v_1 + v_2| \neq 0$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $\partial W_J^+(A)$ coincide com uma recta. Recorrendo a uma translação e a uma rotação, podemos assumir que $\partial W_J^+(A)$ é o eixo dos yy . Seja $e_1 \in \mathbb{C}^3$ tal que

$$H^J e_1 = 0 \quad \text{e} \quad e_1^* J e_1 = 1.$$

Considere-se a representação matricial de JH^J numa base ortonormada- J $\{e_1, e_2, e_3\}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & \bar{c} & b \end{bmatrix},$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{C}$ e $ab = |c|^2$. Se $|a| \neq |c|$, então a matriz JH^J assume, numa base apropriada, a forma

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a' \end{bmatrix}$$

ou a forma

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

com $a' = a - b$. O primeiro caso conduz a uma contradição, porque implica a existência de um segmento de recta na fronteira. Para o segundo caso, vem

$$W_J^+(H^J) = [0, +\infty[, \quad W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0],$$

tomando $a' > 0$. Segue-se que $x^* JH^J x = 0$ se $x = (\zeta, 0, \eta) \in \mathbb{C}^3$. Seja

$$JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\bar{v}_1 & \beta & -iv_3 \\ i\bar{v}_2 & i\bar{v}_3 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C},$$

e considere-se a submatriz principal de $A = H^J + iK^J$ determinada pelas suas linhas e colunas ímpares,

$$A' = \begin{bmatrix} i\alpha & v_2 \\ \bar{v}_2 & -i\gamma \end{bmatrix}.$$

Para $J' = \text{diag}(1, -1)$, $W_{J'}(A')$ é o eixo dos yy se $(\alpha + \gamma)^2 - 4|v_2|^2 < 0$. Sem perda de generalidade, podemos tomar $\alpha = \gamma = 0$, $v_2 \neq 0$, pelo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_1 & a' + i\beta & v_3 \\ \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $|a| = |c|$, então JH^J apresenta-se na forma

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix}.$$

Para $a > 0$, obtém-se $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$, $W_J^-(H^J) =]-\infty, 0]$. Por outro lado, $x^* JH^J x = 0$ se $x = (1, \eta, \eta) \in \mathbb{C}^3$. Sejam

$$JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\bar{v}_1 & \beta & -iv_3 \\ i\bar{v}_2 & i\bar{v}_3 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C},$$

e

$$f(x) := \frac{x^* JK^J x}{x^* J x} = \alpha + (\beta + \gamma + 2 \text{Im } v_3) |\eta|^2 + 2|\eta| |v_1 + v_2| \sin \phi,$$

com $\phi = \arg \eta + \arg(v_1 + v_2) \in \mathbb{R}$. A função f descreve o eixo dos yy se $\beta + \gamma + 2 \text{Im } v_3 = 0$ e $v_1 + v_2 \neq 0$. Por conseguinte, A é da forma pretendida. \square

Note-se que se A é da forma (3.37), então o eixo dos yy também é uma porção rectilínea na fronteira de $W_J^+(A)$. Contudo, tal já não é verdade se A for da forma (3.38).

Por fim, investigamos a existência de apenas uma semi-recta em $\partial W_J(A)$ e derivamos uma forma canónica para a matriz A .

Teorema 3.26 (Matrizes indecomponíveis- J com uma semi-recta em $\partial W_J(A)$)

Seja $A \in M_3$ uma matriz indecomponível- J . A menos de uma transformação unitária- J e de uma translação e rotação, A pode escrever-se na forma

$$A = \begin{bmatrix} i\alpha & v_1 & v_2 \\ -\bar{v}_1 & a + i\beta & -a + v_3 \\ \bar{v}_2 & a + \bar{v}_3 & -a - i\gamma \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

com $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\beta + \gamma + 2 \text{Im } v_3 > 0$ e

$$\alpha = \frac{|v_1 + v_2|^2}{\beta + \gamma + 2 \text{Im } v_3},$$

se e só se $W_J(A)$ tem uma semi-recta como porção rectilínea na fronteira. Na forma (3.39), $W_J^+(A)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$ e a sua fronteira coincide com o semi-eixo positivo dos yy .

DEMONSTRAÇÃO: (\Rightarrow) De acordo com a hipótese,

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\bar{v}_1 & \beta & -iv_3 \\ i\bar{v}_2 & i\bar{v}_3 & \gamma \end{bmatrix}.$$

Como $a > 0$, segue-se que

$$W_J^+(H^J) = [0, +\infty[, \quad W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0[.$$

Mas, $x^* JH^J x = 0$ se $x = (1, \eta, \eta) \in \mathbb{C}^3$. Para estes vectores x , obtém-se o quociente

$$f(x) := \frac{x^* JK^J x}{x^* Jx} = \alpha + (\beta + \gamma + 2 \operatorname{Im} v_3)|\eta|^2 + 2|\eta||v_1 + v_2| \sin \phi,$$

onde $\phi = \arg \eta + \arg(v_1 + v_2)$, que descreve o semi-eixo positivo dos yy porque $\beta + \gamma + 2 \operatorname{Im} v_3$ é um número positivo e porque $\alpha = |v_1 + v_2|^2 / (\beta + \gamma + 2 \operatorname{Im} v_3)$.

(\Leftarrow) Suponhamos que $W_J^+(A)$ tem uma semi-recta como porção rectilínea na fronteira. Mediante uma translação e uma rotação, podemos identificar a porção rectilínea com o semi-eixo positivo dos yy . Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ uma base ortonormada- J de \mathbb{C}^3 tal que

$$H^J e_1 = 0 \quad \text{e} \quad e_1^* J e_1 = 1.$$

Considere-se a representação matricial de JH^J nesta base,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & \bar{c} & b \end{bmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{C}$ são tais que $ab = |c|^2$. Não podemos ter $|a| \neq |c|$, pois se tal ocorrer somos conduzidos aos casos estudados nos Teoremas 3.23, 3.24 e 3.25, onde obtivemos um segmento de recta, duas semi-rectas ou uma recta na fronteira do contradomínio numérico indefinido. Então, $|a| = |c|$ e, numa base apropriada,

$$JH^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & a \end{bmatrix}.$$

Para $a > 0$, vem $W_J^+(H^J) = [0, +\infty[$, $W_{-J}^+(H^J) =]-\infty, 0]$. Seja

$$JK^J = \begin{bmatrix} \alpha & -iv_1 & -iv_2 \\ i\overline{v_1} & \beta & -iv_3 \\ i\overline{v_2} & i\overline{v_3} & \gamma \end{bmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}.$$

Mostra-se sem dificuldade que $x^*JH^Jx = 0$ para $x = (1, \eta, \eta) \in \mathbb{C}^3$ e que

$$f(x) := \frac{x^*JK^Jx}{x^*Jx} = \alpha + (\beta + \gamma + 2\operatorname{Im} v_3)|\eta|^2 + 2|\eta||v_1 + v_2| \sin \phi,$$

com $\phi = \arg \eta + \arg(v_1 + v_2) \in \mathbb{R}$. Se $\beta + \gamma + 2\operatorname{Im} v_3 > 0$, então $f(x)$ descreve uma semi-recta da forma $[b', +\infty[$. Tomando $\alpha = |v_1 + v_2|^2/(\beta + \gamma + 2\operatorname{Im} v_3)$, vem $b' = 0$. \square

3.3.3 Exemplos

Apresentam-se exemplos ilustrativos dos resultados obtidos. As figuras foram produzidas no *Mathematica 5.1* e as fronteiras dos conjuntos convexos $W_J^+(A)$ e $W_{-J}^+(A)$ estão representadas a negrito.

Considerem-se as matrizes triangulares

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3/5(1+i) & 0 & 0 \\ 0 & -1-i & 2 \\ 0 & 0 & 1+i \end{bmatrix}.$$

No primeiro caso, $C_J(A_1)$ traduz-se na circunferência de equação

$$x^2 + y^2 = 1$$

e no ponto de coordenadas $(1, 1)$. No segundo caso, $C_J(A_2)$ consiste na hipérbole de equação

$$2xy = 1$$

e no ponto de coordenadas $(-3/5, -3/5)$. Os contradomínios numéricos $W_J(A_1)$ e $W_J(A_2)$ obtêm-se a partir do invólucro pseudo-convexo das curvas associadas. Ambos apresentam duas porções rectilíneas na fronteira (vide figuras 32 e 33). Na figura 33, mostra-se o que sucede quando se “move” o ponto isolado da curva associada ao longo da região do plano compreendida entre os dois ramos da hipérbole.

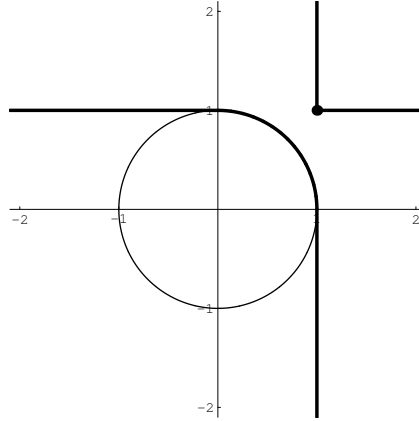


Figura 32: Ilustração do invólucro pseudo-convexo da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ com o ponto de coordenadas $(1, 1)$.

As próximas matrizes que estudaremos são indecomponíveis- J e apresentam uma porção rectilínea em $\partial W_J(A)$, contida no eixo dos yy . Por isso, a determinação das regiões do plano a que correspondem as componentes convexas de $W_J(A)$, com $A = H^J + iK^J$, faz-se a partir da Proposição 3.13, se 0 for valor próprio duplo de H^J , ou do Teorema 3.11, quando 0 tiver multiplicidade 3. Observe-se que 0 só pode ser valor próprio triplo de H^J quando H^J não é diagonalizável por intermédio de uma transformação unitária- J , uma vez que as matrizes consideradas não são essencialmente hermíticas- J . Tal situação ocorre quando A tem a forma canónica (3.38) ou (3.39).

Considere-se

$$A_3 = \begin{bmatrix} i & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad H_3^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

A curva associada $C_J(A_3)$ é definida pela equação de linhas

$$1 - \sqrt{2}u + v + v^3/4 + (v - 2\sqrt{2}u)v/2 = 0$$

e está representada na figura 34. Tem-se

$$W_J^+(H_3^J) = [0, +\infty[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(H_3^J) =]-\infty, -\sqrt{2}].$$

O conjunto $W_J^+(A_3)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$ e é determinado pelo

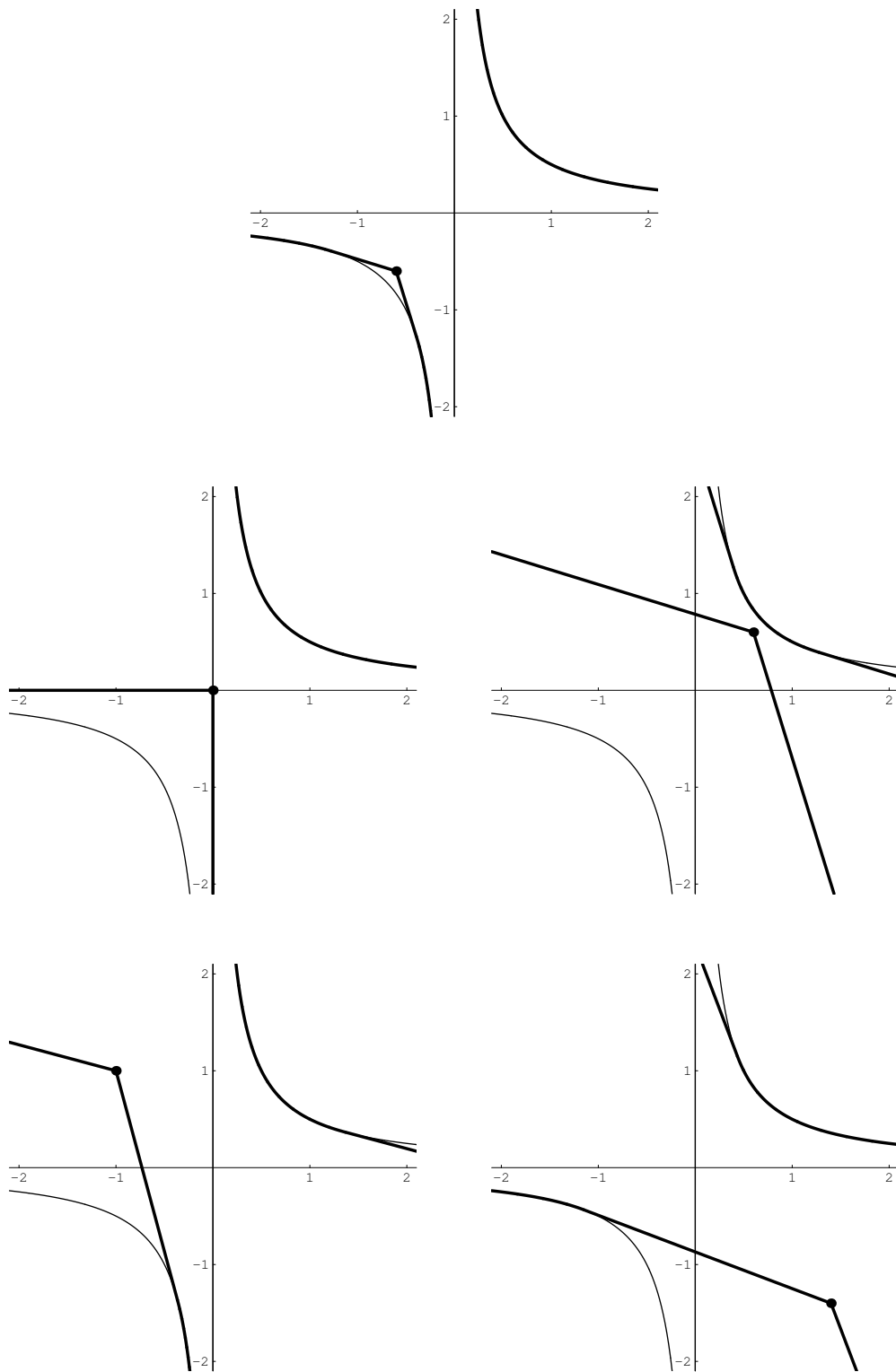


Figura 33: Ilustração do invólucro pseudo-convexo da hipérbole $2xy = 1$ com os pontos de coordenadas $(-3/5, -3/5)$, $(0, 0)$, $(3/5, 3/5)$, $(-1, 1)$ e $(7/5, -7/5)$.

invólucro convexo da componente de $C_J(A_3)$ nesse semi-plano. O segmento de recta $[0, i]$ é uma porção rectilínea em $\partial W_J^+(A_3)$. Por outro lado, $W_{-J}^+(A_3)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq -\sqrt{2}\}$, sendo delimitado pela componente de $C_J(A_3)$ contida nessa região (cfr. Teorema 3.23).

Seja

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ -1 & i & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_4^J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A figura 35 representa a curva $C_J(A_4)$, cuja equação de linhas é

$$v^3 - 3v^2 + 4(v+1)(2u+1) = 0.$$

Tem-se

$$W_J^+(H_4^J) = [0, +\infty[\quad \text{e} \quad W_{-J}^+(H_4^J) =]-\infty, 0].$$

O invólucro pseudo-convexo de $C_J(A_4)$ origina duas semi-rectas, uma em $\partial W_J^+(A_4)$ e outra em $\partial W_{-J}^+(A_4)$, estando $W_J^+(A_4)$ contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$ e $W_{-J}^+(A_4)$ no semi-plano $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq 0\}$ (cfr. Teorema 3.24).

Para

$$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad H_5^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a equação de linhas de $C_J(A_5)$ é dada por

$$1 - 3v^2/4 + u(1 + v^2/4) = 0.$$

Na figura 36, representa-se a curva associada. Este exemplo conduz a um caso degenerado. Efectivamente, tem-se

$$W_{-J}^+(H_5^J) =]-\infty, 0] \quad \text{e} \quad W_J^+(H_5^J) = [0, +\infty[,$$

pelo que $W_{-J}^+(A_5) = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \leq 0\}$ e $W_J^+(A_5) = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z \geq 0\}$. O eixo imaginário é uma porção rectilínea nas fronteiras de $W_J^+(A_5)$ e de $W_{-J}^+(A_5)$ (cfr. Teorema 3.25-(3.37)).

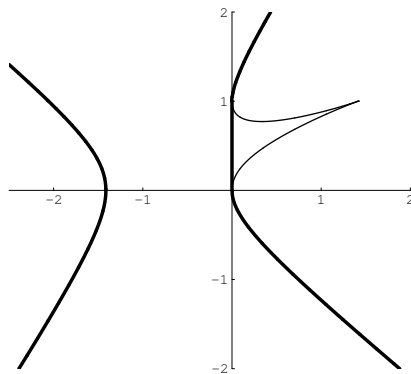


Figura 34: A curva associada é uma quártica com um cúspide e uma tangente dupla (que coincide com o eixo dos yy). O seu invólucro pseudo-convexo produz um segmento de recta em $\partial W_J^+(A_3)$.

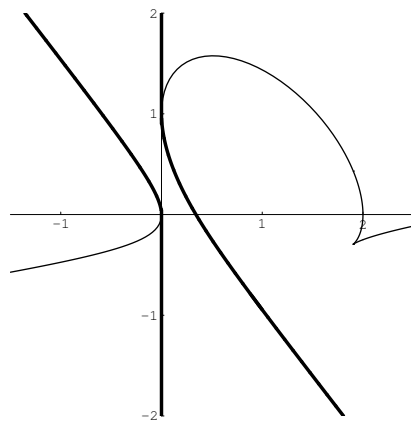


Figura 35: A curva associada é uma quártica com um cúspide e uma tangente dupla (que coincide com o eixo dos yy). A semi-recta $i[1, +\infty[$ e o semi-eixo negativo dos yy são porções rectilíneas, respectivamente, em $\partial W_J^+(A_4)$ e em $\partial W_{-J}^+(A_4)$.

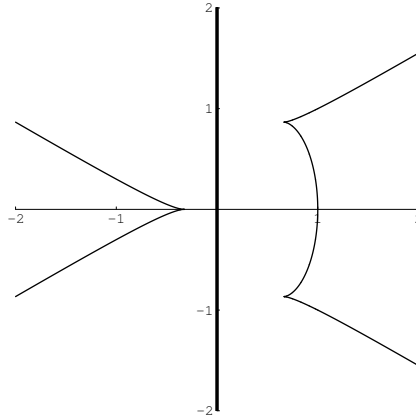


Figura 36: A curva associada é uma quártica com três cúspides. O eixo dos yy é uma tangente dupla da curva (em pontos complexos) e determina uma porção rectilínea em $\partial W_J^+(A_5)$ e em $\partial W_{-J}^+(A_5)$.

Seja

$$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad H_6^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A curva associada $C_J(A_6)$ está representada na figura 37 e é definida pela equação de linhas

$$4uv^2 + 1 = 0.$$

Este exemplo também conduz a um caso degenerado. De facto, prova-se sem dificuldade que

$$W_{-J}^+(H_6^J) =]-\infty, 0[\quad \text{e} \quad W_J^+(H_6^J) = [0, +\infty[.$$

Consequentemente, $W_{-J}^+(A_6) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$ e $W_J^+(A_6) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. O eixo dos yy é uma porção rectilínea apenas na fronteira de $W_J^+(A_6)$ (cfr. Teorema 3.25-(3.38)).

Considere-se, finalmente,

$$A_7 = \begin{bmatrix} i/16 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 1+i & -1+i \\ 0 & 1-i & -1-i \end{bmatrix}; \quad H_7^J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A figura 38 ilustra a curva associada $C_J(A_7)$, cuja equação de linhas é

$$16 + v - 64uv - 4v^2 + 4v^3 = 0.$$

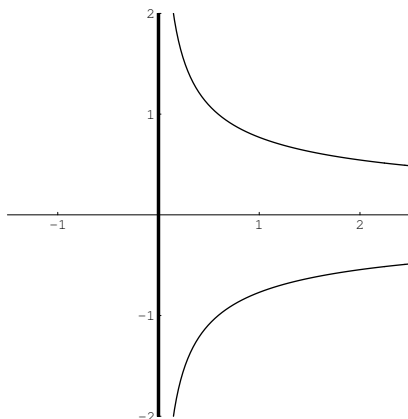


Figura 37: A curva associada é uma cúbica com um cúspide e um ponto de inflexão, ambos na recta do infinito. O eixo dos yy é uma tangente de inflexão e determina uma porção rectilínea em $\partial W_J^+(A_6)$.

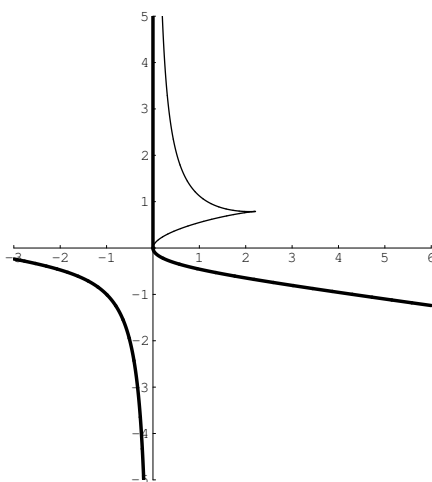


Figura 38: A curva associada é uma quártica com um cúspide. O eixo dos yy é uma tangente dupla da curva (na origem e num ponto da recta do infinito). O semi-eixo positivo dos yy é uma porção rectilínea em $\partial W_J^+(A_7)$.

Como

$$W_{-J}^+(H_7^J) =] - \infty, 0[\quad \text{e} \quad W_J^+(H_7^J) = [0, +\infty[,$$

o conjunto $W_{-J}^+(A_7)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}$, enquanto que $W_J^+(A_7)$ está contido no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$. O invólucro pseudo-convexo de $C_J(A_7)$ produz uma semi-recta na fronteira de $W_J^+(A_7)$ (cfr. Teorema 3.26).

O que sabemos não é muito. O que não sabemos é imenso.

Pierre-Simon Laplace

Considerações finais

Terminamos a dissertação analisando algumas questões decorrentes da investigação desenvolvida que, com certeza, desafiarão a nossa persistência de futuro.

Problemas para a dimensão finita

Como foi observado no capítulo 3, Kippenhahn [30] provou que, no caso clássico, não existem curvas associadas do tipo C2, C4 e C5. Em contraste, os exemplos da secção 3.2 mostram que os contradomínios numéricos indefinidos de matrizes de ordem 3 podem ter curvas associadas de cada um dos cinco tipos, C1–C5, previstos pelo Teorema 1.7. Contudo, nos exemplos apresentados, as curvas do tipo C2, C4 e C5 conduzem sempre a casos degenerados, em que $W_J(A)$ coincide com \mathbb{C} ou com \mathbb{C} excepto uma recta. Por outro lado, as curvas associadas do tipo C1 ou C3 só originam casos degenerados quando são curvas limitadas. A averiguação que estas propriedades são válidas em geral constitui, sem dúvida, um problema aliciante.

Ao ficar caracterizado o caso $n = 3$, uma questão natural que se coloca prende-se com a possibilidade de utilizar a mesma técnica para estudar as curvas associadas quando as matrizes têm ordem 4. As curvas a analisar são, agora, de classe 4. Se recorrermos à classificação das quárticas, ou seja, das curvas de ordem 4, podemos caracterizar as curvas associadas por dualização. Contudo, este problema envolve a análise de um número consideravelmente superior de casos.

Ao contrário das cúbicas que têm, no máximo, uma singularidade de multiplicidade 2 (nodo ou cúspide), para as quárticas o número máximo dessas singularidades ascende a três. A aplicação das fórmulas de Plücker (Teorema 1.5) permite efectuar uma classificação das quárticas em 10 tipos diferentes, consoante o número de nodos e cúspides que possuem.

Porém, algumas singularidades de multiplicidade 2 de uma quártica podem coincidir, originando novos casos particulares [47, pp.213–215]. Se analisarmos todas as diferentes possibilidades, obtemos um total de 21 tipos diferentes de quárticas irredutíveis [41, pp.1–2].

Uma classificação rigorosa das quárticas permite a completa caracterização das curvas associadas para as matrizes de ordem 4. Retiram-se algumas propriedades interessantes, que decorrem novamente das fórmulas de Plücker: a ordem da curva associada pode variar entre 3 e 12, excepto 11. O número máximo de cúspides (reais ou complexos) é 24 e o número de nodos (reais ou complexos) não pode ultrapassar 28.

Em [40, 41], investiga-se o caso clássico: apresentam-se exemplos de matrizes $A \in M_4$ onde se caracterizam as curvas duais de $C(A)$; fornecem-se exemplos que abrangem um total de 9 tipos de quárticas; adicionalmente, excluem-se 11 tipos e conjectura-se que também não poderá ocorrer o último dos 21 tipos.

Seria interessante averiguar, dos 21 tipos de quárticas, quais os que o caso indefinido contempla e, de entre esses, os que conduzem a casos não-degenerados.

Contradomínio numérico indefinido de operadores de Toeplitz

Os *operadores de Toeplitz*, presentes frequentemente na literatura da especialidade, estão associados a numerosas aplicações. Recordemos, de forma sucinta, a sua definição.

Denote-se por m a medida de Lebesgue normalizada sobre a circunferência unitária do plano complexo. Para $1 \leq p \leq \infty$, considere-se o subespaço H^p de $L^p = L^p(m)$ constituído por todas as funções $f \in L^p$ para as quais são nulos os coeficientes de índice negativo da respectiva série de Fourier. Seja P a projecção ortogonal de L^2 em H^2 : se $g \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$, então $Pg \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{in\theta}$. Dada uma função $\phi \in L^\infty$, o operador T_ϕ tal que

$$T_\phi f = P(\phi f), \quad f \in H^2,$$

designa-se por *operador de Toeplitz* em H^2 . Para uma análise aprofundada dos operadores de Toeplitz e das suas propriedades, remetemos o leitor para [15].

O estudo do contradomínio numérico indefinido de certas classes de operadores de Toeplitz merece indubitavelmente toda a atenção e interesse. Destacamos o seguinte exemplo concreto. Klein [31] provou, para o caso clássico, que se $\phi \in L^\infty$ é não-constante e T_ϕ é um operador normal, então $\sigma(T_\phi)$ é um segmento de recta fechado $[a, b]$ e $W(T_\phi)$ é o correspondente segmento aberto $]a, b[$. Nesse seguimento, faria todo o sentido, de futuro, generalizar-se esta investigação ao caso indefinido.

Bibliografia

- [1] T. Azizov e I. Iokhvidov, Linear operators in Hilbert spaces with G -metric, *Russian Math. Surveys* **26** (1971), nº 4, 45–97.
- [2] ———, *Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric*, John Wiley & Sons, New York, 1989 (tradução de E. Dawson).
- [3] W. W. R. Ball, On Newton's classification of cubic curves, *Proc. London Math. Soc.* **22** (1890), 104–143.
- [4] T. Bayasgalan, The numerical range of linear operators in spaces with an indefinite metric (em russo), *Acta Math. Hungar.* **57** (1991), nº 1–2, 7–9.
- [5] N. Bebiano, R. Lemos, e J. da Providência, Numerical ranges of unbounded operators arising in quantum physics, *Linear Algebra Appl.* **381** (2004), 259–279.
- [6] N. Bebiano, R. Lemos, J. da Providência, e G. Soares, On generalized numerical ranges of operators on an indefinite inner product space, *Linear and Multilinear Algebra* **52** (2004), nº 3–4, 203–233.
- [7] ———, On the geometry of numerical ranges in spaces with an indefinite inner product, *Linear Algebra Appl.* **399** (2005), 17–34.
- [8] N. Bebiano, C.-K. Li, e J. da Providência, Generalized numerical ranges of permanental compounds arising from quantum systems of bosons, *Electr. J. Linear Algebra* **7** (2000), 73–91.
- [9] N. Bebiano, J. da Providência, e R. Teixeira, The Elliptical and the Hyperbolic Range Theorems Revisited, *Proceedings of the 2007 International Conference on Engineering and Mathematics (ENMA 2007)*, 15–22.

-
- [10] ———, Flat portions on the boundary of the indefinite numerical range of 3×3 matrices, submetido para publicação.
- [11] ———, Indefinite numerical range of 3×3 matrices, submetido para publicação.
- [12] E. Beutel, *Algebraische Kurven II: Theorie und Kurven dritter und vierter Ordnung*, Leipzig: G.J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1911.
- [13] R. Bix, *Conics and Cubics: a Concrete Introduction to Algebraic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [14] J. Bognár, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [15] A. Böttcher e B. Silbermann, *Analysis of Toeplitz Operators*, second ed., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [16] E. Brieskorn e H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
- [17] E. Brown e I. Spitkovsky, On flat portions on the boundary of the numerical range, *Linear Algebra Appl.* **390** (2004), 75–109.
- [18] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [19] W. F. Donoghue Jr., On the numerical range of a bounded operator, *Michigan J. Math.* **4** (1957), 261–263.
- [20] M. Fiedler, Geometry of the Numerical Range of Matrices, *Linear Algebra Appl.* **37** (1981), 81–96.
- [21] G. Fischer, *Plane Algebraic Curves*, American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [22] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves: An Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [23] I. Gohberg, P. Lancaster, e L. Rodman, *Indefinite Linear Algebra and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [24] K. E. Gustafson e D. K. Rao, *Numerical Range: the field of values of linear operators and matrices*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [25] F. Hausdorff, Der Wertvorrat einer Bilinearform, *Math. Z.* **3** (1919), 314–316.

- [26] R. A. Horn e C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1985.
- [27] ———, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1991.
- [28] R. Kaye e R. Wilson, *Linear Algebra*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [29] D. Keeler, L. Rodman, e I. Spitkovsky, The numerical range of 3×3 matrices, *Linear Algebra Appl.* **252** (1997), 115–139.
- [30] R. Kippenhahn, Über den Wertevorrat einer Matrix, *Math. Nachr.* **6** (1951), 193–228 (tradução em inglês, de P. Zachlin e M. Hochstenbach, disponível em: <http://www.win.tue.nl/~hochsten/pdf/rana07-02.pdf>).
- [31] E. M. Klein, The numerical range of a Toeplitz operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* **35** (1972), nº 1, 101–103.
- [32] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [33] P. Lancaster e M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices: second edition with applications*, Academic Press, New York, 1985.
- [34] C.-K. Li, A Simple Proof of the Elliptical Range Theorem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124** (1996), nº 7, 1985–1986.
- [35] C.-K. Li e L. Rodman, Remarks on numerical ranges of operators in spaces with an indefinite metric, *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (1998), nº 4, 973–982.
- [36] ———, Shapes and computer generation of numerical ranges of Krein space operators, *Electr. J. Linear Algebra* **3** (1998), 31–47.
- [37] C.-K. Li, N. K. Tsing, e F. Uhlig, Numerical ranges of an operator in an indefinite inner product space, *Electr. J. Linear Algebra* **1** (1996), 1–17.
- [38] M. Marcus e C. Pesce, Computer Generated Numerical Ranges and Some Resulting Theorems, *Linear and Multilinear Algebra* **20** (1987), 121–157.
- [39] F. D. Murnaghan, On the field of values of a square matrix, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **18** (1932), 246–248.

- [40] H. Nakazato, Quartic curves associated to 4 by 4 Matrices, *Sci. Rep. Hirosaki Univ.* **43** (1996), 209–221.
- [41] ———, Quartic curves associated with some hyperbolic ternary forms, *Bull. Fac. Sci. Tech. Hirosaki Univ.* **6** (2004), 7–15.
- [42] H. Nakazato, N. Bebiano, e J. da Providência, The J -numerical range of a J -Hermitian matrix and related inequalities, submetido para publicação.
- [43] H. Nakazato e K. Tsumura, k -Numerical range and the structural performance of buildings, *Sci. Math. Japonicae* **53** (2000), nº 1, 101–117.
- [44] L. S. Pontryagin, Hermitian operators in a space with indefinite metric (em russo), *Izvestiya Akad. Nauk USSR, Ser. Matem.* **8** (1944), 243–280.
- [45] V. Prasolov, *Polynomials*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [46] J. da Providência, The Numerical Ranges of Derivations and Quantum Physics, *Linear and Multilinear Algebra* **37** (1994), 213–220.
- [47] G. Salmon, *A Treatise on the Higher Plane Curves*, G. E. Stechert & Co., New York, 1934.
- [48] H. Shapiro, A Conjecture of Kippenhahn about the Characteristic Polynomial of a Pencil Generated by Two Hermitian Matrices II, *Linear Algebra Appl.* **45** (1982), 97–108.
- [49] J. Shapiro, Notes on the numerical range, *Lecture Notes*, Michigan State University, 2004 (disponível em:
http://www.mth.msu.edu/~shapiro/Pubvit/Downloads/NumRangeNotes/numrange_notes.pdf).
- [50] O. Toeplitz, Das algebraische Analogon zu einem Satze von Fejér, *Math. Z.* **2** (1918), 187–197.
- [51] R. Walker, *Algebraic Curves*, Princeton University Press, New Jersey, 1950.
- [52] A. Wintner, Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen, *Math. Z.* **30** (1929), 228–282.

Índice de resultados fundamentais

Teorema 1.7	DUALIZAÇÃO DAS CÚBICAS DE NEWTON	16
Teorema 2.12	MÉTODO DE FIEDLER PARA A EQUAÇÃO DE PONTOS	38
Teorema 2.21	CONTRADOMÍNIO NUMÉRICO POSITIVO DE UMA MATRIZ HERMÍTICA- J	47
Teorema 2.25	MATRIZES HERMÍTICAS- J DE ESPECTRO NÃO-REAL	49
Teorema 3.3	CONTRADOMÍNIO NUMÉRICO DE UMA MATRIZ HERMÍTICA- J DE ORDEM 2	55
Teorema 3.5	TEOREMA DO CONTRADOMÍNIO ELÍPTICO	58
Teorema 3.7	TEOREMA DO CONTRADOMÍNIO HIPERBÓLICO	60
Teorema 3.11	CARACTERIZAÇÃO DE $W_J(A)$, COM A HERMÍTICA- J , DE ORDEM 3 E NILPOTENTE	73
Teorema 3.14	CONTRADOMÍNIO NUMÉRICO DE UMA MATRIZ HERMÍTICA- J DE ORDEM 3	82
Teorema 3.18	MATRIZES TRIANGULARES: $C_J(A)$ REDUZ-SE A UM PONTO E UMA ELIPSE	100
Teorema 3.20	MATRIZES TRIANGULARES: $C_J(A)$ REDUZ-SE A UM PONTO E UMA HIPÉRBOLE	101
Teorema 3.23	MATRIZES INDECOMPONÍVEIS- J COM UM SEGMENTO DE RECTA EM $\partial W_J(A)$	104
Teorema 3.24	MATRIZES INDECOMPONÍVEIS- J COM DUAS SEMI-RECTAS EM $\partial W_J(A)$	107
Teorema 3.25	MATRIZES INDECOMPONÍVEIS- J COM UMA RECTA EM $\partial W_J(A)$	109
Teorema 3.26	MATRIZES INDECOMPONÍVEIS- J COM UMA SEMI-RECTA EM $\partial W_J(A)$	111

Índice alfabético

B

Bézout

Teorema de Bézout, 8

C

campo de valores, 27

contradomínio numérico

clássico, 27

indefinido, 27

negativo, 28

positivo, 28

coordenadas homogéneas

de linha, 2

de ponto, 1

curva algébrica

cónica, 5, 6

cúbica, 5, 6

classe, 13

dual, 13

equação da curva, 5, 6

foco, 14

irredutível, 5, 6

limitada, 8

não-singular, 11

no plano afim, 5

no plano projectivo, 6

vista afim, 6

ordem, 5, 6

parte real, 7

quártica, 5, 6

recta, 5, 6

reduzível, 5, 6

curva associada, 33

D

decomposição cartesiana- J , 32

Diocles

Cissóide de Diocles, 95

F

“flat portion”, 96

forma

bilinear, 38

definida positiva, 22

hermítica, 21

limitada, 22

não-degenerada, 21

sesquilinear, 21

simétrica, 38

H

Hilbert

espaço de Hilbert, 22

K

Kippenhahn

polinómio de Kippenhahn, 32

Krein

espaço de Krein, 23

L

linhas isotrópicas, 7

M

matriz

adjunta- H , 26

de inércia, 31

decomponível- J , 84, 98

essencialmente hermítica- H , 30

hermítica- H , 26

indecomponível- J , 98

nilpotente, 73

índice de nilpotência, 73

normal- H , 26

unitária- H , 26

O

operador

adjunto- H , 26

auto-adjunto- H , 26

essencialmente auto-adjunto- H , 30

normal- H , 26

unitário- H , 26

P

plano dual, 12

plano projectivo, 1

pontos projectivos, 1

rectas projectivas, 2

triângulos de referência, 4

triângulo fundamental, 4

Plücker

curva de Plücker, 14

fórmulas de Plücker, 15

polinómio

conjunto dos zeros, 5

grau, 5

homogéneo, 5

pontos

angulosos, 47

circulares do infinito, 7

complexos, 2

complexos conjugados, 2

de inflexão, 11

de multiplicidade r , 10

do infinito, 3

duplos, 11

cúspide, 11

nodo, 11

finitos, 3

reais, 2

simples, 11

singulares, 11

ordinários, 11

Pontryagin

espaço de Pontryagin, 23

porção rectilínea, 96

processo de

desomogenização, 7

homogenização, 7

produto interno

definido, 22

indefinido, 22

base ortonormada em \mathbb{C}^n , 24

R

recta do infinito, 3

rectas

complexas, 2

complexas conjugadas, 2

de suporte, 32

reais, 2

resultante de dois polinómios, 17

S

segunda composta, 37

mista, 37

soma directa de matrizes quadradas, 31

subespaço

negativo(- H), 22, 25

neutro(- H), 22, 25

positivo(- H), 22, 25

Sylvester

lei de inércia de Sylvester, 31

T

tangente, 10

de inflexão, 11

múltipla, 14

dupla, 14

Toeplitz-Hausdorff

Teorema de Toeplitz-Hausdorff, 27

transformação projectiva, 4

V

vector

anisotrópico(- H), 25

isotrópico(- H), 25

negativo(- H), 22, 25

neutro(- H), 22, 25

positivo(- H), 22, 25