A versatilidade do número de Neper!

Maria do Carmo Martins*

Hoje, véspera de 25 de abril, onde há 40 anos Portugal fervilhava a revolução dos cravos, trago-vos um número que também revolucionou a matemática em termos de aplicabilidade – o número de Neper, também conhecido por número de Euler.

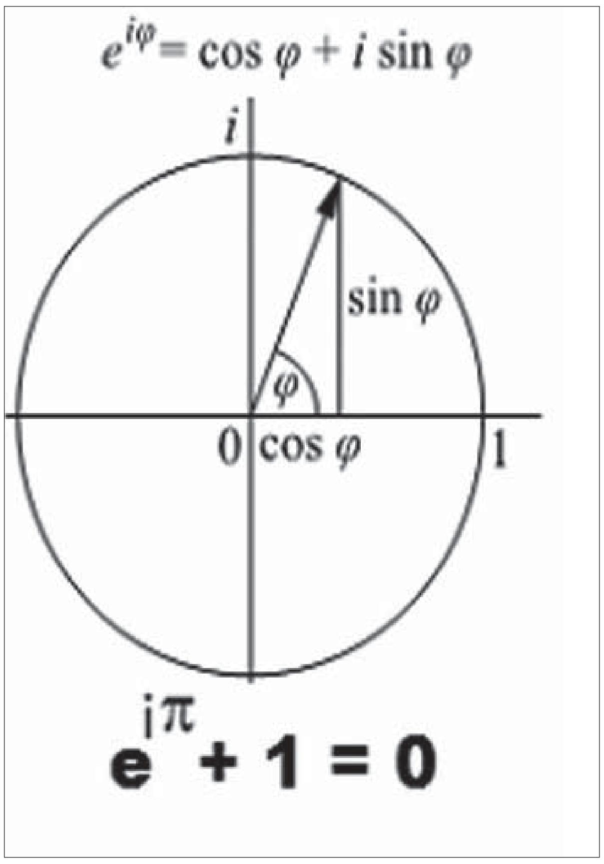
Historicamente falando, atribui-se a John Napier (Neper) a descoberta deste número no século XVII (que mais tarde passou a ser conhecido pelo seu nome). Mas só cerca de um século depois, com o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, Euler reconheceu a importância deste número. O símbolo e que é usado para designar este número foi escolhido em homenagem a Euler.

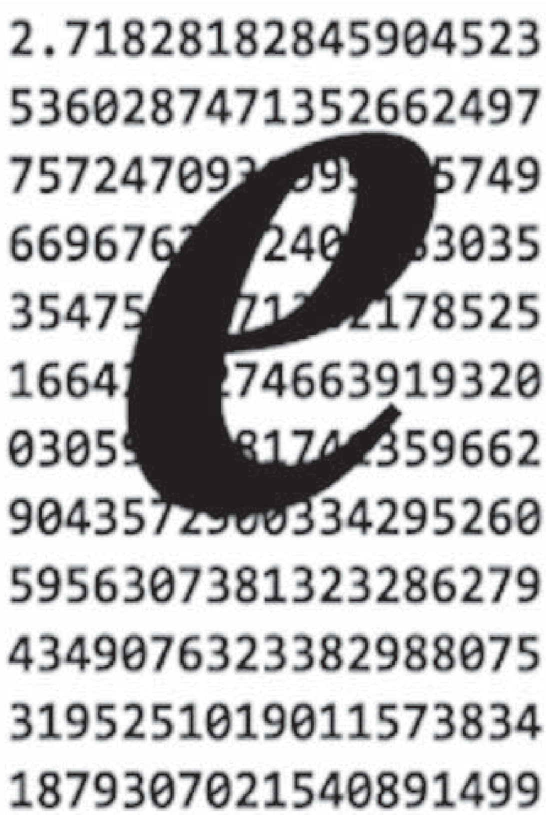
Ombreando em importância matemática com o número pi, o número de Neper é aproximadamente igual a 2,71 828182845904523536028747135266249 7.... Este número aparece indiscriminadamente na Matemática, na Biologia, na Física, na Engenharia em geral e em muitos outros campos do saber, até no mundo da alta finança.

O número e é definido como sendo o limite da sucessão (1+1/N)^N, quando o número inteiro N tende para infinito (cresce indiscriminadamente). Para melhor visualização da sucessão referida, quando N é substituído por 2, a expressão acima é (1+1/2)^2 = (3/2)^2 = 2,25; para N igual a 3, é (1+1/3)^3 = (4/3)^3 = 2,37; para N igual a 4 é (1+1/4)^4 = (5/4)^4 = 2,44, depois (6/5)^5, (7/6)^6, ..., (101/100)^100, e assim por diante. O valor de e é o limite desta sequência de números. Se o leitor tiver paciência, poderá verificar que o limite está muito próximo de (100001/10000)^10000, que é igual a 2,718145. Uma melhor aproximação seria a potência (1000001/1000000)^1000000.

De seguida ilustramos uma aplicação de e ao cálculo de juros compostos. Antes de uma pequena explicação, esclareço o leitor que não sou uma investidora nem pretendo ser, apenas gosto de fazer umas contas... Se investirmos mil euros a uma taxa anual de 3%, durante um ano, teremos no final desse ano um capital igual ao valor investido adicionado dos juros recebidos. A expressão que define este valor é 1000+1000x0,03, ou seja, 1000x(1+0,03), que perfaz 1030 euros. Se o capital for investido semestralmente e com capitalização de juros, ou seja, o juro obtido no primeiro semestre é aplicado e rende ele também juro no segundo semestre, então é expectável termos 1000x(1+0,03/2) ao fim dos primeiros seis meses. Chamemos a este valor, que corresponde ao capital inicial adicionado dos juros do primeiro semestre, C1. O valor no final do ano (passado o segundo semestre) será de C1x(1+0,03/2), ou seja, 1000x(1+0,03/2)x(1+0,03/2), que se pode representar por 1000x(1+0,03/2)^2. Em termos práticos corresponde a 1030,25 euros. Caso o investimento seja trimestral, teremos no final do primeiro trimestre 1000x(1+0,03/4), no final do segundo trimestre 1000x(1+0,03/4)x(1+0,03/4)=1000x(1+0,03/4)^2, no fim do terceiro trimestre 1000x(1+0,03/4)^3 e no fim do anoteremos1000x(1+0,03/4)^4. Recorrendo a este tipo de investimento, teremos então 1030,339 euros para esbanjar. Se procedermos desta forma e calcularmos os juros compostos do nosso dinheiro para N períodos anuais a uma taxa de 0,03, ele irá valer 1000x(1+0,03/N)^N ao fim do ano. O leitor consegue encontrar alguma semelhança entre esta fórmula e a definição do número e, como limite da sucessão (1+1/N)^N? Observamos que no lugar de 1 surge o valor 0,03.

Alguma manipulação matemática atrás dos bastidores, mostra que o investimento de juros em tempo contínuo irá certamente fazer com que o dinheiro valha 1000xe^0,03 no final do ano e 1000xe^0,03T ao fim de T anos. Curiosamente, acontece que a função exponencial Y=e^T, em termos da qual esta e outras situações de crescimento exponencial são expressas, é uma das mais significativas na matemática.





Existem muitas outras aplicações de e, que mostram o carácter natural deste número. Atendendo a esta e a outras razões associadas ao cálculo, o número e é a base da função logaritmo natural. Bom, creio que seja necessária uma pequena apresentação sobre os logaritmos para esclarecer esta afirmação. O logaritmo decimal de um número é simplesmente a potência a que 10 deve ser elevado para igualar o número em questão. O logaritmo decimal de 100 é 2, porque 10^2=10x10=100 (alternativamente, log(100)=2); o logaritmo decimal de 1000 é 3, porque 10^3=1000; e o logaritmo decimal de 500 é 2,5, uma vez que 10^2,7=500.

Por sua vez, o logaritmo natural de um número é a potência a que o número e deve ser elevado para igualar esse número. Assim, o logaritmo natural de 1000 é cerca de 6,9, dado que e^6,9=1000 (ou alternativamente, ln(1000=6,9); o logaritmo natural de 100 é 4,6, dado que e^4,6=100; e o logaritmo natural de 2 é 0,7, dado que e^0,7=2. Ao que parece, este último número, o logaritmo natural de 2, protagoniza um papel de destaque em finanças: dividindo a taxa de juro que se recebe por 0,7 obtemos o número de anos que é preciso para que o seu valor duplique de valor. Deste modo, as taxas de 10% e de 14% (0,10 e 0,14) implicam que o nosso dinheiro irá duplicar em aproximadamente 7 anos (0,7/0,1=7) e 5 anos (0,7/0,14=5), respetivamente, caso não sejamos obrigados a gastá-lo antes...

Outra ocorrência, pouco plausível, do número e resulta quando uma secretária mistura aleatoriamente 50 cartas diferentes e os envelopes endereçados dentro dos quais devem ser metidas. Se, acidentalmente, a secretária colocar as cartas nos envelopes, podemos perguntar: qual é a probabilidade de que, pelo menos, uma carta seja colocada no envelope endereçado de forma correta? Por nenhuma razão facilmente explicável, a resposta envolve novamente o numero e! A probabilidade de pelo menos um acerto é (1-1/e), ou cerca de 63%.

Sendo irracional (não se pode exprimir como a razão entre dois números inteiros e, por conseguinte, não tem uma expansão decimal periódica) e transcendental (não é a raiz de nenhuma equação algébrica), o número e está omnipresente em muitas fórmulas e teoremas matemáticos. Por exemplo, a fórmula de Euler é uma fórmula matemática da área específica da análise complexa, dada por : e^(ix)=cos x+i sen x, em que x é o argumento real (em radianos) e i é a unidade imaginária. Um caso especial desta fórmula é a identidade de Euler, a qual relaciona, de forma elegante cinco números fundamentais da matemática: e, pi, i, 0 e 1 sendo dada por e^(i.pi)+1=0 e que segundo Richard Feynman é a identidade mais bela de toda a matemática.

* Professora do Departamento
de Matemática da Universidade
dos Açores
mika@uac.pt