

A multiplicação de dois números segundo o algoritmo de Karatsuba



Por: Maria do Carmo Martins
Professora do Departamento de Matemática
da Universidade dos Açores
maria.c.martins@ua.pt

Se o tio Alfredo Marceneiro fosse vivo faria hoje, 25 de fevereiro, 125 anos. Este fadista português, que marcou uma época, possuía uma voz inconfundível e é sem dúvida uma figura ímpar do fado em Portugal. O leitor certamente estará a questionar-se se hoje irei falar de fado. Não, não vou. Em vez disso, “cantarei até que a voz me doa” um método para multiplicar dois números que é mais eficiente do que aquele que nos foi ensinado nos nossos primeiros anos de escola. Preparados? Dêem-me então um Mi menor e vamos a isso.

Em tempos que já lá vão, aprendemos um algoritmo para multiplicar números. Talvez o nosso professor não o designasse “algoritmo” para não nos assustar, mas, independentemente da formalidade do nome, aprendemos um conjunto bem definido de regras para executar a operação da multiplicação. O processo foi gradual: começamos por multiplicar números com um só algarismo e depois foi-se aumentando a quantidade de algarismos dos fatores, e nós lá fomos memorizando as regras do método, com maior ou menor esforço. Bela ideia aquela em que ainda se vai para a escola com muita vontade de aprender.

Recordemos o dito algoritmo da multiplicação. Por exemplo, vamos multiplicar os números 9876 por 5432. Começa-se por dispor numa linha o 9876 e na linha seguinte, de forma alinhada, o 5432 (ver Figura 1). Seguidamente fazem-se as multiplicações parciais: $9876 \times 2 = 19752$, $9876 \times 3 = 29628$, $9876 \times 4 = 39504$ e $9876 \times 5 = 49380$. Para concluir, adicionam-se os vários produtos parciais, obtendo-se o resultado 53646432. Perfeito! Tarefa cumprida.

O que provavelmente nunca pensamos foi no tempo despendido para executar esse algoritmo e chegar ao resultado. Já agora, quantas foram as operações básicas (multiplicações e adições) necessárias para completar o nosso cálculo? Recordemos o primeiro produto $9876 \times 2 = 19752$: foram realizadas 4 multiplicações. Mais os transportes (os que vão de trás), portanto mais três adições. Nem sempre há transportes envolvidos, mas uma contagem por excesso indica-nos que no pior caso efetuamos $2 \times 4 = 8$ operações básicas (de notar que 9876 tem 4 algarismos). Contabilizando agora as operações para as quatro linhas são efetuadas, no máximo, $2 \times 4 \times 4 = 2 \times 4^2 = 32$ operações básicas (uma constante (2) que multiplica pelo número de algarismos de cada fator, neste caso ambos têm 4 algarismos). Mas ainda

$$\begin{array}{r}
 9876 \\
 \times 5432 \\
 \hline
 19752 \\
 29628 \\
 39504 \\
 + 49380 \\
 \hline
 53646432
 \end{array}$$

Figura 1

não terminámos, pois há que adicionar os 4 produtos parciais para chegar ao resultado final, mas, para simplificar, vamos ignorar estas adições.

O que há a realçar até aqui é que se cada fator em vez de $n = 4$ algarismos, tiver o dobro, isto é, $2 \times 4 = 8$ algarismos, por exemplo, e pretendêssemos multiplicar os números 13245437 e 34528675, o número total de operações básicas a efetuar é menor ou igual a $2 \times 8^2 = 2 \times 64 = 128$ (2 multiplicado pelo quadrado do número de algarismos dos fatores). E se o número de algarismos dos fatores quadruplicar ($4 \times 4 = 16$)? Neste caso, o número total de operações básicas a realizar é menor ou igual a $2 \times 16^2 = 512$. Grosseiramente falando apercebemo-nos que o número de operações básicas, em função do número de algarismos (n) dos fatores, é menor ou igual a uma constante (2) multiplicada por n^2 . Os algoritmos cujo número de operações é dado em função do quadrado dos valores de entrada dizem-se algoritmos quadráticos.

Claro que quando aprendemos a multiplicação não nos foi ensinado estes detalhes: éramos felizes a fazer as nossas contas de multiplicar e nada mais nos interessava. Mas tendo feito uma análise da complexidade do algoritmo, a pergunta que podemos fazer agora é: haverá algum algoritmo que efetue a multiplicação de dois números envolvendo menos operações básicas do que o “clássico”?

Esta mesma pergunta foi feita pelo grande estudioso de algoritmos Andrey Nikolaeovich Kolmogorov (1903–1987), que conjecturou que não havia melhor solução do que o algoritmo “clássico” da multiplicação. Como não tinha uma prova deste facto (só uma conjectura) disseminou a pergunta pela comunidade científica. Em apenas uma semana o jovem russo Anatoly Alexeevitch Karatsuba (1937–2008), com apenas 23 anos de idade, concebeu um algoritmo que provava que a conjectura de Kolmogorov era falsa e que havia uma forma de fazer a multiplicação de dois números de modo mais eficiente do que o algoritmo “clássico”. Reconhecendo a genialidade de Karatsuba, Kolmogorov publicou em 1962 um artigo escrito por si e contendo dois resultados da multiplicação: o algoritmo de Karatsuba e um resultado separado de Yuri Petrovich Ofman (nascido em 1939), colocando o seu nome e os de Karatsuba e Ofman como co-autores. Curiosamente Karatsuba, só soube da existência de tal publicação quando recebeu a notificação da editora. Outros tempos, em que não havia nem correio electrónico nem Facebook, mas sobejavam cientistas honestos.

Voltemos novamente à multiplicação de 9876 por 5432, mas desta vez usando o procedimento de multiplicação inventado por Karatsuba.

Vamos descrever a sequência de passos que leva ao resultado, mas será muito diferente daquela que aprendemos na “primária” e certamente deixará o leitor um pouco surpreendido com o “truque” utilizado. Consideremos então os nossos fatores: $x = 9876$ e $y = 5432$.

Primeiro vamos separar os dígitos de $x = 9876$ em dois números a e b tal que $a = 98$ e $b = 76$. Ou seja, partimos o número x em duas metades com o mesmo número de dígitos. Note-se que $x = a \times 100 + b = 98 \times 100 + 76 = 9800 + 76 = 9876$. Se, por exemplo, x fosse o número 98463256, então a seria 9846 e b seria 3256. De seguida, separemos os dígitos de $y = 5432$ em dois números $c = 54$ e $d = 32$, tal como fizemos para x . De igual modo, tem-se $y = c \times 100 + d = 54 \times 100 + 32 = 5400 + 32 = 5432$. Assim, $xy = (a \times 100 + b)(c \times 100 + d)$ e aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição resulta: $a \times 100 \times c \times 100 + a \times 100 \times d + b \times c \times 100 + b \times d$. Reordenando os termos ficamos com $xy = ac \times 100^2 + (ad + bc) \times 100 + bd$.

Até aqui nada de novo e, embora feita a multiplicação de uma forma mais estranha, faz-se exatamente o mesmo número de operações que no algoritmo “clássico”. Ao todo quatro multiplicações: ac , ad , bc e bd . O truque, ou se quiserem, o brilhantismo de Karatsuba, está no facto de ele ter percebido que $ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$, o que pode ser confirmado aplicando de novo a propriedade distributiva. De facto, $(a + b)(c + d) - ac - bd = ac + ad + bc + bd - ac - bd = ad + bc$.

O que é que este facto tem de interessante? Que se consegue escrever a multiplicação de x por y só com



Karatsuba (1937–2008)

três produtos em vez de quatro e isto reduz o número de cálculos a efetuar. Ou seja, $xy = ac \times 100^2 + [(a + b)(c + d) - ac - bd] \times 100 + bd$.

Note-se que agora só temos de calcular ac , bd e $(a + b)(c + d)$. Isto faz com o número de operações a realizar seja no máximo $n^1.58496$... em vez de n^2 , como anteriormente. E qual o impacto no número de operações básicas realizadas? Percebe-se melhor o efeito em números grandes. Por exemplo, se pretendemos multiplicar dois números com 100 algarismos (um número bastante grande) utilizando o método clássico teríamos de efetuar $100^2 = 10000$ operações, enquanto que com o método de Karatsuba fazemos apenas 1479 operações. Se os números tivessem 1000 dígitos, com o método clássico faríamos um milhão de operações básicas, enquanto que com o Karatsuba faríamos cerca de 59 000 operações, o que corresponde a fazer somente 5.9% dos cálculos, uma poupança de 94.1%, mesmo o que necessitamos em tempos de crise. O cálculo do número máximo de operações básicas a realizar no método de Karatsuba vai muito para além do âmbito deste artigo e, por isso, não vou explicar como se obtém $n^1.58496$... O leitor interessado pode contactar-me por correio electrónico que terei todo o prazer em explicar como se obtém este valor.

Podemos então enunciar o algoritmo de Karatsuba para multiplicar dois números xy .

Passo 1: partir o número x em a e b e y em c e d como descrito atrás;

Passo 2: calculemos o produto ac . Ora, no nosso exemplo, $ac = 98 \times 54 = 5292$;

Passo 3: calculemos o produto bd . Ora $bd = 76 \times 32 = 2432$;

Passo 4: calculemos $(a + b)$, $(c + d)$ e depois $(a + b)(c + d)$. Ora, $a + b = 98 + 76 = 174$, $c + d = 54 + 32 = 86$ pelo que $(a + b)(c + d) = 14964$;

Passo 5: subtraímos ao resultado do Passo 4 os resultados dos Passos 2 e 3, isto é, $14964 - 5292 - 2432 = 7240$.

Vamos agora combinar os resultados dos Passos 2, 3 e 5 de forma simples para obter o resultado da multiplicação de x por y .

Passo 6: tomamos o primeiro produto ac e acrescentamos 4 zeros, vindo 52920000; tomamos o resultado de $bd = 2432$ e, por último, tomamos o resultado do Passo 5, cujo valor é 7240, acrescentando 2 zeros, ou seja 724000. Seguidamente, adicionamos esses valores, isto é, calculamos $52920000 + 2432 + 724000$ que é igual a 53646432, o mesmo valor que se obteve pelo algoritmo “clássico”.

O que há a realçar é que existem algoritmos diferentes e que podem ser comparados fazendo uma análise do seu desempenho, ou seja, comparando o número de operações que realizam em função dos dados de entrada. Neste caso, o algoritmo “clássico” é quadrático, enquanto que o de Karatsuba é $n^{\log_2 3}$, que representa muito menos operações básicas, como vimos. No mundo digital em que vivemos é muito importante ter algoritmos eficientes, porque implicam menos tempo de processamento, e que se podem manifestar, por exemplo, em coisas tão mundanas como a bateria do nosso telemóvel durar mais tempo. Tal como canta Maria da Fé, Karatsuba foi “como uma ave que tão alto voa” na algoritmia. Bons voos!

Luís dos Anjos:
“União e Convergência”,
este é o nosso lema

“Sopas Solidárias
pela Fajã de Baixo”

É já depois de amanhã que se realiza o jantar “Sopas Solidárias pela Fajã de Baixo”, no salão da Casa do Povo da Fajã de Baixo, a partir das 20h00.

O evento é promovido pelo Núcleo Rotário de Desenvolvimento Comunitário de Ponta Delgada (NRDC-PDL) em estrita parceria com a Junta de Freguesia da Fajã de Baixo.

A este propósito, o Presidente da Junta de Freguesia de Fajã de Baixo revelou que “o convite que o Núcleo Rotário de Desenvolvimento Comunitário de Ponta Delgada fez à Fajã de Baixo, a Junta de Freguesia teve todo o gosto em abraçar, concentrando todas as atenções junto das Forças Vivas da Freguesia e todas, sem hesitação, aceitaram. Motivo que nos deixa, todos imensamente felizes”.

“A nossa participação centra-se em toda a logística do evento com a grande participação e boa vontade do Centro Social e Cultural da Casa do Povo de Fajã de Baixo” acrescentou.

Luís dos Anjos não tem dúvidas que “As Sopas Solidárias pela Fajã de Baixo” serão um grande sucesso e motivo de orgulho para a sua Freguesia. “Estou ciente que no próximo ano se faça uma segunda edição”, reforçando que “este evento só se tornou possível com a boa vontade e espírito de solidariedade de todas as 13 Forças Vivas participantes, nomeadamente: Agrupamento 739 – Grupo de Escuteiros; Associação Recreativa e Filarmónica Nossa Senhora dos Anjos; Aturculdesp – Associação Turística, Cultural e Desportiva da Fajã de Baixo; Instituto São João de Deus – Casa de Saúde de São Miguel; Centro Social e Cultural da Casa do Povo de Fajã de Baixo; Comissão de Festas Nossa Senhora dos Anjos; Fajã de Baixo Solidária; Grupo Coral de Fajã de Baixo; Grupo de Amigos da Casa do Povo de Fajã de Baixo; Grupo de Jovens “Vasos Comunicantes”; Grupo Folclórico da Fajã de Baixo; Junta de Freguesia de Fajã de Baixo; Rancho de Romeiros da Fajã de Baixo.

Todos estes Grupos, Associações e Instituições têm um desempenho muito importante no evento, que para além da confecção das suas próprias sopas, as quais são todas diferentes e colaborarão também na confecção de todos os salgadinhos e pasteleria para o evento. “A nós se juntaram alguns individuais nas doações de pasteleria, assim como algumas empresas locais na oferta de brindes para o bingo e sorteios”, ressalva—.

