Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 12
Setembro, 2019

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR
Ludus

A introdução do conceito de fração em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade

Cláudia Carreiro, Eduarda Correia e João Patrício,
Carlos Pereira dos Santos, Ricardo Cunha Teixeira

EBI de Ribeira Grande, CEAFEL & CST, NICA-UAc & FCT-UAc

cmfsantos@fc.ul.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Este artigo apresenta uma abordagem à introdução do conceito de fração, através de imagens, que espelha o trabalho desenvolvido desde o ano letivo de 2016/2017 no âmbito da implementação do Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", nas turmas do 2.º ano de escolaridade da Escola Básica Integrada de Ribeira Grande, São Miguel, Açores. As atividades desenvolvidas tiveram por base as orientações emanadas da oficina de formação "Matemática Passo a Passo: Estratégias de superação de dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico". A implementação no terreno das atividades resultou de um trabalho colaborativo entre os Prof DA e os professores titulares de turma.*

Palavras-chave: Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", Oficina "Matemática Passo a Passo: Estratégias de superação de dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", Frações, 2.º ano de escolaridade.

Introdução

O projeto Prof DA surgiu em setembro de 2015, no contexto do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", da Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores. As orientações científicas e didáticas que estão na base da ação do Prof **DA** (professor qualificado na superação de **D**ificuldades de **A**prendizagem) são da responsabilidade da oficina de formação "Matemática Passo a Passo: Estratégias de Superação de Dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", da Universidade dos Açores.

A ação do Prof DA desenvolve-se em contexto de trabalho colaborativo com os professores titulares de turma e tem por base estudos provenientes das neurociências cognitivas, que fornecem pistas sobre a forma como o cérebro de uma criança aprende Matemática, e alguns casos de sucesso do ensino da Matemática, destacando-se o Método de Singapura, com centenas de pormenores de ordem científica e didática testados com sucesso em vários países. Para mais informações sobre o Projeto Prof DA sugerem-se os artigos [3, 5, 6].

Tal como os autores referem em [3], das teorias edificadoras do currículo de Matemática de Singapura, destacam-se os princípios da variabilidade matemática e percetiva de Zoltán Dienes [4], o enfoque numa aprendizagem conceptual, em detrimento de uma aprendizagem meramente procedimental, de Richard Skemp [11], e a abordagem concreto-pictórico-abstrato (abordagem CPA), que remonta aos trabalhos de Jerome Bruner [1, 2]. O currículo de Matemática de Singapura [8] defende uma aprendizagem ativa: "aprender fazendo". A partir da manipulação de objetos e recorrendo a representações concretas e pictóricas, os alunos são orientados a descobrir conceitos matemáticos abstratos.

Nas próximas secções, apresentamos, através de sequências de imagens, uma proposta de exploração do conceito de fração no contexto do 2.º ano de escolaridade.

1 O conceito de fração: primeiras explorações

As *frações* podem ser utilizadas em diferentes contextos, nomeadamente quando representam parte de um todo (por exemplo, metade de uma laranja) ou, mesmo, parte de um conjunto de elementos (por exemplo, metade das laranjas de uma laranjeira). Por este motivo, as frações apresentam uma íntima relação com a operação divisão.

Os alunos deverão explorar o conceito de fração de modo a perceberem a sua utilidade no dia a dia. Esta exploração, ancorada em situações concretas do quotidiano, deve também ser cuidadosamente faseada. Em [9], os autores defendem que, por terem múltiplas aplicações, contextos e sentidos, "há que modelar de forma cuidadosa o conceito de fração, fasear e ordenar os nós conceptuais ao longo dos anos e dosear o caráter abstrato/concreto dos exemplos e atividades" (p. 41). Os autores sugerem, ainda, uma lista ordenada de tópicos relativos ao conceito de fração a explorar ao longo do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico [9, 10].

Neste artigo, apresentamos uma proposta de sequência de exploração do conceito de fração no 2.º ano de escolaridade, ano em que este conceito deve ser introduzido de acordo com o atual programa em vigor [7]. Passamos à ilustração desta sequência de aprendizagem.

A utilização de uma fração para indicar um certo número de partes iguais, resultantes da divisão de um determinado todo (unidade), deve ser o primeiro sentido a ser abordado. A interpretação de uma fração no sentido da relação todo-partes assenta em duas informações essenciais:

- Em quantas partes iguais é dividido o todo (denominador);
- Quantas dessas partes constituem a quantidade em causa (numerador).

O número de partes iguais em que o todo é dividido traduz a natureza da unidade em que a fração é expressa: podem ser meios, terços, quartos, quintos, ..., décimos, ... Na medida em que é algo qualitativo, precisa de ser denominado (meios, terços, ...). Daí a palavra "denominador" – denomina uma natureza. Por outro lado, ao estipularmos a quantidade de meios, terços, ..., estamos perante um juízo quantitativo. Daí o "numerador" indicar quantas partes temos [?]. Os papéis do numerador e do denominador devem ser explorados através de frases simples como, por exemplo, a que se segue:

"$\frac{3}{4}$ são **3** de **4** partes iguais que formam o todo".

A identificação do denominador (em quantas partes iguais está dividido o todo/a unidade) precede, portanto, a identificação do numerador (quantas dessas partes queremos considerar). Vejam-se as Figuras 1 e 2.

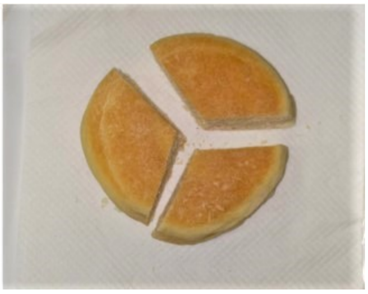


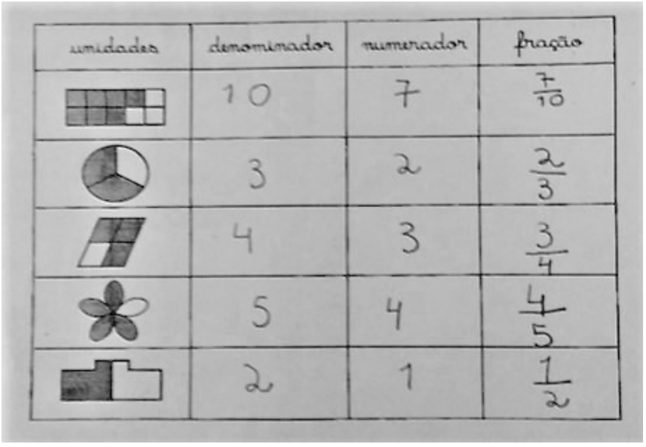
Figura 1: Um exemplo de concretização de uma fração como relação todo-partes. Se cortarmos um bolo lêvedo em três partes iguais (3) e comermos duas dessas partes (2), comemos dois terços do bolo: duas de três partes iguais que formam o todo. O numerador é 2 e o denominador é 3. Escreve-se $\frac{2}{3}$.

2 O todo está dividido em partes iguais?

Uma fração representa um certo número de partes iguais de um todo. Esta deve ser a primeira mensagem a passar. Neste sentido, é fundamental proporcionar aos alunos situações de manipulação e de exploração concreta em que o desafio consista em verificar se o todo está ou não dividido em partes iguais. Veja-se a Figura 3.

Os alunos devem perceber, desde cedo, que a utilização de uma fração implica a existência de um todo/unidade dividido em partes iguais. Quando o conceito de fração é explorado com recurso a modelos geométricos, o modelo que representa o todo deve estar dividido em partes geometricamente iguais. Este aspeto é fundamental nas primeiras explorações.

Mais tarde, no decorrer do seu percurso escolar, os alunos perceberão que, na verdade, as partes que formam o todo devem ser equivalentes (ter a mesma área),



unidades	denominador	numerador	fração
	10	7	$\frac{7}{10}$
	3	2	$\frac{2}{3}$
	4	3	$\frac{3}{4}$
	5	4	$\frac{4}{5}$
	2	1	$\frac{1}{2}$

Figura 2: Notação de fração, com a identificação do denominador e do numerador, mediante a análise de modelos geométricos.

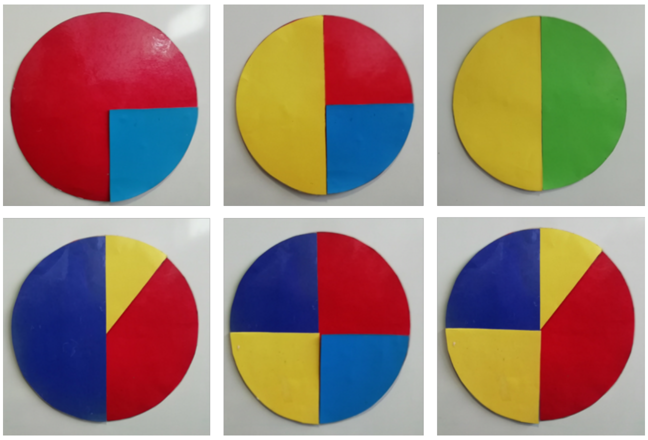


Figura 3: Em que situações o todo está dividido em partes iguais?

podendo não ser geometricamente iguais. Contudo, atendendo à maturidade necessária para relacionar os conceitos de área e de equivalência de figuras planas com o conceito de fração, entendemos que as explorações a desenvolver no âmbito do 2.° ano de escolaridade devem cingir-se a modelos geométricos divididos em partes geometricamente iguais.

3 Identificação de uma fração: o todo e as partes

Sempre que o todo se encontra dividido em partes iguais, podemos aplicar o conceito de fração. O recurso a modelos geométricos para representar o todo dividido em partes geometricamente iguais é, portanto, fundamental para que os alunos percebam a relação entre o todo e as suas partes. Neste contexto, as crianças devem ser desafiadas a identificar a fração que representa cada parte do todo (vejam-se as Figuras 4 a 6).

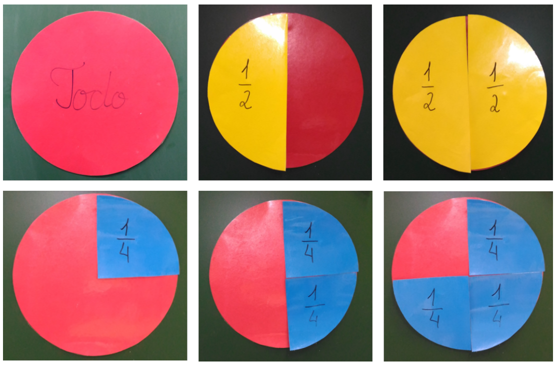


Figura 4: Que fração representa cada parte do todo?

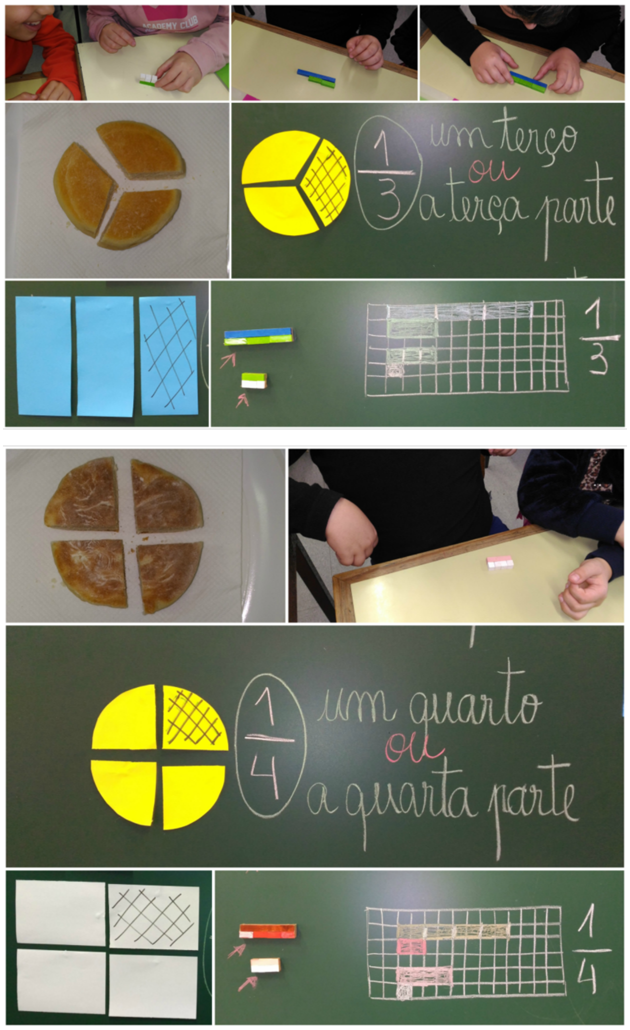


Figura 5: Diferentes modelos para representação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

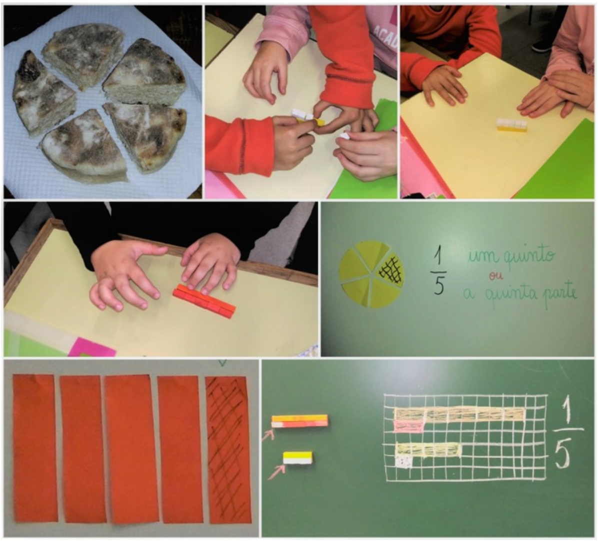


Figura 6: Diferentes modelos para representação da fração $\frac{1}{5}$.

A exploração do conceito de fração em que uma das partes iguais de um todo é representada por uma fração merece um faseamento no contexto da abordagem CPA: concreto (bolo lêvedo dividido em partes iguais), pictórico (modelos geométricos retangulares e circulares) e abstrato (escrita da fração).

A diversificação de modelos geométricos é fundamental para o aluno compreender o conceito de fração (vejam-se as Figuras 7 a 9).

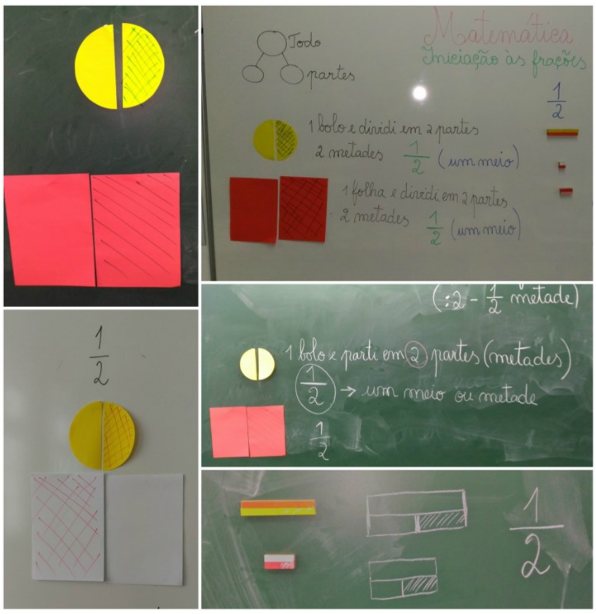


Figura 7: Diferentes modelos para representação da fração $\frac{1}{2}$.

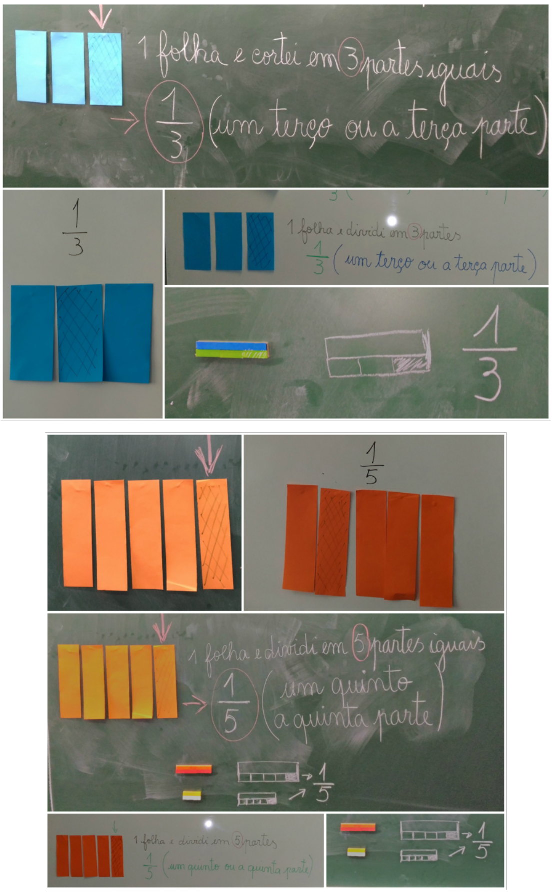


Figura 8: Diferentes modelos para representação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$.

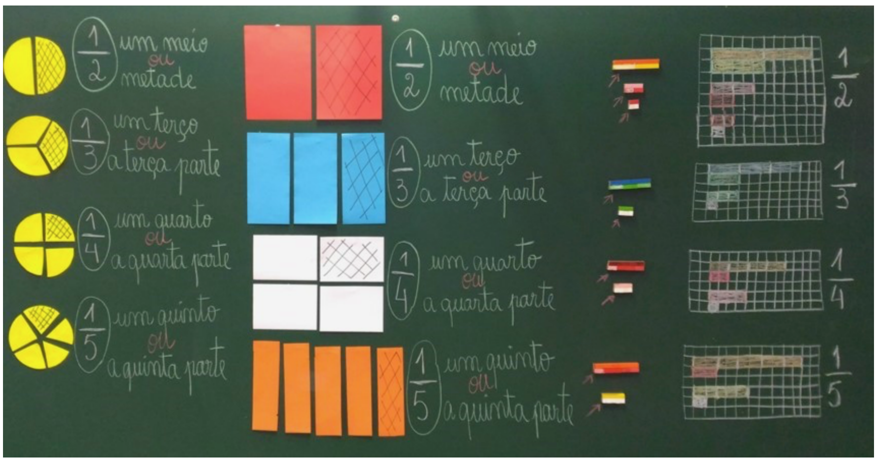


Figura 9: Diferentes modelos para representação das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{5}$.

Numa próxima etapa, os alunos podem ser desafiados a identificarem frações quando existem várias partes do todo selecionadas/sombreadas (veja-se a Figura 10). Reciprocamente, pode-se pedir aos alunos para dividirem o todo num determinado número de partes iguais e para sombrearem algumas dessas partes de acordo com uma fração dada (a informação encontra-se, respetivamente, no denominador e no numerador dessa fração).

Figura 10: "A macieira das frações": nesta atividade, da autoria das Prof DA Ana Simões e Paula Miguel, da EBI de Ginetes, os alunos procuram identificar as frações que representam os modelos disponíveis em cada maçã, existindo várias partes do todo selecionadas/sombreadas.

Também é importante explorar situações em que os alunos se apercebam que existem diferentes maneiras de dividir o todo em partes iguais e, a partir daí, selecionar as que interessam (veja-se a Figura 11).

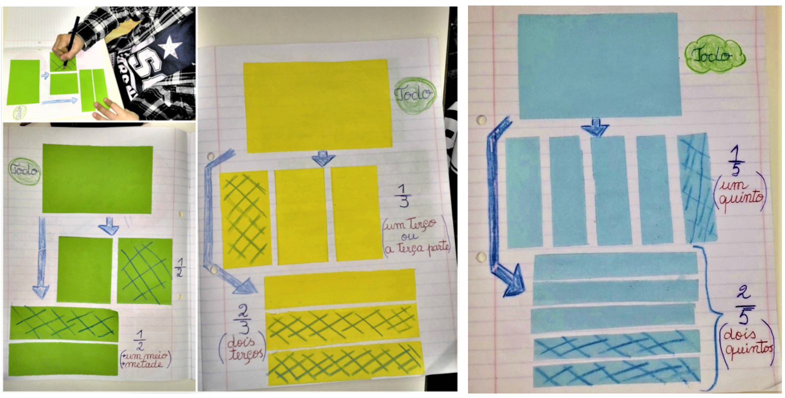


Figura 11: Diferentes maneiras de dividir o todo em partes iguais.

As frações decimais podem ser introduzidos como se sugere na Figura 12, com recurso ao MAB.

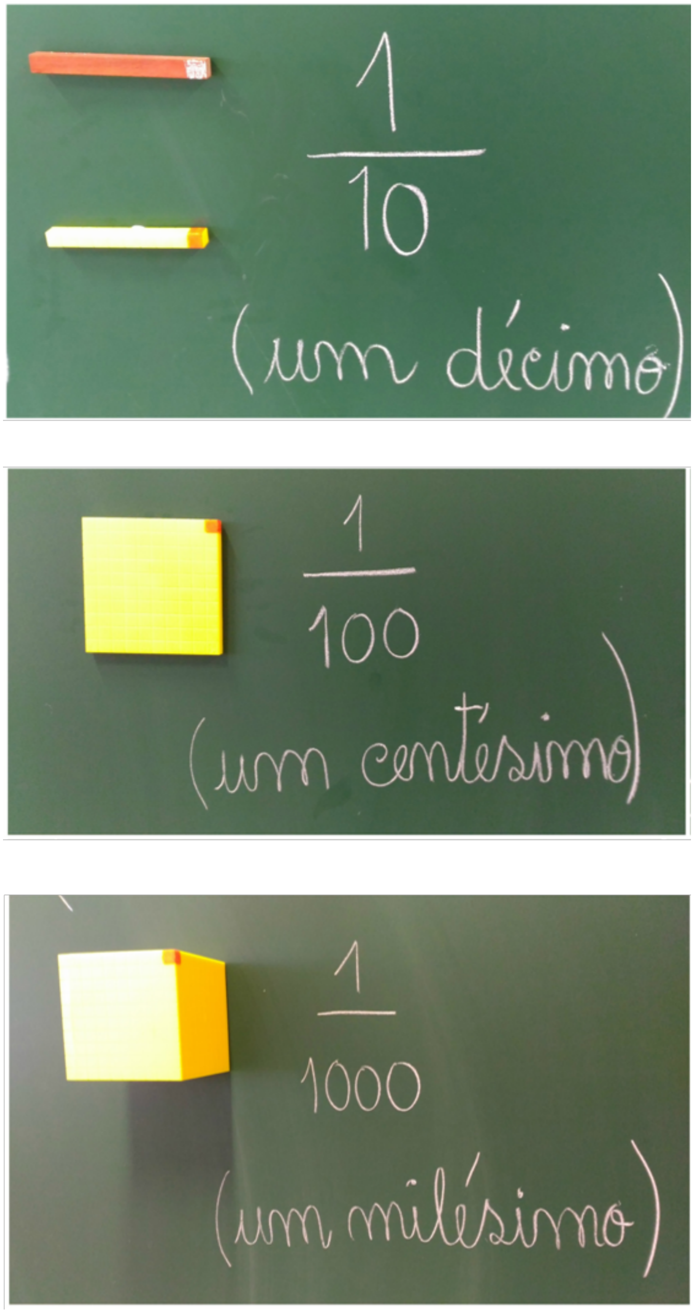


Figura 12: Divisão do todo, respetivamente em 10, 100 e 1000 partes iguais, com recurso ao MAB, com o intuito de se explorarem as frações $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{1000}$.

4 Completar o todo

Nesta fase inicial de aprendizagem, duas ideias adicionais devem ser tratadas: o *ato de completar o todo* e as *comparações simples* [9]. Começamos por abordar o primeiro tópico. As Figuras 13 a 17 ilustram o ato de completar o todo.

Figura 13: Exploração das partes necessárias para completar o todo, quando este se encontra dividido num determinado número de partes iguais. Abordagem concreta que operacionaliza a noção da divisão do todo em duas, três, quatro, cinco e dez partes iguais.

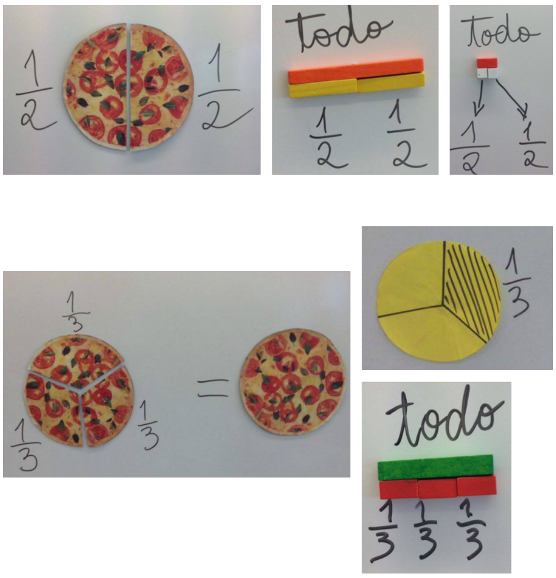


Figura 14: A concretização deve estar sempre presente na abordagem às frações, nomeadamente no 2.º ano de escolaridade. Apresenta-se o todo dividido em partes iguais. Cada parte da piza representa, respetivamente, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ do todo. A junção das partes iguais permite completar o todo.

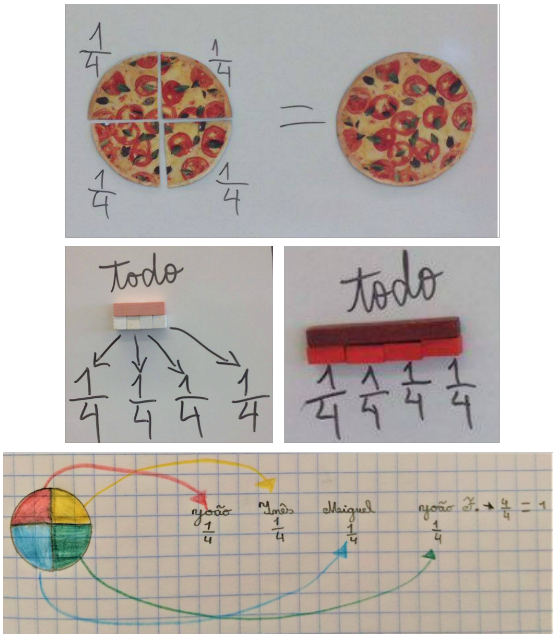


Figura 15: A junção de todas as partes iguais representa $\frac{4}{4}$, ou seja, o todo/a unidade. Propõe-se também a utilização de material estruturado, como as barras Cuisenaire, com vista a promover uma melhor compreensão do conceito de fração, segundo múltiplas perspetivas. O registo pictórico efetuado no caderno do aluno apela para a relação entre o todo e as suas partes.

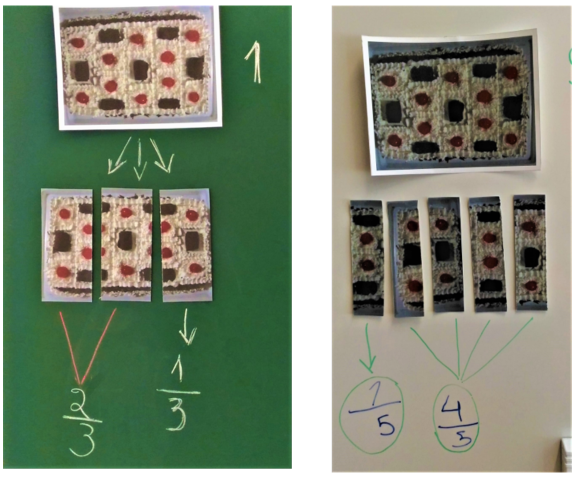


Figura 16: À esquerda, identificamos a divisão do todo em três partes iguais. Cada parte representa $\frac{1}{3}$ do todo. Nesta situação, ao juntarem-se duas dessas partes, obteve-se $\frac{2}{3}$ que, juntamente com a restante parte, $\frac{1}{3}$, formam o todo. À direita, apresenta-se exemplo semelhante, com a diferença de o todo se encontrar dividido em cinco partes iguais, tendo-se que $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$ formam o todo.

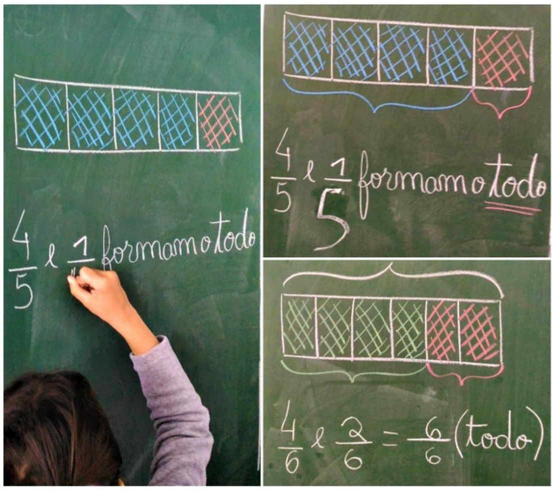


Figura 17: Registo pictórico efetuado no quadro.

5 Comparar frações com o mesmo denominador

A comparação de frações com o mesmo denominador deverá ser explorada com recurso a situações que apelem à sua concretização. Este tipo de comparação diz respeito a naturezas idênticas. O que é maior $\frac{3}{5}$ ou $\frac{1}{5}$? Estando ambas as frações expressas na mesma natureza (quintos), evidentemente que três é maior do que um, pelo que $\frac{3}{5} > \frac{1}{5}$. Vejam-se as Figuras 18 e 19.

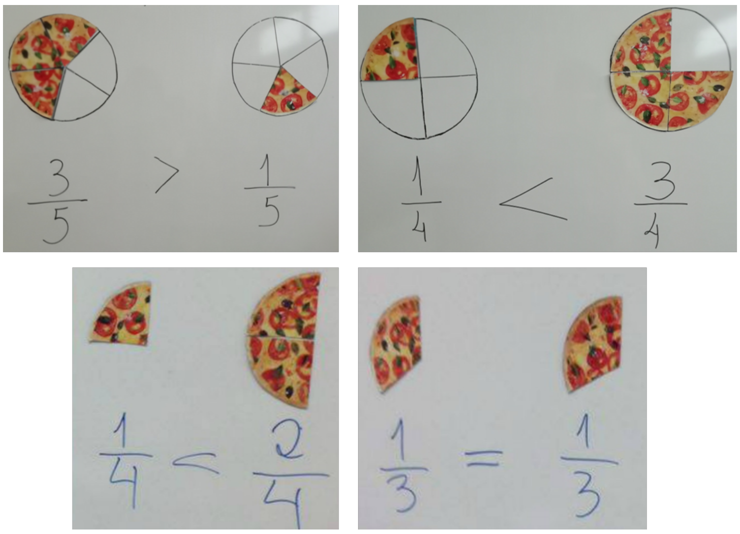


Figura 18: A cada fração corresponde a representação de uma piza que se encontra dividida em tantas partes iguais quanto o valor indicado pelo denominador. O modelo de piza de cada fração apresenta, em fotografia, o número de fatias ou partes correspondente ao valor indicado pelo numerador.

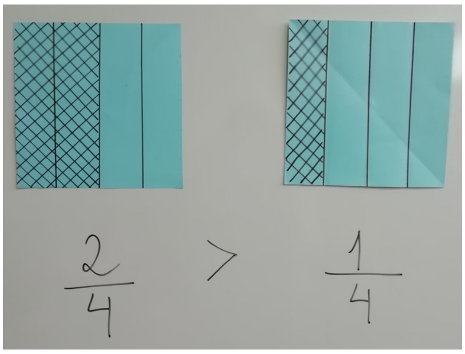


Figura 19: Deverá ser privilegiada uma abordagem diversificada na comparação de frações, recorrendo-se a diferentes modelos de representação. No exemplo, apresenta-se um modelo geométrico de área retangular para facilitar a compreensão da comparação de frações com o mesmo denominador.

6 Comparar frações com o mesmo numerador

Na comparação de frações, quando a natureza é distinta (ou seja, quando os denominadores são diferentes), essa comparação pode parecer paradoxal a uma criança, uma vez que, por exemplo, 5 é maior do que 3, mas $\frac{1}{5}$ é menor do que $\frac{1}{3}$. Com uma situação concreta, o conceito pode ser clarificado: "Temos dois bolos lêvedos iguais, um para ser dividido igualmente por três amigos e o outro para ser dividido igualmente por cinco amigos. Em qual dos grupos se come mais, no primeiro ou no segundo?" Para captar a atenção dos alunos para uma determinada tarefa matemática deve-se procurar uma ligação emocional com o tema a explorar [12]. Vejam-se as Figuras 20 e 21.

Figura 20: Nesta atividade, o professor distribuiu várias pizas/todos iguais, concretamente uma piza dividida em três partes iguais, outra em quatro partes iguais e ainda outra em cinco partes iguais. Retirou-se uma porção de cada piza e pediu-se a três alunos que sobrepusessem a sua parte às restantes e, assim, constatassem se a sua porção era maior, menor ou igual às dos colegas.

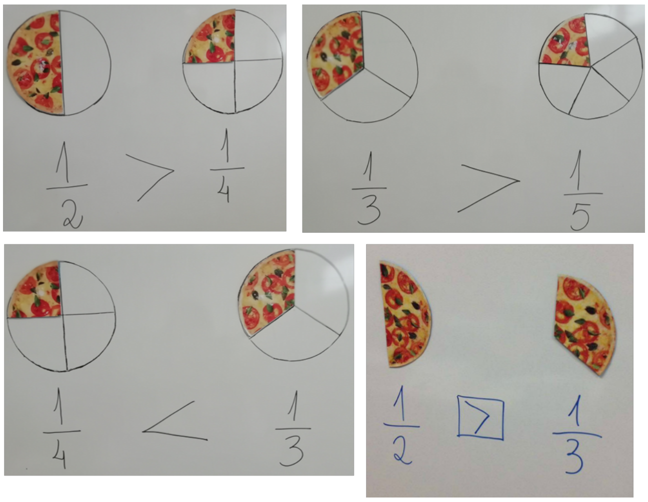


Figura 21: Chamam-se *frações unitárias* às frações de numerador 1. No contexto do 2.º ano de escolaridade, recomenda-se a utilização apenas de frações unitárias na comparação de frações com o mesmo numerador. Apresentam-se alguns registos no quadro.

7 O conceito de fração na reta numérica

O conceito de fração na reta numérica apresenta, em termos cognitivos, um grau de dificuldade acrescido para alunos do 2.º ano de escolaridade. Mesmo assim, algumas explorações elementares, alicerçadas em experiências concretas, podem ser implementadas com relativo sucesso neste ano de escolaridade e ter a sua continuidade nos anos seguintes. Vejam-se as Figuras 22 a 32.

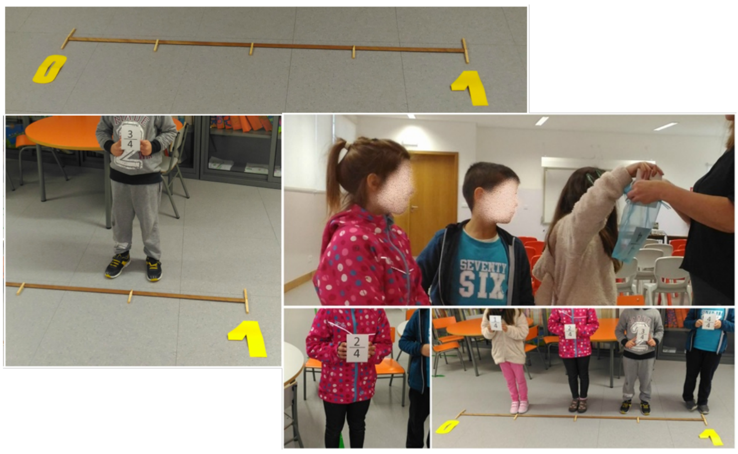


Figura 22: Nesta atividade, "Saltitanto na reta", cada aluno retira de um saco um cartão identificativo de uma fração e coloca-se na reta na posição correta. No exemplo que se apresenta, o segmento de reta entre 0 e 1 está dividido em quatro partes iguais e quatro alunos recebem cartões com as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{4}$ $(= 1)$.

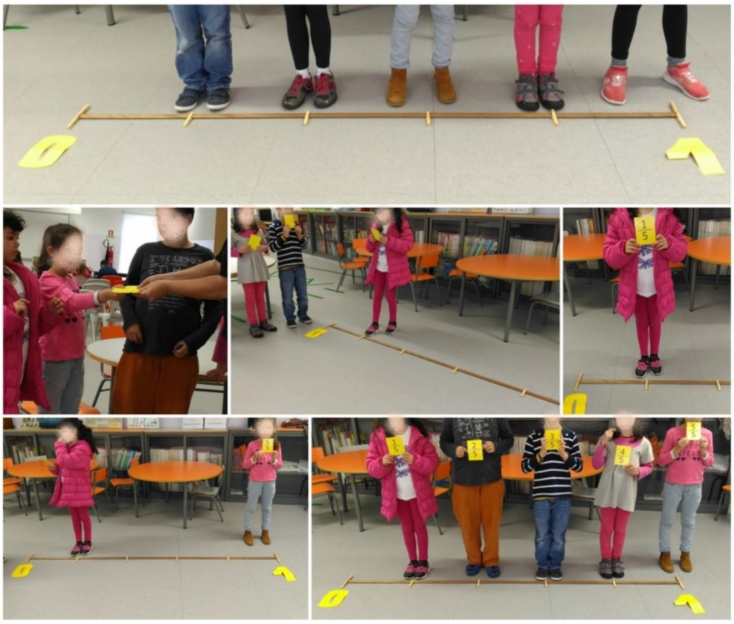


Figura 23: Outro exemplo da atividade "Saltitanto na reta": o segmento de reta entre 0 e 1 está dividido em cinco partes iguais e cinco alunos recebem cartões com as frações $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{5}$ $(= 1)$. Na sua vez, cada aluno retira de um saco um cartão identificativo de uma dessas frações e coloca-se na reta na posição correta. Em alternativa, os alunos podem literalmente dar saltos na reta marcada no chão. Por exemplo, o aluno que tirar o cartão com a fração $\frac{3}{5}$ posiciona-se no 0 e dá três saltos em frente dizendo em voz alta $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$!

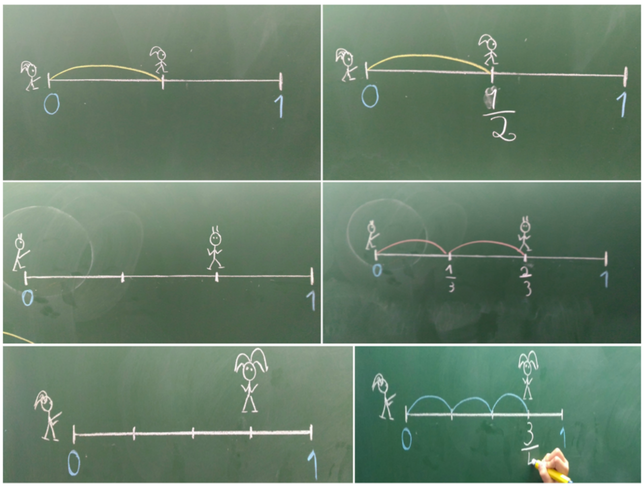


Figura 24: Exploração pictórica da atividade "Saltitanto na reta". O professor pode apresentar uma fração e pedir a posição correspondente no segmento de reta entre 0 e 1 ou vice-versa.

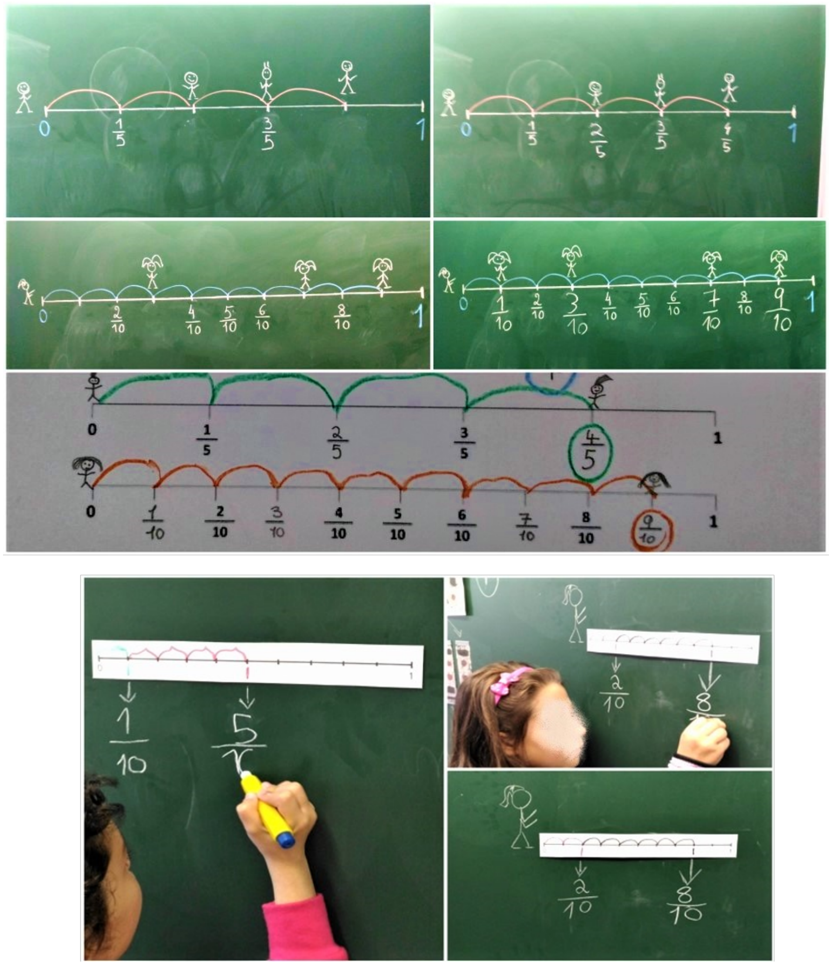


Figura 25: Nestes registos, o segmento de reta entre 0 e 1 está dividido em cinco e em dez partes iguais, sendo que o professor indica um determinado ponto nesse segmento e o aluno deve identificar a fração correspondente, marcando-a na reta.

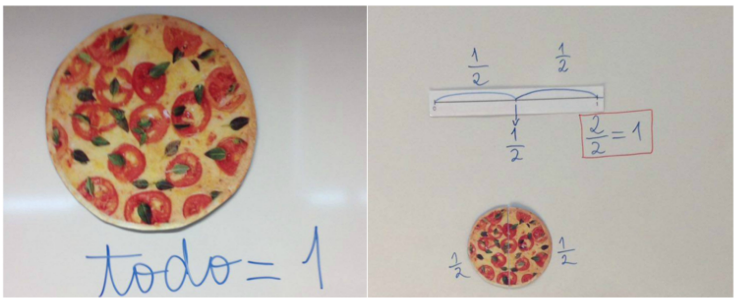


Figura 26: Associação entre o todo (unidade), em modelo circular e na reta. Do todo à metade. Neste caso concreto, tanto a piza como a reta foram divididas em duas partes iguais.

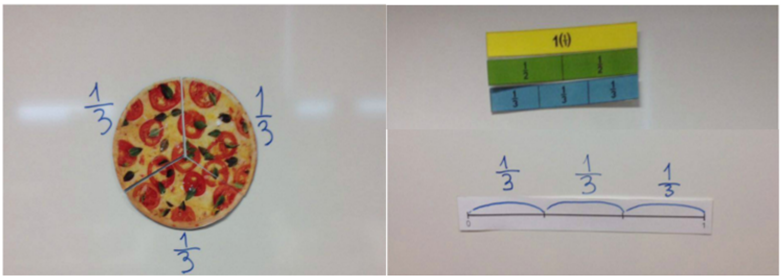


Figura 27: Associação entre o todo (unidade), em modelo circular, em modelo retangular e na reta. Do todo à terça parte. Tanto a piza como a reta foram divididas em três partes iguais.

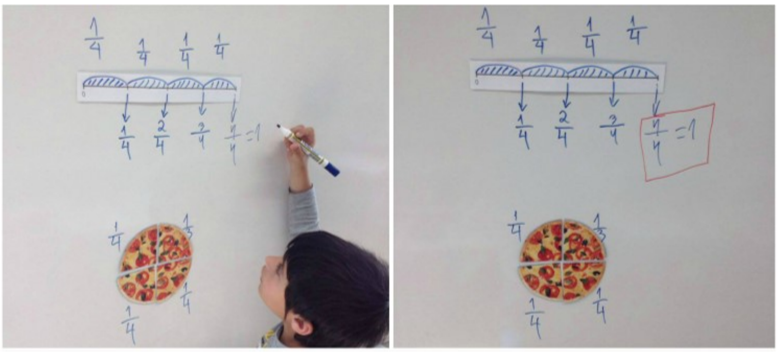


Figura 28: Associação entre o todo (unidade), em modelo circular e na reta. Do todo à quarta parte. Tanto a piza como a reta foram divididas em quatro partes iguais.

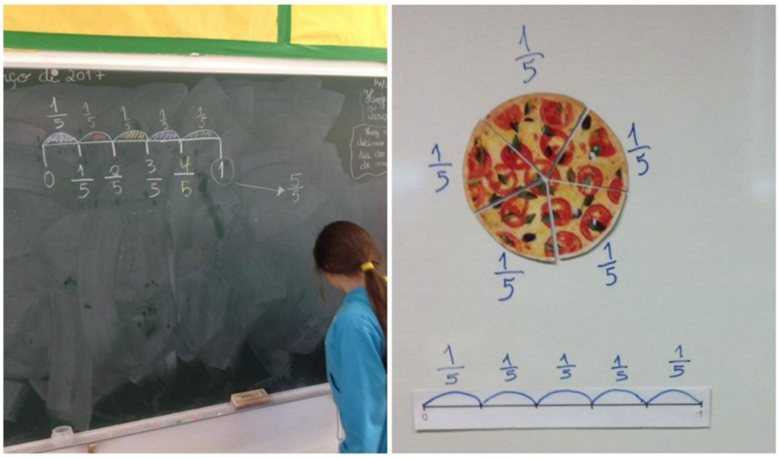


Figura 29: Associação entre o todo (unidade), em modelo circular e na reta. Do todo à quinta parte. Tanto a piza como a reta foram divididas em cinco partes iguais.

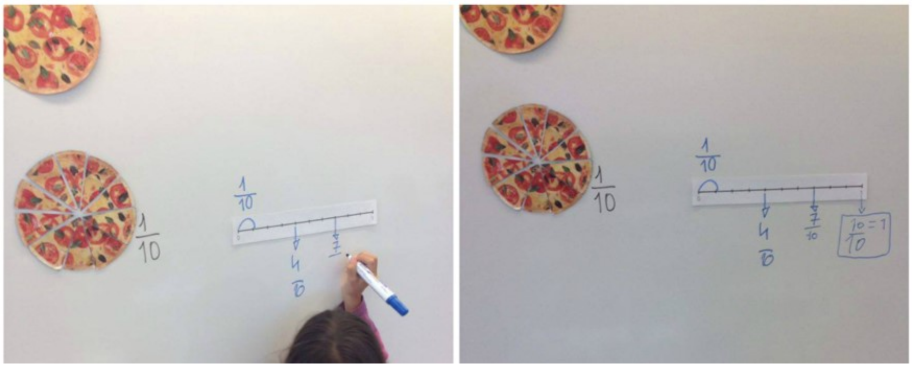


Figura 30: Associação entre o todo (unidade), em modelo circular e na reta. Do todo à décima parte. Tanto a piza como a reta foram divididas em dez partes iguais.

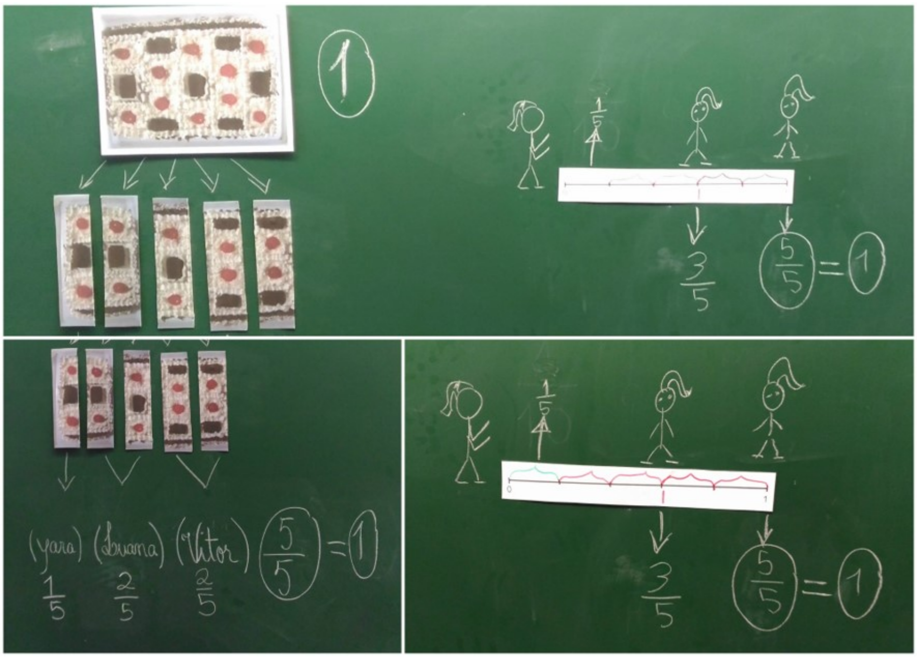


Figura 31: Neste registo, foi usada uma fotografia de um bolo que foi dividido em cinco partes iguais. Ao longo da atividade, o professor deve fomentar a prática da oralidade e a fundamentação das escolhas dos alunos, questionando-os acerca de aspetos importantes relacionados com a tarefa. No exemplo concreto, quem comeu mais bolo? A Yara que comeu $\frac{1}{5}$, a Luana que comeu $\frac{2}{5}$ ou o Vítor que comeu $\frac{2}{5}$ do bolo? Em seguida, procede-se à divisão do segmento de reta entre 0 e 1 em cinco partes iguais, de modo a reproduzir esquematicamente a situação explorada. Foi analisada a quantidade de bolo consumido até se chegar à totalidade do bolo ($\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{5}$).

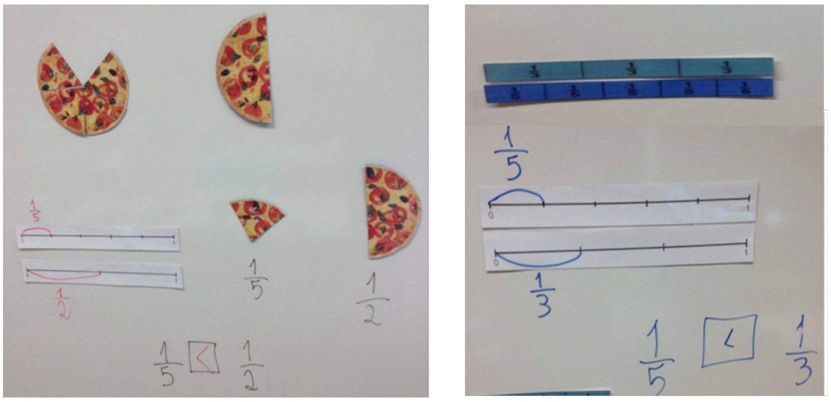


Figura 32: Atividade em que se pretende estabelecer relações de grandeza entre frações na reta numérica. À esquerda, partindo de um modelo circular, uma piza (já do conhecimento do aluno), estabeleceu-se um paralelismo com a comparação das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{5}$ na reta numérica. À direita, partindo de um modelo retangular estabeleceu-se um paralelismo com a comparação das frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$ na reta.

8 Fração de conjunto

Na exploração das frações de conjunto, o todo deixa de ser contínuo e passa a ser discreto, ou seja, passa a ser um conjunto composto por vários elementos. As frações de conjunto permitem aprofundar a relação entre o conceito de fração e a operação divisão. Na caminhada desenvolvida no 1.º Ciclo, o denominador das frações trabalhadas deve ser um divisor do número total de elementos que formam o todo. Por outras palavras, as divisões correspondentes têm resto zero. Vejam-se as Figuras 33 a 41.

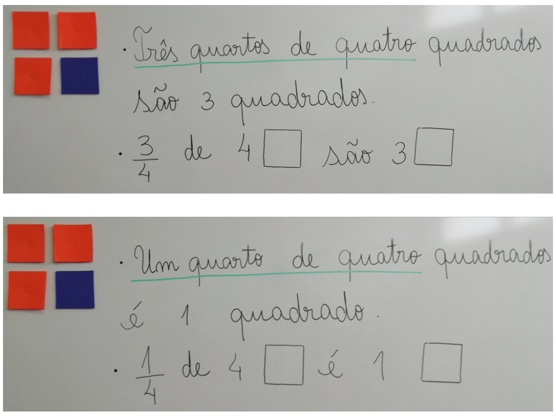


Figura 33: É importante começar por apresentar situações em que o denominador das frações coincida com o número total de elementos que formam o todo.

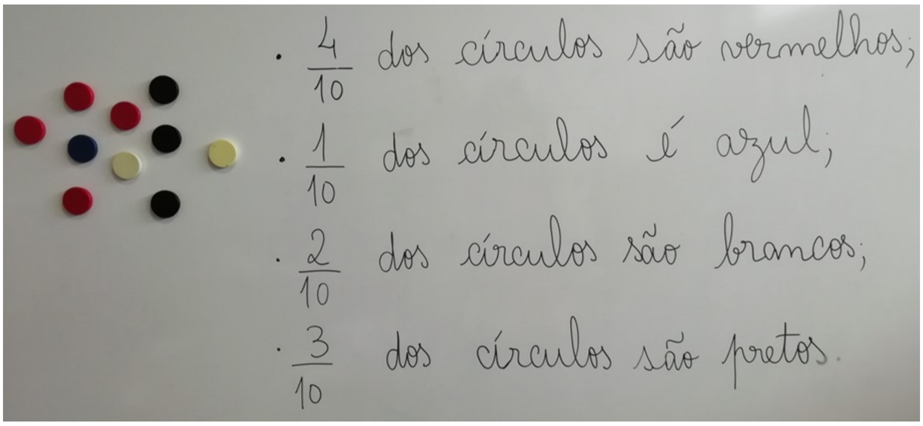


Figura 34: Exploração de frações de conjunto com base nas cores dos círculos que formam o todo. O denominador das frações coincide com o número total de elementos (10).

Figura 35: A tarefa "A lagarta das frações" é baseada na dinâmica "Cartão de identificação das frações", da autoria de Regina Silva, Prof DA da EBS da Graciosa, e de Marta Costa, Prof DA da EBS Mouzinho da Silveira. Esta tarefa foi desenvolvida em contexto de sala de aula, em turmas do 2.º ano de escolaridade, como rotina de trabalho com o objetivo de promover a consolidação das frações de conjunto. Esta representação de fração a partir de um contexto discreto, que corresponde a um conjunto finito de elementos, poderá apresentar um maior grau de complexidade para o aluno na identificação do todo e das partes. O cartão da esquerda apresenta-se como uma versão simplificada do cartão da direita. Foi pedido aos alunos para construírem a lagarta com plasticina e, posteriormente, para a desenharem num dos cartões e preencherem os dados desse cartão.

Figura 36: A tarefa “Saborear frações”, tal como a tarefa anterior, foi também desenvolvida em contexto de sala de aula como rotina de trabalho e com a mesma finalidade.

Figura 37: Sugestão de imagem para exploração, da autoria de Eduarda Correia. Podemos constatar que, dos cinco cavalos, apenas dois deles se encontram a pastar, ou seja, $\frac{2}{5}$ dos cavalos. Por conseguinte, $\frac{3}{5}$ não se encontram a pastar. Outras possibilidades de exploração poderão surgir como, por exemplo, um cavalo encontra-se a beber água ($\frac{1}{5}$) e quatro não ($\frac{4}{5}$).

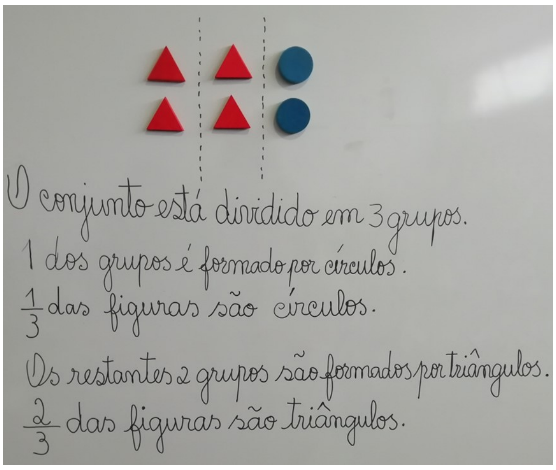


Figura 38: Neste exemplo, o denominador das frações (3) já não coincide com o número total de elementos que formam o todo (6). Contudo, os números não foram escolhidos ao acaso, pois 3 é divisor de 6 ou, por outras palavras, 6 é múltiplo de 3. O conjunto apresentado é formado por 6 figuras geométricas, existindo 3 subconjuntos com o mesmo número de elementos. No registo apresentam-se as frações associadas a cada um desses subconjuntos, a par com o que cada uma delas representa.

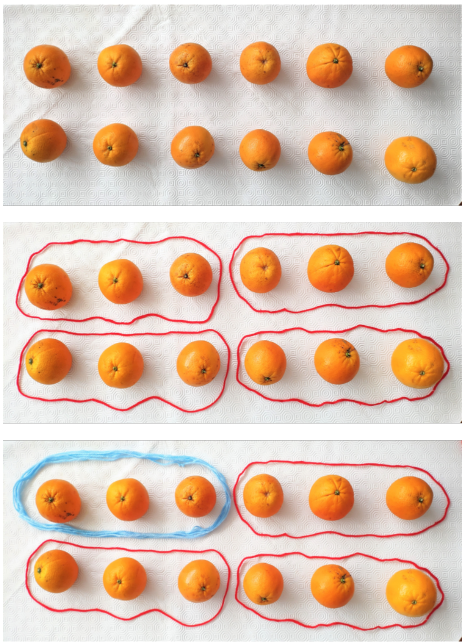


Figura 39: Exploração concreta, seguindo a abordagem CPA. Um conjunto de 12 laranjas é dividido em 4 subconjuntos de 3 laranjas cada. Ao destacar um subconjunto, associa-se a fração $\frac{1}{4}$, concluindo-se que $\frac{1}{4}$ de 12 laranjas são 3 laranjas.

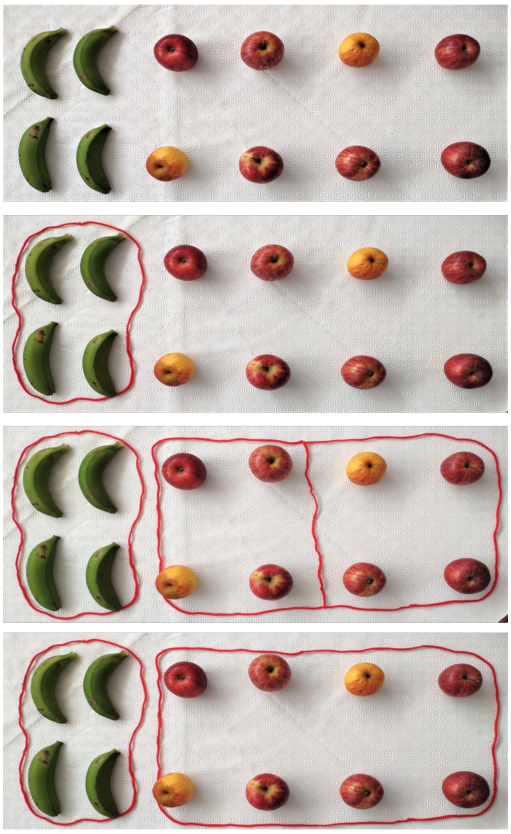


Figura 40: Exploração concreta a partir de um conjunto de frutas, com vista à descoberta da fração que representa o subconjunto das bananas, concluindo-se que $\frac{1}{3}$ de 12 frutas são 4 frutas, e da fração que representa o subconjunto das maçãs, concluindo-se que $\frac{2}{3}$ de 12 frutas são 8 frutas.

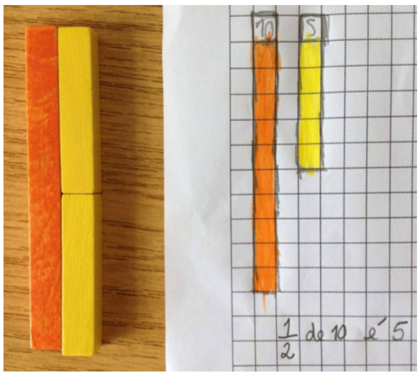


Figura 41: Exploração com as barras Cuisenaire. A barra laranja representa o todo (10 unidades), logo cada barra amarela representa metade dessa quantidade (5 unidades), pelo que $\frac{1}{2}$ de 10 é igual a 5.

Os temas das secções 7 e 8 podem ser introduzidos no 2.º ano de escolaridade, mas carecem de consolidação nos anos seguintes.

Referências

[1] Bruner, J. S. *The Process of Education*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1960.

[2] Bruner, J. S. *Para uma Teoria da Educação* (Trad. M. Vaz), Lisboa: Relógio D' Água Editores, 1966.

[3] Carreiro, C., Correia, E., Patrício, J., Santos, C. P., Teixeira, R. C. "A multiplicação e a divisão em imagens: explorações no 2.º ano de escolaridade", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 11, 5-32, 2018.

[4] Dienes, Z. *Building up Mathematics*, London: Hutchison Educational Limited, 1971.

[5] Furtado, A. R., Duarte, J., Medeiros, M. P., Faria, Z., Silva, L., Fonseca, M. H., Sousa, P., Teixeira, R. C. "Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 11, 33-63, 2018.

[6] Lima, A. M., Santos, C. P., Vaz, C. L., Teixeira, R. C. "A resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade: uma sequência de aprendizagem do modelo de barras", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 8, 23-82, 2017.

[7] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, Lisboa: MEC – Direção Geral de Educação, 2013.

[8] Ministry of Education of Singapore. *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus*, Singapore: Ministry of Education of Singapore, 2012. Obtido em novembro de 2018, de `http://www.dphu.org/uploads/attachements/books/books_130_0.pdf`

[9] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Frações (parte I)", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 5, 41–74, 2015.

[10] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Frações (parte II)", *Jornal das Primeiras Matemáticas*, 9, 35–56, 2017.

[11] Skemp, R. *Mathematics in the Primary School*, London: Routledge, 1989.

[12] Sousa, D. *How the brain learns Mathematics*, 2nd edition, Corwin, 2015.

[13] Yee, L. P., Hoe, L. N. (Eds.). *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition, Singapore: McGraw-Hill, 2009.