0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Jornal das Primeiras MATEMÁTICAS

Número 11
Dezembro 2018

aeme
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR

Ludus

Recursos didáticos promotores do sentido de número no 1.º Ciclo do Ensino Básico

Ana Rosa Furtado, João Duarte, Maria Paula Medeiros e Zélia Faria, Laudalina Silva e Maria Hortense Fonseca, Paula Sousa, Ricardo Cunha Teixeira

Equipa do Programa de Formação e Acompanhamento Pedagógico de Docentes da Educação Básica, EBI de Arrifes, EBS da Povoação, EBS de Santa Maria, NICA-UAc & FCT-UAc

ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *No contexto da implementação do Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", da Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores, e da Oficina "Matemática Passo a Passo: Estratégias de Superação de Dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", da Universidade dos Açores, os autores apresentam um leque de materiais idealizados e construídos com o objetivo de promover o sentido de número em crianças ao longo do 1.º Ciclo do Ensino Básico e analisam as potencialidades da implementação dos mesmos em contexto de sala de aula.*

Palavras-chave: Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação", Oficina "Matemática Passo a Passo: Estratégias de superação de dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", sentido de número, 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Introdução

Decorre desde o início do ano letivo de 2015/2016 a oficina de formação "Matemática Passo a Passo: Estratégias de Superação de Dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico", uma parceria entre a Universidade dos Açores e a Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores, no contexto do Projeto Prof DA do Programa "ProSucesso – Açores pela Educação".

A ação do Prof DA (professor qualificado na superação de dificuldades de aprendizagem) tem por base estudos provenientes das neurociências cognitivas, que fornecem pistas sobre a forma como o cérebro de uma criança aprende Matemática, e alguns casos de sucesso do ensino da Matemática no Mundo, como é o exemplo de Singapura, que nos apresenta centenas de pormenores de ordem científica e didática amplamente testados em vários países.

A abordagem concreto-pictórico-abstrato (abordagem CPA), que remonta aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner [1, 2], é uma das teorias edificadoras do currículo de Matemática de Singapura. Todos os temas devem ser introduzidos partindo do concreto. O aluno deve perceber que a Matemática pode ser usada para interagir com o meio que o rodeia e para resolver problemas da vida real. É importante recorrer a um leque diversificado de materiais, dos materiais manipuláveis estruturados aos não estruturados. Os exemplos pictóricos constituem representações de materiais concretos que ajudam os alunos a visualizarem conceitos matemáticos e a esquematizarem o seu raciocínio. Já no âmbito do abstrato, o trabalho formal com os símbolos permite mostrar aos alunos que existe uma maneira mais rápida e eficaz de representar um determinado conceito. O significado de cada símbolo deve estar firmemente enraizado em experiências com objetos reais.

Destaca-se também o trabalho do educador matemático húngaro Zoltán Dienes [3] relativo aos princípios da variabilidade matemática e percetiva que revelam que a aprendizagem de um conceito é facilitada quando se exploram múltiplas perspetivas e representações. Por sua vez, o psicólogo inglês Richard Skemp [8] alerta para a importância de uma aprendizagem conceptual, em detrimento de uma aprendizagem meramente procedimental, colocando o enfoque na importância do estabelecimento de conexões matemáticas para uma aprendizagem mais duradoura.

Ao longo deste artigo, apresentaremos um leque de materiais idealizados e construídos tendo por base os princípios orientadores elencados acima. Destacaremos as potencialidades da implementação destes materiais em contexto de sala de aula.

1 Exploração do dispositivo de algarismos móveis para números naturais

No contexto da exploração e escrita dos numerais para além da primeira dezena, recorremos a um caderno de argolas, com folhas cortadas ao meio de modo a formar dois grupos de folhas, um referente às unidades e o outro às dezenas. Cada grupo era composto por um algarismo em cada folha, desde o zero até ao nove. Com este caderno era possível representar todos os números naturais inferiores a 100. Por exemplo, no caso dos números compreendidos entre a primeira dezena e a segunda dezena, mantinha-se o algarismo "1" da ordem das dezenas e, em relação à ordem das unidades, sobrepunham-se à folha do zero as folhas dos diferentes algarismos, de modo a obter os números entre 11 e 19 (Figura 1).

No entanto, com este dispositivo, os alunos não conseguiam de um modo imediato e eficaz verificar que o "1" das dezenas representava 10 unidades. Esta importante preocupação didática conduziu à criação do dispositivo que se apresenta de seguida. Analisaremos, também, as suas potencialidades.

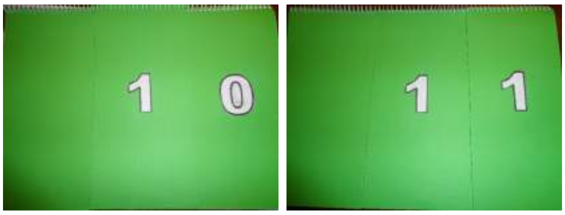

Figura 1: Caderno de argolas para representação dos números naturais inferiores a 100.

1.1 Valor posicional

Aproveitando a ideia da sobreposição, surgiu então o dispositivo de algarismos móveis. Com este dispositivo, também conseguimos sobrepor o cartão com o algarismo das unidades ao cartão com o algarismo das dezenas, mas vamos mais longe: é possível deslocar o cartão com o algarismo das dezenas para que o aluno observe, por exemplo, que "11 = 10 + 1". Esta dinâmica favorece a compreensão de que o todo "11" pode ser decomposto em duas partes, "10" e "1". Assim, apesar de o número "11" ser composto por dois algarismos iguais, esses algarismos representam quantidades diferentes porque pertencem a ordens diferentes do sistema de numeração decimal. De notar que este trabalho com números para além da primeira dezena, desenvolvido no 1.º ano, deve ser antecedido pela exploração das decomposições, adições e subtrações dentro da primeira dezena, bem como pelo ato de compor uma dezena. Para mais pormenores, veja-se [6] e [7].

A compreensão do conceito de valor posicional, que se pretende alcançar com a exploração deste dispositivo, foi potenciada com a colocação do símbolo "+" à direita do numeral nos cartões das dezenas. Isso permite decompor o todo em duas partes, como se exemplificou, "11 = 10 + 1". Por este motivo, foi colocada uma faixa de madeira do lado direito do dispositivo para ocultar o símbolo "+" dos cartões das dezenas (Figura 2).

Figura 2: Exemplificação do dispositivo de algarismos móveis para duas ordens.

Ao chegarmos à centena construímos um segundo dispositivo, semelhante ao primeiro, mas um pouco maior de modo a ser possível representar qualquer número com três algarismos, mantendo a possibilidade de o decompor em três ordens e verificar o valor de cada algarismo em unidades, através da deslocação do cartão com o algarismo das centenas e do cartão com o algarismo das dezenas (Figura 3).

Figura 3: Exemplificação do dispositivo de algarismos móveis para três ordens.

De notar que podemos retirar qualquer um dos três cartões e verificar o valor do algarismo correspondente em unidades. Também podemos constatar que um algarismo, quando deixa de ocupar a sua posição e é colocado na ordem imediatamente superior, passa a representar uma quantidade dez vezes superior à anterior – é a ideia de empurrar todos os algarismos uma posição para a esquerda, da qual resulta a regra (explorada no 3.º ano) que, para multiplicar qualquer número por dez, basta acrescentar um zero à sua direita (Figura 4).

Figura 4: O valor de cada algarismo depende da ordem que este ocupa.

A mesma dinâmica permite explicar que, para multiplicar qualquer número por cem, basta acrescentar dois zeros à sua direita.

1.2 Leituras mistas

Ao utilizarmos este recurso didático na exploração do sistema de numeração decimal fomos descobrindo outras potencialidades, como é o caso das leituras mistas. Por exemplo, com a representação do número 734, podemos observar que este número tem 7 centenas e 34 unidades (Figura 5) ou 73 dezenas e 4 unidades (Figura 6). De notar que as leituras mistas desempenham um papel relevante no âmbito do desenvolvimento do cálculo mental.

Figura 5: Leitura mista: o número 734 tem 7 centenas e 34 unidades.

Figura 6: Leitura mista: o número 734 tem 73 dezenas e 4 unidades.

1.3 Decomposições, adições e subtrações no contexto das ordens numéricas

Através da decomposição e da composição verificamos que podemos trabalhar a adição, ou seja, quando o número está decomposto temos as partes, que designamos por parcelas. Quando inclinamos o dispositivo vamos compor o número, ou seja, vamos juntar as parcelas (partes) de modo a obtermos um todo, ao qual chamamos de soma ou total (Figura 7).

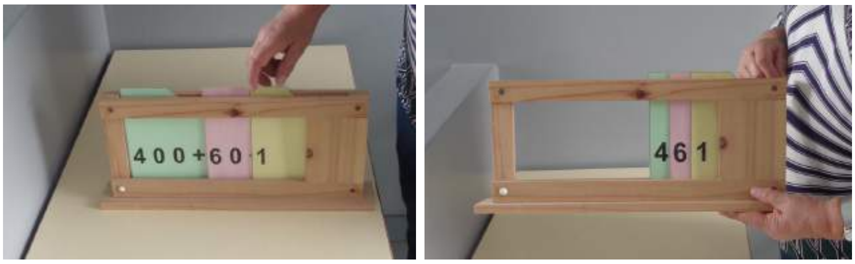

Figura 7: Decompor e adicionar.

Sendo a subtração a operação inversa da adição, partimos de um número (todo), designado por aditivo, retiramos uma parte (subtrativo) e obtemos a outra parte denominada de resto ou diferença (Figura 8).

Figura 8: Subtrair retirando o cartão representativo de uma das ordens (neste caso, da ordem das unidades).

Na linha dos dispositivos anteriores, construímos um dispositivo de algarismos móveis com a possibilidade de representar números inteiros até às unidades de milhar (Figura 8).

As potencialidades de exploração do dispositivo de algarismos móveis para números naturais são exemplificadas em `https://youtu.be/BZJDkoe7Un8`.

2 Exploração do dispositivo de algarismos móveis para dízimas

Inspirado nos diferentes dispositivos de algarismos móveis para representar números naturais até às unidades de milhar foi construído um dispositivo para a representação de números na forma de dízima, efetuando a sua decomposição/composição tanto na parte inteira como na parte não inteira (ou parte decimal), através de um separador que desempenha o papel da vírgula (Figura 9).

Figura 9: Dispositivo de algarismos móveis para dízimas.

2.1 Decomposição/Composição

Considerando a dízima representada na Figura 9 podemos decompor a parte inteira, a parte decimal ou ambas. Assim, a parte inteira (421) pode ser decomposta em 400 unidades, mais 20 unidades e mais 1 unidade (Figura 10).

Figura 10: Decomposição da parte inteira: $421 = 400 + 20 + 1$.

Podemos, também, manter a parte inteira composta e decompor a parte decimal (0,738) em 7 décimas, mais 3 centésimas e mais 8 milésimas (Figura 11).

Figura 11: Decomposição da parte decimal: $0,738 = 0,7 + 0,03 + 0,008$.

Este dispositivo permite, ainda, a decomposição das duas partes em simultâneo, parte inteira e parte decimal (Figura 12).

Figura 12: Decomposição em simultâneo da parte inteira e da parte decimal.

2.2 Leituras

Com este dispositivo podemos também efetuar diferentes tipos de leituras, como a leitura por ordens, várias leituras mistas e a leitura corrida (Figuras 13 e 14).

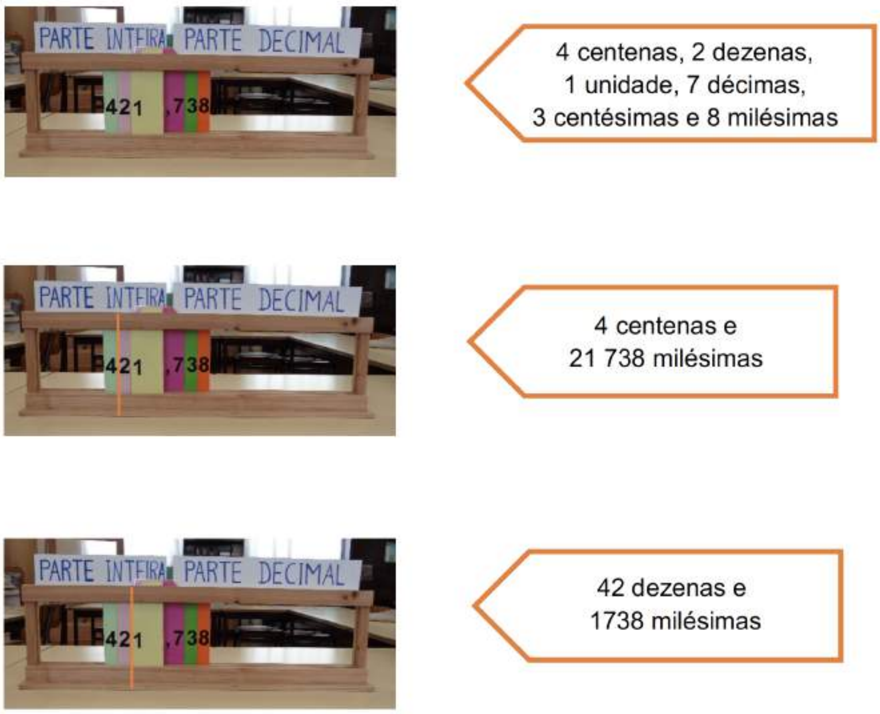

Figura 13: Leituras de dízimas com o dispositivo de algarismos móveis.

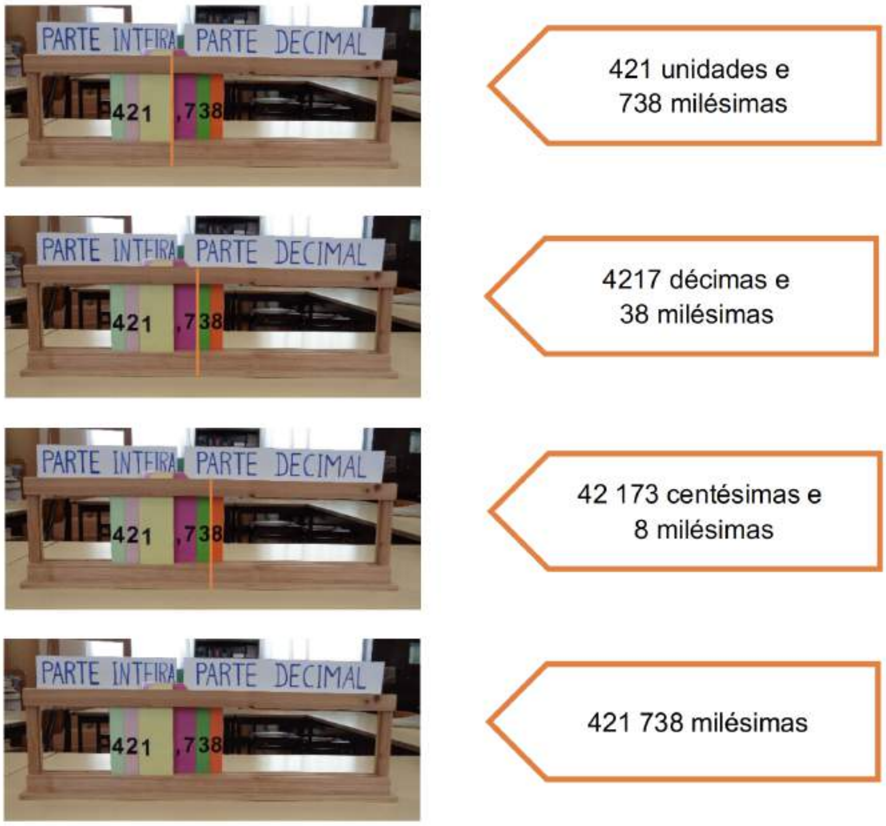

Figura 14: Leituras de dízimas com o dispositivo de algarismos móveis.

2.3 Potencialidades dos cartões $0,0$, $0,00$ e $0,000$

Ao colocarmos, por exemplo, o cartão que representa 5 unidades no dispositivo, podemos conjugá-lo com os cartões $0,0$, $0,00$ e $0,000$ para potenciar a compreensão de que 5 unidades são 50 décimas, ou 500 centésimas ou 5000 milésimas (Figura 15).

Figura 15: 5 unidades são 50 décimas, ou 500 centésimas ou 5000 milésimas.

2.4 Decomposições, adições e subtrações no contexto das ordens numéricas

Através da decomposição e da composição verificamos que podemos trabalhar a adição. Quando o número está decomposto temos as partes, que designamos por parcelas. Quando inclinamos o dispositivo vamos compor o número, ou seja, vamos juntar as parcelas (partes) de modo a obtermos um todo, designado por soma ou total (Figura 16).

Figura 16: Exemplificação de uma adição partindo de uma decomposição do número $421,738$.

Sendo a subtração a operação inversa da adição, partimos de um número (todo), designado por aditivo, retiramos uma parte (subtrativo) e obtemos a outra parte denominada de resto ou diferença, neste caso, $401,738$ (Figura 17).

Figura 17: Subtrair retirando o cartão representativo de uma das ordens (neste caso, da ordem das dezenas).

As potencialidades de exploração do dispositivo de algarismos móveis para dízimas são exemplificadas em `https://youtu.be/AFBbC0ViLc4`.

3 As frações no dispositivo de algarismos móveis

3.1 O conceito de fração

O trabalho com o dispositivo de algarismos móveis é a garantia de uma descoberta permanente. O dispositivo original foi construído para trabalhar com números naturais, explicitando o valor posicional dos diferentes algarismos. No entanto, pensando no retângulo não quadrado, observado no dispositivo, como o todo (a unidade), foram elaborados cartões para explorar o conceito de fração. Cada cartão apresenta duas partes distintas: uma inserida no dispositivo, que representa o todo (a unidade), e a outra exterior, em que podemos escrever a fração. Utilizou-se o dispositivo para duas ordens (Figura 18).

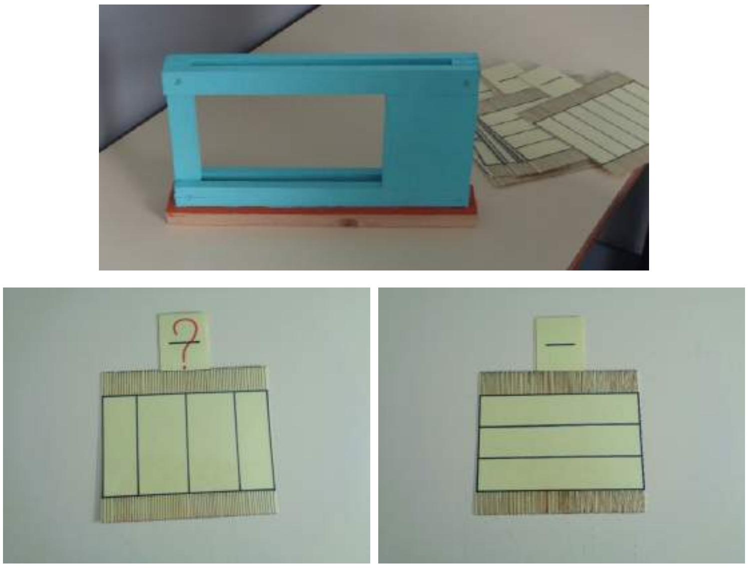

Figura 18: Cartões para explorar o conceito de fração com o dispositivo de algarismos móveis.

Numa primeira abordagem, devemos também apresentar cartões em que o todo está dividido em partes diferentes, com um ponto de interrogação no local da escrita da fração, de modo a que os alunos possam concluir que só faz sentido falar em frações quando o todo está divido em partes iguais.

3.2 Escrita e representação de frações

Quando o todo está dividido em partes iguais, é possível fazer dois tipos de exploração.

- Apresentar, por exemplo, uma parte sombreada de três partes iguais em que o todo está dividido e pedir para o aluno escrever a fração que a representa $\left(\frac{1}{3}\right)$. Veja-se a Figura 19.

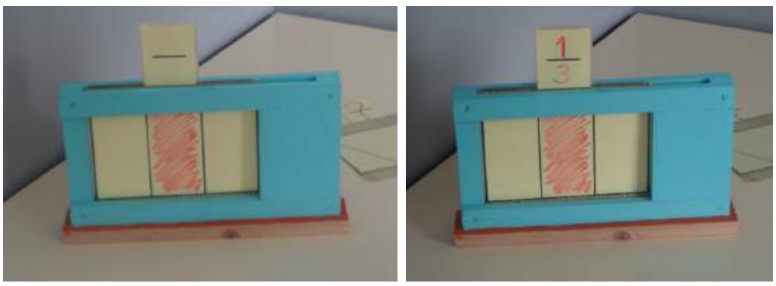

Figura 19: Perante um modelo representativo de uma fração, o aluno identifica e escreve essa fração.

- Apresentar, por exemplo, a fração $\frac{2}{5}$ e solicitar que o aluno pinte no cartão, que representa o todo dividido em 5 partes iguais, o número necessário de partes correspondente a essa fração (Figura 20).

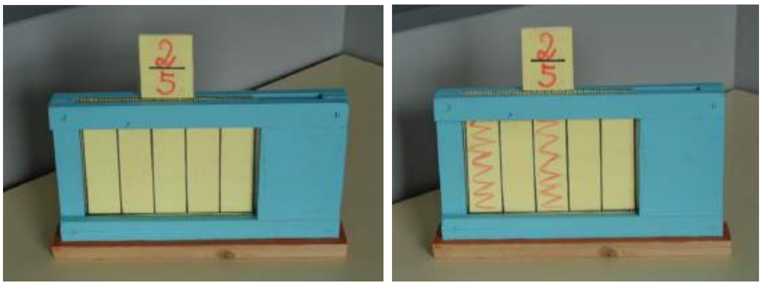

Figura 20: Perante uma fração, o aluno representa-a sombreando as partes necessárias do todo, com recurso a um modelo adequado.

3.3 Frações equivalentes

Na exploração de alguns cartões também podemos abordar as frações equivalentes. Por exemplo, ao apresentar um cartão com o todo dividido em oito partes iguais, encontrando-se quatro destas partes sombreadas, podemos escrever as frações $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$, porque estas três frações correspondem à mesma porção sombreada do todo, por isso são frações equivalentes. O que distingue cada uma das frações é apenas o número de partes iguais em que o todo está dividido (Figura 21).

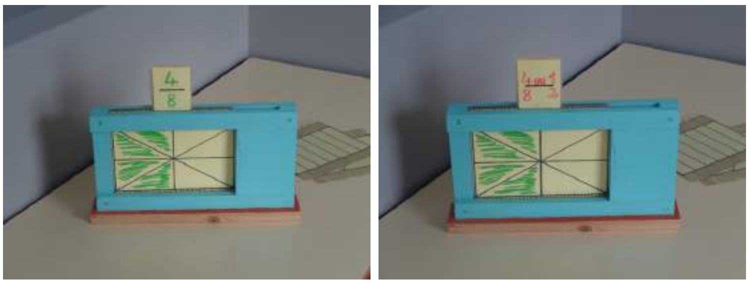

Figura 21: Explorando frações equivalentes.

As potencialidades de exploração das frações com o dispositivo de algarismos móveis são exemplificadas em `https://youtu.be/QyyLjsEhHHA`.

4 O estendal das frações

No seguimento da construção de dispositivos para a representação de números racionais não negativos sob a forma de fração, inspirado num modelo semelhante partilhado por Ricardo Oliveira, Prof DA da EBS Tomás de Borba no ano letivo de 2016/2017, da autoria da professora titular Ana Cristina Silva da EB1/JI de São Bartolomeu, surgiu este dispositivo, ao qual demos o nome de "estendal das frações", uma vez que podemos "estender" e organizar as frações como numa reta numérica (Figura 22).

Figura 22: O estendal das frações.

Este recurso permite: explorar o conceito de fração; explorar frações próprias e frações que representam a unidade; identificar frações equivalentes; comparar frações.

4.1 Explorar o conceito de fração

Para aplicar o conceito de fração, devemos considerar o todo (ou seja, a unidade) dividido em partes iguais. Nestas condições, o denominador representa o número de partes iguais em que o todo foi dividido e o numerador o número dessas partes que se pretende considerar. O professor deverá selecionar um modelo (uma tira que representa o segmento de reta entre 0 e 1, dividido num determinado número de segmentos iguais) e pedir ao aluno para identificar o número de partes em que o todo foi dividido (Figura 23).

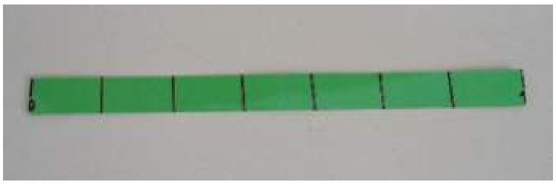

Figura 23: Tira que representa o segmento de reta entre 0 e 1, dividido em 7 partes iguais.

Depois de colocar a tira no estendal, o professor seleciona um ponto do segmento de reta e pede ao aluno que identifique a fração correspondente. O aluno deverá afixar o cartão com essa fração junto à posição escolhida (Figura 24).

Inversamente, o professor pode apresentar um cartão com uma fração (com o mesmo denominador) e solicitar ao aluno para afixar o cartão no ponto correspondente da tira/segmento (Figura 25).

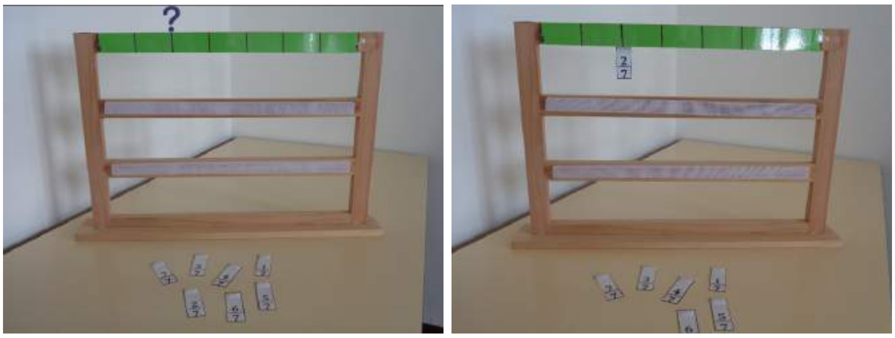

Figura 24: Identificação da fração correspondente à posição selecionada na tira que representa o segmento de reta entre 0 e 1.

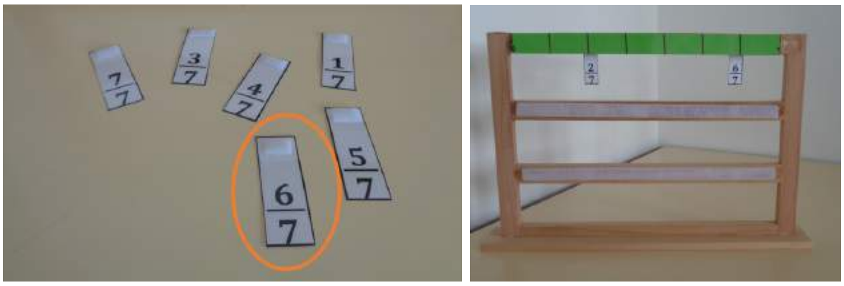

Figura 25: Identificação da posição na tira que representa o segmento de reta entre 0 e 1 correspondente à fração selecionada.

4.2 Explorar frações próprias e frações que representam a unidade

Sugere-se a seguinte exploração para proporcionar ao aluno a descoberta e construção dos conceitos de fração própria e de fração que representa a unidade. O professor pode começar por apresentar ao aluno um cartão com uma fração. Este lê a fração apresentada pelo professor; em seguida, seleciona a tira correspondente (a tira que estiver dividida num número de partes iguais que corresponda ao denominador da fração), afixa a tira no estendal e coloca o cartão com a fração no ponto do segmento de reta correspondente (Figura 26).

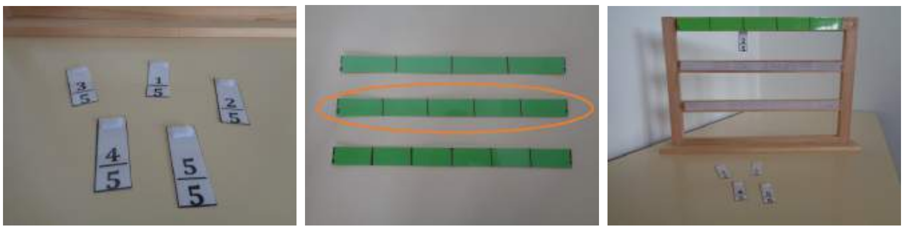

Figura 26: Explorar frações próprias e frações que representam a unidade.

Em seguida, o aluno vai tirando, de forma aleatória, os restantes cartões com frações com o mesmo denominador, mas numeradores diferentes (por exemplo, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{5}{5}$), faz a leitura das frações e coloca os cartões na tira, nas posições correspondentes. Esgotados todos os cartões, são identificadas as frações cujo numerador é menor do que o denominador ($\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$), ou seja, as frações próprias, e a fração cujo numerador é igual ao denominador ($\frac{5}{5}$), ou seja, a fração que representa 1 (a unidade). Veja-se a Figura 27.

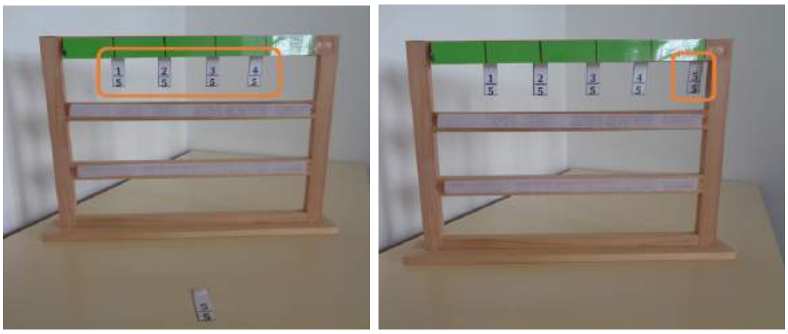

Figura 27: Explorar frações próprias e frações que representam a unidade.

No seguimento da descoberta e construção dos conceitos de fração própria e de fração que representa a unidade, o professor coloca uma nova tira no estendal (deve escolher uma tira dividida num número diferente de partes iguais), seleciona um ponto do segmento de reta e pede ao aluno para afixar nesse ponto o cartão com a fração que lhe corresponda, fazendo a leitura da mesma. Em seguida, o aluno vai tirando, de forma aleatória, os restantes cartões com frações com o mesmo denominador, mas numeradores diferentes, faz a leitura das frações e coloca os cartões na tira, nas posições correspondentes. É solicitado novamente ao aluno para identificar as frações próprias e a fração que representa a unidade.

4.3 Identificar frações equivalentes

Para proporcionar ao aluno a identificação de frações equivalentes, o professor poderá afixar no dispositivo "estendal das frações", por exemplo, as tiras divididas em duas, quatro e oito partes iguais. De seguida, pede ao aluno que afixe nos pontos médios dos três segmentos de reta os cartões com as frações correspondentes, neste caso, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$. Desta forma, o aluno é conduzido à constatação de que os pontos se encontram alinhados, isto é, se deslocar as diferentes tiras e as justapor verificará que os pontos assinalados são coincidentes, concluindo que as três frações representam a mesma quantidade (a mesma porção do todo), sendo portanto frações equivalentes (Figura 28).

O professor poderá colocar à disposição dos alunos outros conjuntos de tiras para que, por manipulação, este possa descobrir mais frações equivalentes. Por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ ou $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{6}$ e $\frac{5}{10}$.

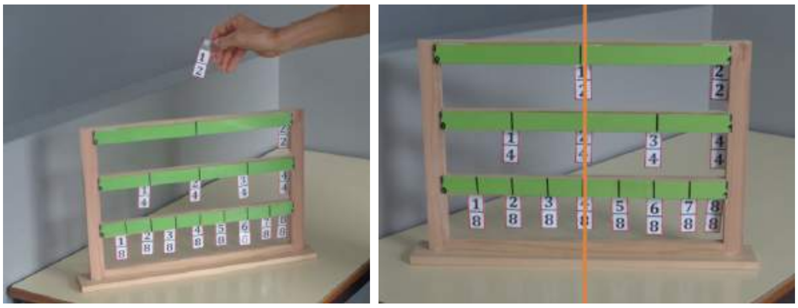

Figura 28: Identificar frações equivalentes.

4.4 Comparar frações

Este dispositivo permite ainda explorar a comparação de frações de uma forma apelativa e concreta. O professor deve começar por colocar uma questão, tal como: *O João comeu* $\frac{3}{6}$ *de um chocolate e a sua irmã comeu* $\frac{2}{5}$ *de outro chocolate igual. Quem comeu uma maior porção de chocolate?*

O aluno afixa no estendal as duas tiras que lhe permitem assinalar cada uma das frações apresentadas (uma tira dividida em 6 partes iguais e outra dividida em 5 partes iguais) e, em seguida, pode confirmar visualmente que $\frac{3}{6}$ é maior do que $\frac{2}{5}$, logo o João comeu uma maior porção de chocolate (Figura 29).

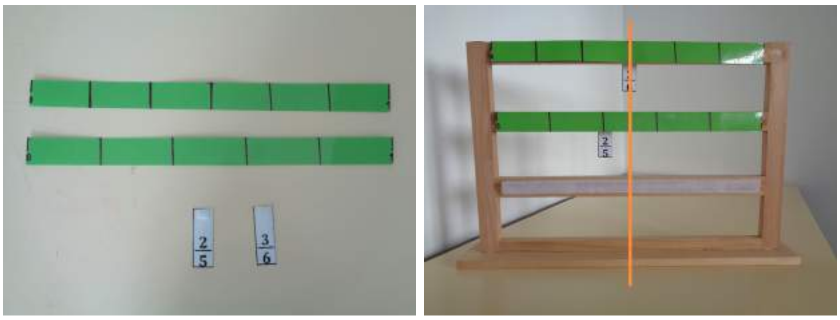

Figura 29: Comparar frações.

Este dispositivo construído em madeira possibilita uma abordagem concreta que proporciona uma melhor compreensão da representação de frações na reta numérica. As potencialidades de exploração do "estendal das frações" são exemplificadas em `https://youtu.be/1QItcimFKKE`.

5 O Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão

O Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão permite efetuar multiplicações e divisões por manipulação de objetos, relacionando estas duas operações (Figura 30).

Figura 30: Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão.

5.1 Sentido aditivo da multiplicação

Começamos por exemplificar uma situação problemática envolvendo o sentido aditivo da multiplicação: "A dona Amélia tem 5 cestas com 4 pães cada uma. Quantos pães tem a dona Amélia?". Esta situação problemática envolve 5 grupos de 4 elementos cada e a descoberta do número total de elementos ($5 \times 4 = 4+4+4+4+4 = 20$). Como a multiplicação é uma adição sucessiva de parcelas iguais, é importante o aluno perceber desde as primeiras explorações que os grupos (parcelas) devem ter todos o mesmo número de elementos. No decorrer da abordagem de situações concretas envolvendo a multiplicação é também muito importante que as crianças se apercebam que, na escrita da expressão matemática, o fator da esquerda indica o número de grupos (número de parcelas) e o fator da direita indica o número de elementos de cada grupo (o valor de cada parcela). Numa situação problemática envolvendo a multiplicação, o movimento faz-se das partes (iguais) para o todo. Assim, o aluno coloca 4 peças (podem ser berlindes ou tampas de garrafas, que representam os pães da dona Amélia) em cada um de 5 recipientes pequenos (que representam os grupos, ou seja, as cestas). Veja-se a Figura 31.

Figura 31: O aluno coloca 4 peças em cada um de 5 recipientes pequenos.

Em seguida, deve retirar as peças de cada um desses recipientes pequenos e colocá-las no recipiente grande (que representa o todo), contando de 4 em 4 (4, 8, 12, 16, 20) e concluindo que existem 20 peças, ou seja, que a dona Amélia tem 20 pães (Figura 32).

Figura 32: O aluno retira as peças de cada um dos recipientes pequenos e coloca-as no recipiente grande, contando de 4 em 4 (4, 8, 12, 16, 20) e concluindo que existem 20 peças.

5.2 Divisão por partilha equitativa

Para explorar o sentido da divisão por partilha equitativa o professor pode, por exemplo, pedir ao aluno que reparta ou distribua igualmente 12 chocolates por 3 amigos (ou seja, por 3 grupos). O aluno com o seu todo (12 chocolates) vai repartir equitativamente a quantidade de chocolates por 3 grupos e verificar (usando o tabuleiro) que cada grupo ficará com 4 chocolates ($12 : 3 = 4$).

Conhece-se o número total de elementos (12 chocolates) e o número de grupos (3 grupos) e pretende-se descobrir o número de elementos de cada grupo. Na manipulação do tabuleiro da multiplicação e da divisão, o aluno deve distribuir, *uma a uma*, as 12 peças (colocadas previamente no recipiente grande que representa o todo) pelos 3 recipientes pequenos que representam os 3 grupos (as peças podem ser chocolates, mas também podem ser simplesmente berlindes ou tampas de garrafas). Veja-se a Figura 33.

Figura 33: O aluno deve distribuir, uma a uma, as 12 peças (colocadas previamente no recipiente grande que representa o todo) pelos 3 recipientes pequenos que representam os 3 grupos, ficando com 4 peças em cada grupo.

Note-se que o movimento se processa, agora, do todo para as partes. No final, o aluno constata que cada recipiente pequeno tem 4 peças. As expressões matemáticas envolvidas são $12 : 3 = 4$ e $3 \times 4 = 12$. Há claras vantagens na exploração da expressão matemática para a multiplicação. De facto, se o aluno se recordar das tabuadas do 3 ou do 4 poderá associar esse conhecimento prévio a esta situação problemática. Além disso, a situação concreta fica perfeitamente retratada pela expressão $3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$.

5.3 Divisão por agrupamento

Para explorar o sentido da divisão por agrupamento ou divisão para medir, o professor pode pedir ao aluno, por exemplo, para descobrir quantos grupos de 3 chocolates consegue fazer com 15 chocolates, ou seja, quantas vezes o 3 cabe no 15. Nesta exploração, o aluno agrupa os chocolates de 3 em 3 e verifica que pode fazer 5 grupos $(15 : 3 = 5)$.

Conhece-se o número total de elementos (15 chocolates) e o número de elementos de cada grupo (o objetivo é fazer grupos de 3 chocolates) e pretende-se descobrir o número de grupos. Na manipulação do tabuleiro da multiplicação e da divisão, os recipientes pequenos que representam os grupos devem estar empilhados ao lado do tabuleiro; o aluno coloca as 15 peças no recipiente maior que representa o todo (as peças podem ser chocolates, mas também podem ser simplesmente berlindes ou tampas de garrafas); em seguida, o aluno retira um recipiente pequeno e coloca 3 peças nesse recipiente; continua a retirar recipientes pequenos da pilha e a colocar 3 peças em cada um, até se esgotarem as peças. Note-se que o movimento se processa do todo para as partes (Figura 34).

Figura 34: O aluno coloca as 15 peças no recipiente maior que representa o todo. Em seguida, retira um recipiente pequeno e coloca 3 peças nesse recipiente; continua a retirar recipientes pequenos da pilha e a colocar 3 peças em cada um, até se esgotarem as peças. Por fim, verifica que utilizou 5 recipientes pequenos, ou seja, que conseguiu formar 5 grupos de 3 peças cada.

No final, o aluno constata que conseguiu colocar 3 peças em 5 recipientes. As expressões matemáticas envolvidas são $15 : 3 = 5$ e $5 \times 3 = 15$. Há vantagens na exploração da expressão matemática para a multiplicação. A situação concreta fica perfeitamente retratada pela expressão $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15$.

Este dispositivo permite aplicar a abordagem CPA de modo a relacionar a divisão com a multiplicação, interligando o sentido aditivo da multiplicação com os dois sentidos da divisão, partilha equitativa e agrupamento.

5.4 Explorações adicionais

Em paralelo com a exploração do Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão, o professor pode recorrer, ainda, ao Triângulo da Multiplicação e da Divisão, registando os factos básicos destas duas operações, o que ajuda na memorização das tabuadas e na consolidação da relação entre a multiplicação e a divisão como operações inversas uma da outra (Figura 35).

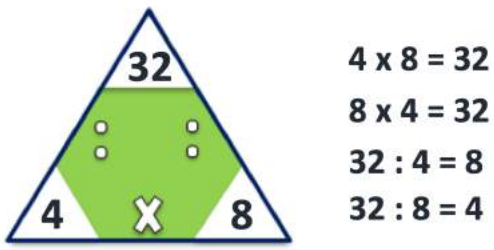

Figura 35: Explorar o Triângulo da Multiplicação e da Divisão.

Para finalizar, é importante referir ainda que, para além das divisões exatas, este material permite também explorar divisões inteiras com divisores até 10 e resto diferente de zero. Na Figura 36, exemplificamos uma situação em que se pretende saber quantos grupos de 5 peças se pode fazer com 17 peças.

O aluno coloca as 17 peças no recipiente maior que representa o todo; em seguida, retira um recipiente pequeno e coloca 5 peças nesse recipiente; continua a retirar recipientes pequenos da pilha e a colocar 5 peças em cada um, até não ter peças suficientes para fazer um novo grupo.

Note-se que o movimento se processa do todo para as partes. No final, o aluno constata que conseguiu fazer 3 grupos e que restaram 2 peças.

Assim, 17 a dividir por 5 dá 3 e resto 2 ($17 : 5 = 3$ R 2) porque 3 grupos de 5 elementos mais 2 elementos que restam são 17 elementos ($3 \times 5 + 2 = 17$).

As potencialidades de exploração do Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão são exemplificadas em `https://youtu.be/UFGrdZoSGUM`.

Figura 36: Divisão inteira com resto diferente de zero: exemplificação de uma situação em que se pretende saber quantos grupos de 5 peças se pode fazer com 17 peças.

Os recursos apresentados até esta secção são da autoria de Ana Rosa Furtado (Equipa do Programa de Formação e Acompanhamento Pedagógico de Docentes da Educação Básica), João Duarte, Maria Paula Medeiros e Zélia Faria (Equipa de Prof DA da EBI de Arrifes). O recurso apresentado na próxima secção é da autoria de Laudalina Silva e Maria Hortense Fonseca (Equipa de Prof DA da EBS da Povoação) e Paula Sousa (Prof DA da EBS de Santa Maria).

6 O Comboio da Multiplicação e da Divisão

Este recurso segue a mesma dinâmica do Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão, pois permite explorar o sentido aditivo da multiplicação e os dois sentidos da divisão, partilha equitativa e agrupamento. Estimula, portanto, uma compreensão profunda da relação entre a multiplicação e a divisão como operações inversas uma da outra.

Na abordagem dos sentidos da multiplicação e da divisão, a conceção deste recurso surgiu no sentido de: diversificar e reforçar a abordagem CPA, explorando os conteúdos em contexto lúdico; cativar o interesse dos alunos com défice de atenção e concentração; fomentar o gosto pela aprendizagem e pela área da Matemática, com vista ao alcance progressivo do sucesso escolar.

Destacam-se os seguintes aspetos positivos decorrentes da implementação deste recurso em ambiente de sala de aula: foi notório o entusiasmo e interesse dos alunos no manuseamento do comboio e na exploração dos sentidos das duas operações; as aulas tornaram-se mais apelativas e dinâmicas, tendo-se reforçado o trabalho colaborativo em sala de aula; estimulou-se a compreensão dos conteúdos e a concretização dos objetivos propostos, o que conduziu a aprendizagens significativas por parte dos alunos.

Foram desenvolvidos dois modelos para o Comboio da Multiplicação e da Divisão: num dos modelos, o todo é representado pela estação de comboios ou armazém de mercadorias (Figura 37); no outro modelo, o todo é representado pela locomotiva (Figura 38). Em ambos os modelos, as partes ou grupos são representados pelas diferentes carruagens.

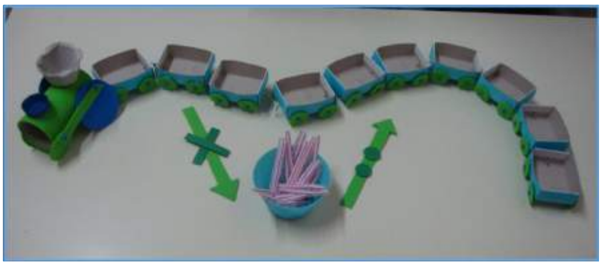

Figura 37: Modelo para o Comboio da Multiplicação e da Divisão, em que o todo é representado pela estação de comboios ou armazém de mercadorias.

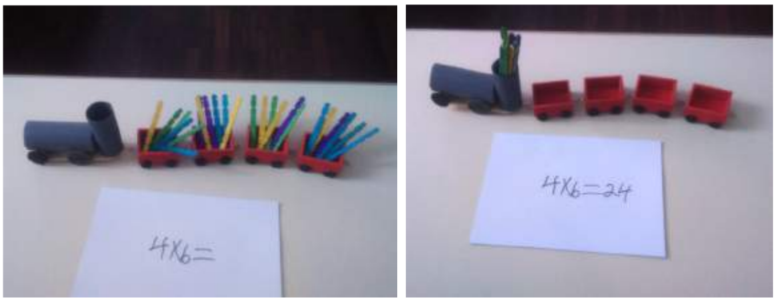

Figura 38: Modelo para o Comboio da Multiplicação e da Divisão, em que o todo é representado pela locomotiva.

Em seguida, exemplificamos as potencialidades de exploração deste recurso.

6.1 Sentido aditivo da multiplicação

Na Figura 39, apresenta-se, como exemplo, uma situação para aplicar a expressão $3 \times 4 = 12$, que envolve 3 grupos com 4 elementos cada, ou seja, 3 carruagens com 4 palhinhas cada. A exploração segue passos análogos aos explicados no contexto do Tabuleiro da Multiplicação e da Divisão. Na Figura 38, apresenta-se um exemplo de exploração do sentido aditivo da multiplicação usando o segundo modelo de comboio.

Figura 39: O aluno retira as palhinhas de cada uma das carruagens e coloca-as no armazém, contando de 4 em 4 (4, 8, 12) e concluindo que existem 12 palhinhas.

Vejamos um exemplo para explorar a propriedade comutativa da multiplicação. Considere-se a situação ilustrada na Figura 40: em cada uma das 3 carruagens há 1 palhinha vermelha e 1 palhinha amarela.

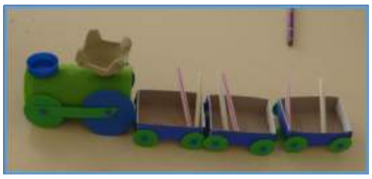

Figura 40: Explorar a propriedade comutativa da multiplicação.

Por um lado, temos 3 grupos de 2, pois existem 3 carruagens com 2 palhinhas cada: $2+2+2=6$ ou $3\times 2=6$. Por outro lado, também temos 2 grupos com 3 palhinhas cada (o grupo de 3 palhinhas vermelhas e o grupo de 3 palhinhas amarelas): $3+3=6$ ou $2\times 3=6$.

6.2 Divisão por partilha equitativa

Na Figura 41, ilustra-se um exemplo.

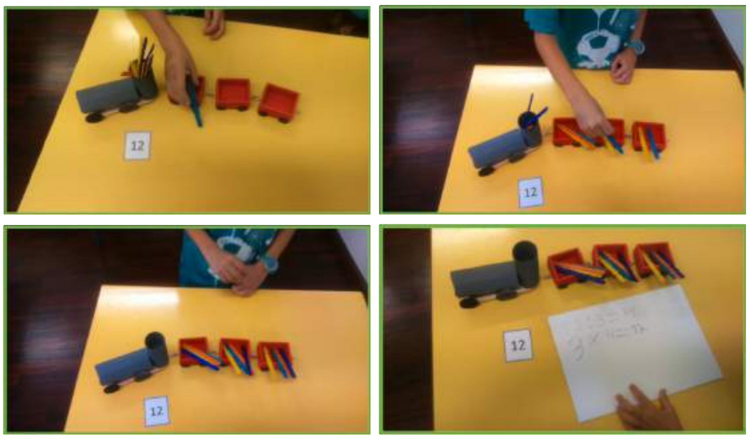

Figura 41: O comboio tem de transportar 12 pauzinhos. Todas as 3 carruagens devem levar a mesma quantidade. Com quantos pauzinhos deve ficar cada carruagem?

O aluno distribui, um a um, os pauzinhos pelas 3 carruagens. Cada carruagem deve levar 4 pauzinhos.

Na Figura 42, ilustra-se outro exemplo.

Figura 42: Tenho 9 palhinhas e quero distribuí-las igualmente pelas 3 carruagens. Com quantas palhinhas deve ficar cada carruagem?

O aluno distribui, uma a uma, as palhinhas pelas 3 carruagens. Cada carruagem deve levar 3 palhinhas.

6.3 Divisão por agrupamento

Na Figura 43, ilustra-se um exemplo.

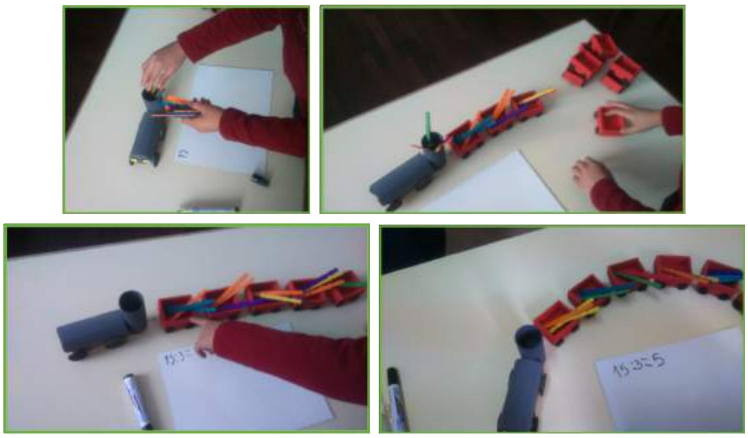

Figura 43: O comboio tem de transportar 15 pauzinhos. Cada carruagem leva 3 pauzinhos. Quantas carruagem são precisas?

O aluno vai prendendo carruagens com 3 pauzinhos ao comboio, até esgotar os pauzinhos. Em seguida, o aluno conta as carruagens utilizadas. São precisas 5 carruagens.

Na Figura 44, ilustra-se outro exemplo.

O aluno vai prendendo carruagens com 2 palhinhas ao comboio, até esgotar as palhinhas. Em seguida, o aluno conta as carruagens utilizadas. São precisas 3 carruagens.

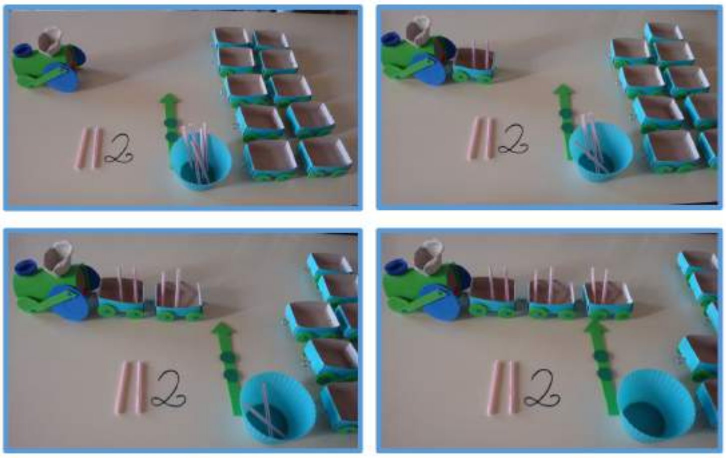

Figura 44: Tenho 6 palhinhas e quero colocar em cada carruagem 2 palhinhas. De quantas carruagens vou precisar?

6.4 Operadores multiplicativos e partitivos

Na Figura 45, explora-se o quádruplo de 6 com recurso ao Comboio da Multiplicação e da Divisão. Para o aluno calcular o quádruplo de 6, este deve colocar 6 pauzinhos em cada uma de 4 carruagens. Em seguida, conta o total de pauzinhos, movendo-os para o todo (chaminé da locomotiva). Deve fazer a contagem de 6 em 6: 6, 12, 18, 24.

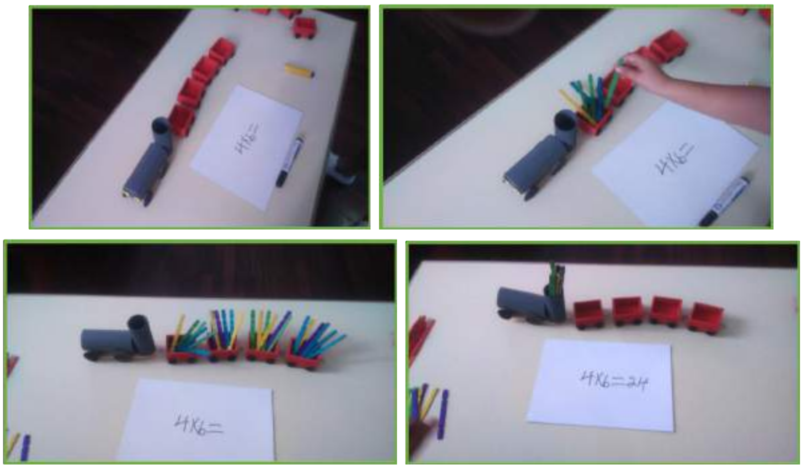

Figura 45: Explorar o quádruplo de 6.

Na Figura 46, explora-se a quarta parte de 16 com recurso ao Comboio da Multiplicação e da Divisão. Para o aluno calcular a quarta parte de 16, este deve distribuir 16 pauzinhos, um a um, por 4 carruagens. No final deve verificar quantos pauzinhos ficaram em cada carruagem (ficaram 4 pauzinhos em cada carruagem).

Figura 46: Explorar a quarta parte de 16.

Terminamos com alguns exemplos adicionais. Na Figura 47, explora-se o triplo de 5. Na Figura 48, explora-se a metade de 10.

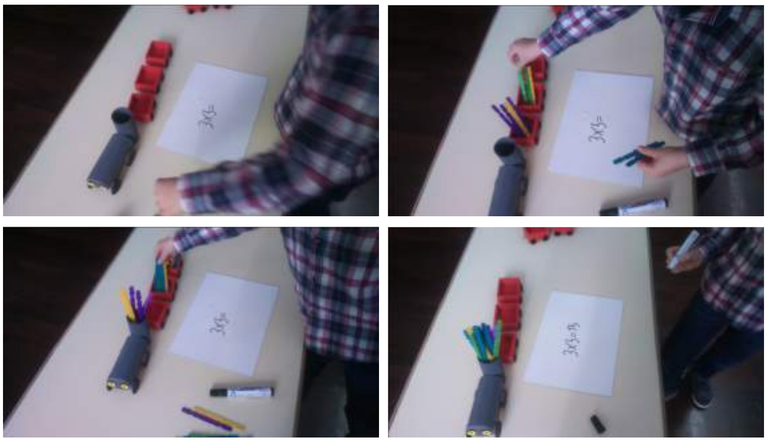

Figura 47: Explorar o triplo de 5: o aluno parte de 3 carruagens com 5 pauzinhos cada, retira os pauzinhos para a chaminé da locomotiva, contando de 5 em 5, e constata que ficam 15 pauzinhos na chaminé.

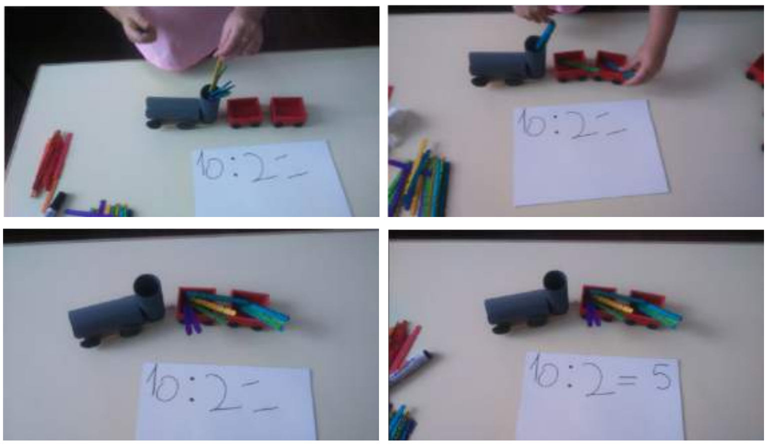

Figura 48: Explorar a metade de 10: o aluno distribui 10 pauzinhos, um a um, por 2 carruagens e constata que ficam 5 pauzinhos em cada carruagem.

7 Informações adicionais sobre a construção dos recursos

Nas Figura 49 a 57 disponibiliza-se informação sobre as dimensões aconselhadas para alguns dos recursos em madeira.

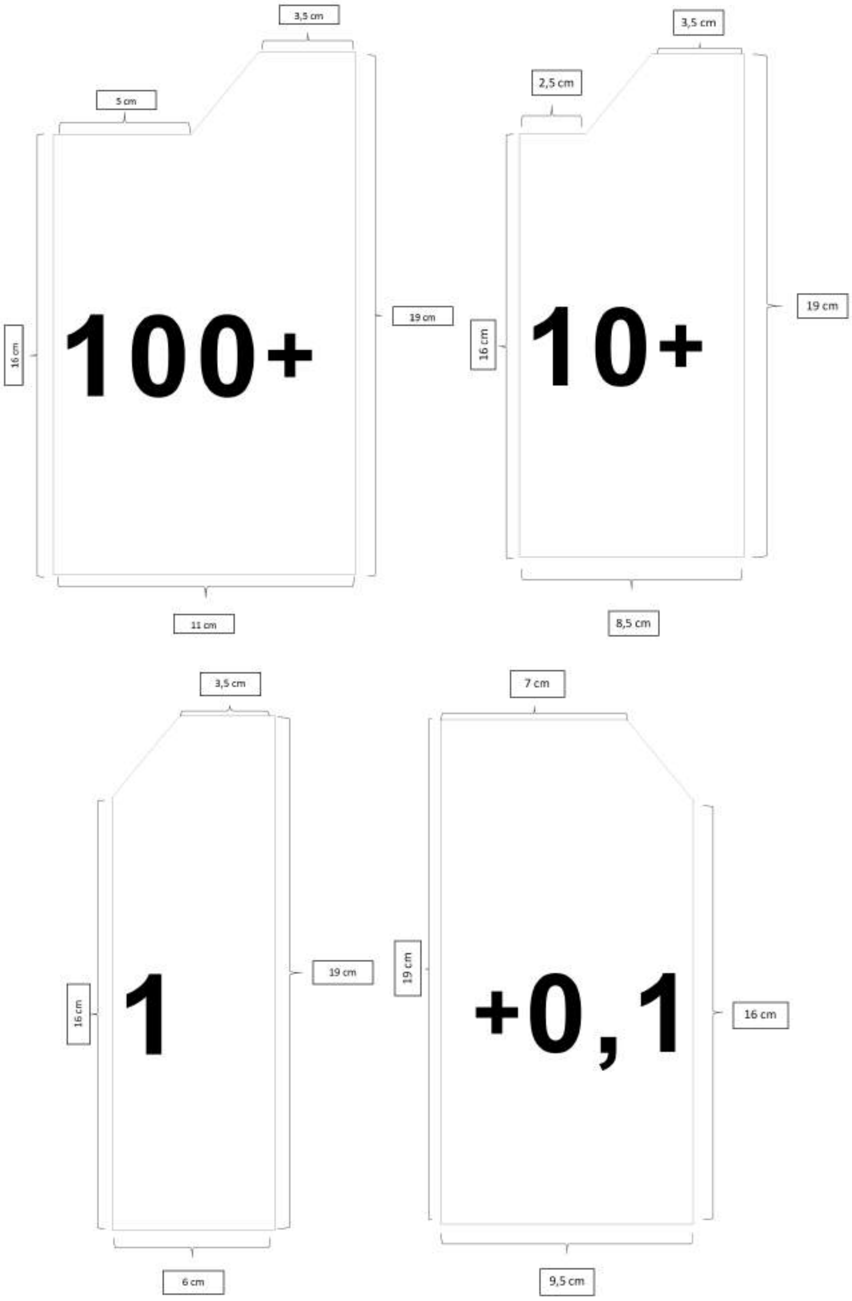

Figura 49: Cartões das centenas, dezenas, unidades e décimas do dispositivo de algarismos móveis.

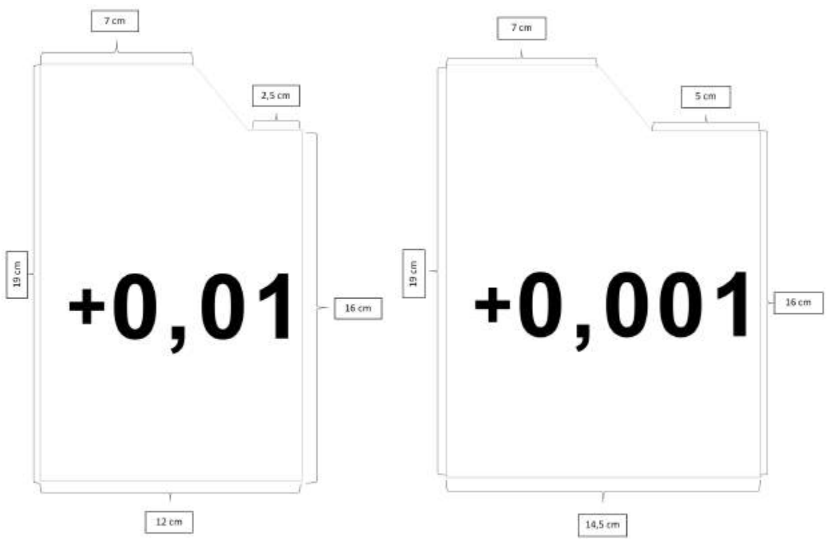

Figura 50: Cartões das centésimas e milésimas do dispositivo de algarismos móveis.

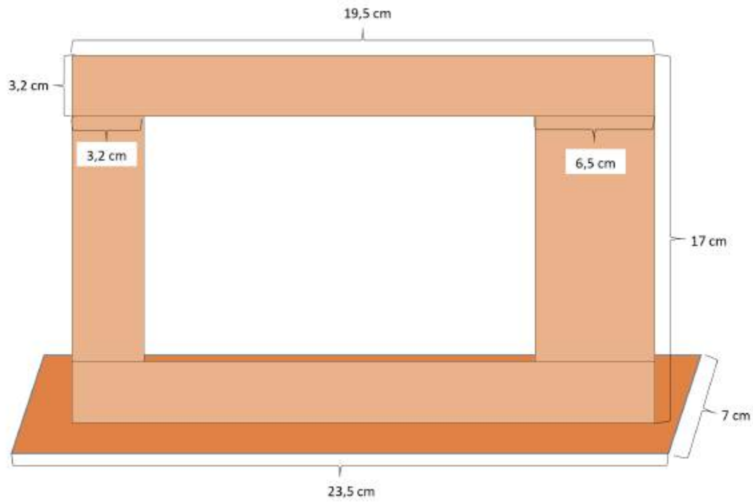

Figura 51: Dimensões do dispositivo de algarismos móveis para dezenas e unidades.

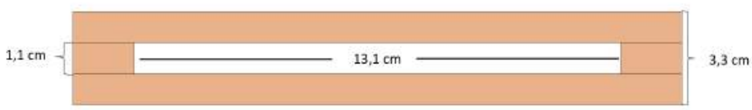

Figura 52: Esquema da base com calha para deslocar os cartões do dispositivo de algarismos móveis para dezenas e unidades.

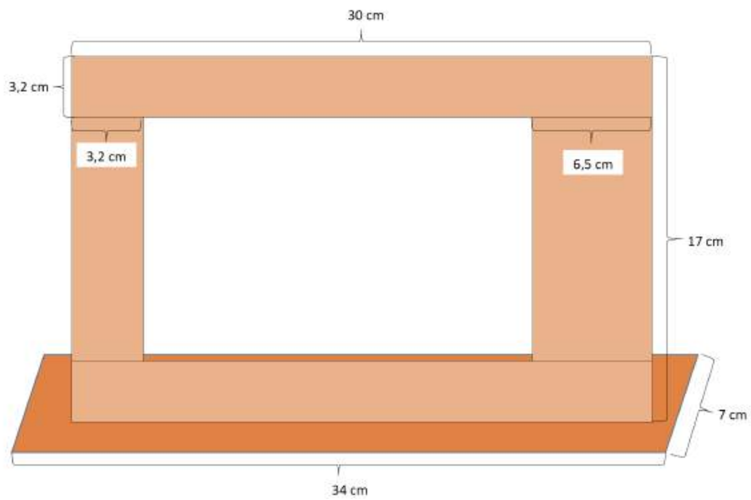

Figura 53: Dimensões do dispositivo de algarismos móveis para centenas, dezenas e unidades.

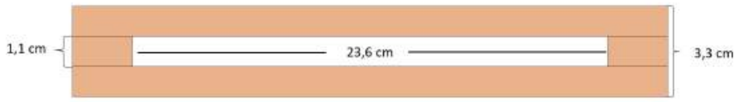

Figura 54: Esquema da base com calha para deslocar os cartões do dispositivo de algarismos móveis para centenas, dezenas e unidades.

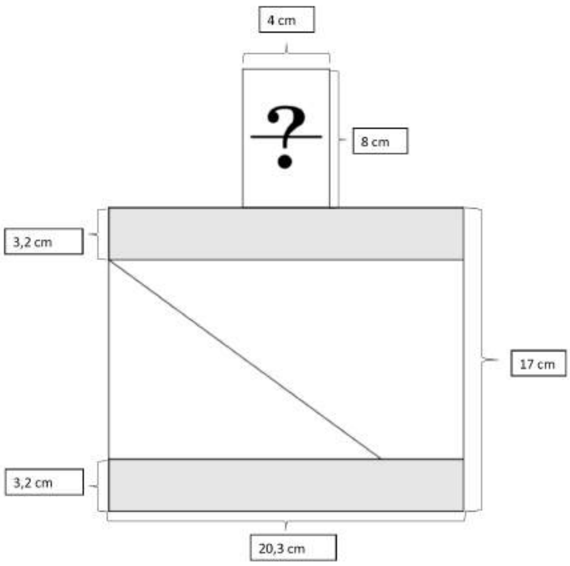

Figura 55: Exemplo de um cartão para explorar o conceito de fração no dispositivo de algarismos móveis para dezenas e unidades.

Figura 56: Dimensões do estendal das frações.

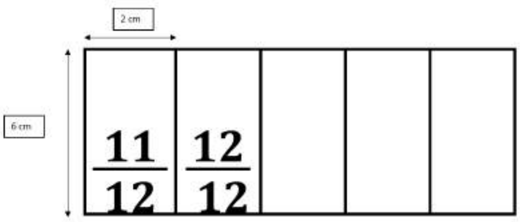

Figura 57: Etiquetas para o estendal das frações.

No que diz respeito ao Comboio da Multiplicação e da Divisão, um dos modelos foi construído em madeira. O outro modelo foi construído com caixas de fósforos para as carruagens e rolos de papel higiénico para a locomotiva. Também é possível construir uma versão simplificada do comboio com caixas de leite pequenas para representar os grupos/carruagens e uma caixa maior para representar o todo (Figura 58).

Figura 58: Versão alternativa do Comboio da Multiplicação e da Divisão da autoria da professora titular Manuela Botelho e da Prof DA Carla Rodrigues (EBI dos Biscoitos, ano letivo 2017/2018). Como nesta versão os pacotes de leite estão fixos, há que chamar a atenção dos alunos para o número de pacotes/grupos a utilizar em cada situação, incluindo o número de pacotes/grupos necessário para responder a uma situação de divisão por agrupamento.

Referências

[1] Bruner, J. S. *The Process of Education*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1960.

[2] Bruner, J. S. *Para uma Teoria da Educação*, (Trad. M. Vaz) Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1966.

[3] Dienes, Z. *Building up Mathematics*, London: Hutchison Educational Limited, 1971.

[4] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico*, Lisboa: MEC – Direção Geral de Educação, 2013.

[5] Ministry of Education of Singapore. *Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus*, Singapore: Ministry of Education of Singapore, 2012. Obtido em novembro de 2018, de `http://www.dphu.org/uploads/attachements/books/books_130_0.pdf`

[6] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Matemática na Educação Pré-Escolar: Esquemas todo-partes", *Jornal das Primeiras Matemáticas* 4, 55-70, 2015.

[7] Santos, C. P., Teixeira, R. C. "Matemática na Educação Pré-Escolar: A ordem das dezenas", *Jornal das Primeiras Matemáticas* 5, 23-39, 2015.

[8] Skemp, R. *Mathematics in the Primary School*, London: Routledge, 1989.

[9] Yee, L. P., Hoe, L. N. (Eds.). *Teaching Primary School Mathematics: A Resource Book*, 2nd Edition, Singapore: McGraw-Hill, 2009.