

Será a Topologia tão intuitiva como a noção de fronteira?



Por: João Cabral
jcabral@uac.pt
Doutorado em Matemática,
pela Universidade dos Açores

Hoje é dia 11 de setembro, um dia em que se recorda os violentos acontecimentos ocorridos em solo norte-americano, que viriam a ceifar a vida a muitas pessoas. Um dia que mudou o estilo de vida ocidental para sempre. O dia em que a palavra terrorismo passou a fazer parte das nossas conversas diárias. Mas hoje, não vos vou falar disso. Vou sim falar de um assunto que ocorreu já no longínquo ano de 1297, no dia 12 de setembro. O dia em que foi assinado o tratado de Alcanizes, um acordo entre o rei de Portugal D. Dinis e o rei de Leão e Castela, D. Fernando IV. Este tratado possibilitou o restabelecimento da paz e o reconhecimento dos limites fronteiriços entre os dois reinos. Um limite fronteiriço pressupõe a existência de uma linha de fronteira, mas o que é uma fronteira?

Na Matemática, noções como vizinhança, fronteira, interior ou exterior de um conjunto fazem parte de uma área que designamos de Topologia. Alguns autores definem a Topologia como sendo uma geometria com uma forma primitiva e rudimentar que constrói todas as outras geometrias.

Como sou docente na Universidade dos Açores, ensino alguns dos fundamentos desta área, da Topologia, aos meus alunos, pois são fundamentais na compreensão de alguns conceitos para a correta compreensão da matéria que constitui as disciplinas que leciono. Mas, os meus alunos são todos discentes com uma idade superior a 17 anos. Sempre me perguntei se seria possível induzir estes conceitos topológicos em idades mais precoces. Vamos então viajar no tempo e ir para um nível de idade comparável à 2ª classe em Portugal. Falemos de alunos com uma idade média de 7 anos.

A mesa da Cristina, aluna com 7 anos, na sala de aula, está em completa desordem.

- Vou arrumar o meu lugar, diz ela. Sento-me e arrumo tudo o que puder com a mão.

- Vais arrumar o teu saco que está encostado ao pé da tua cadeira? Pergunta-lhe a professora.

- Sim, porque lhe posso tocar. Chego a ele, portanto, o saco está na minha proximidade.

- E a mosca que voa por cima da tua cabeça, está próxima de ti?

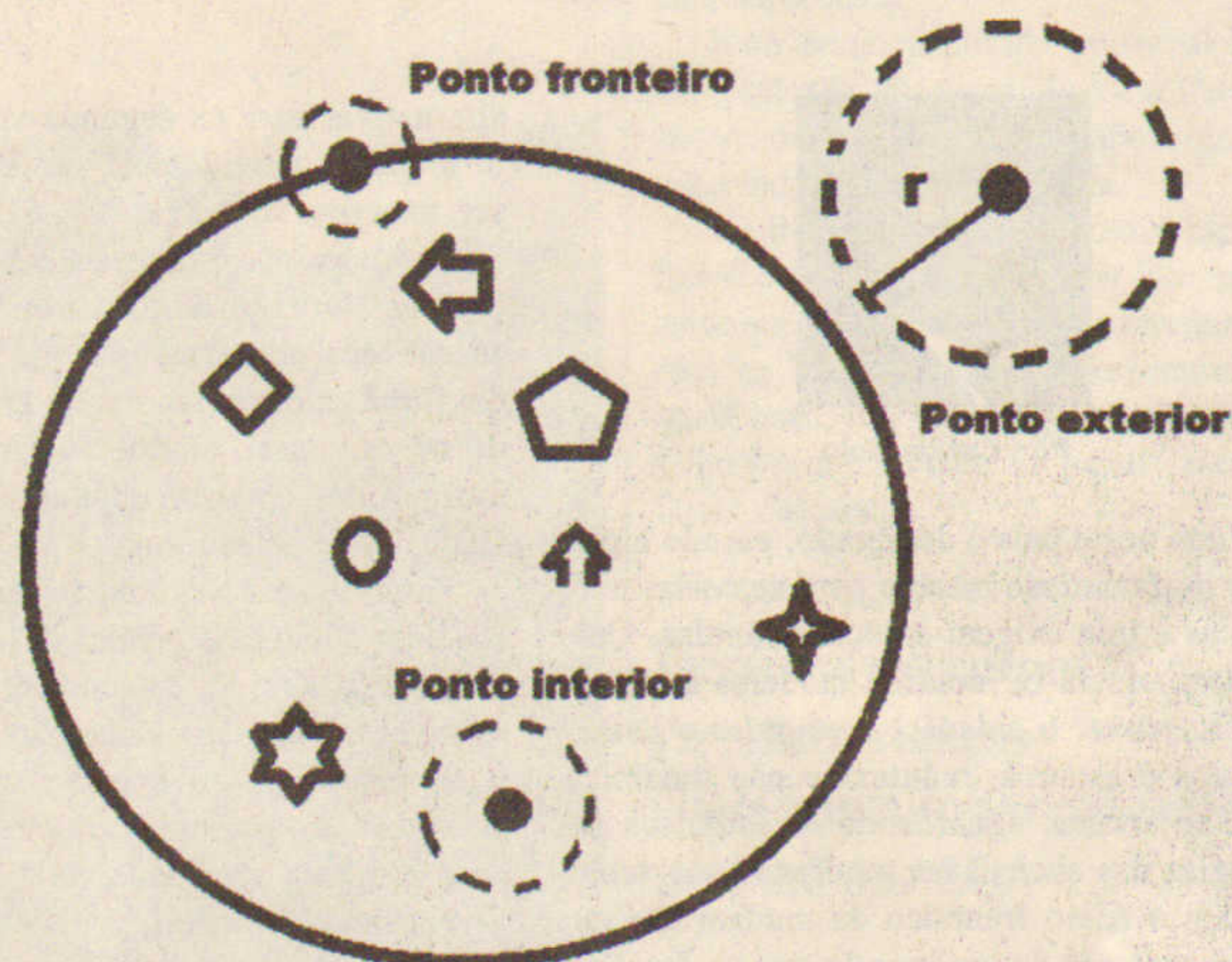
- Se ela voasse mais devagar, poderia apanhá-la, pois estaria na minha proximidade.

Cristina delimitou intuitivamente a sua proximidade. Na Topologia, a proximidade assume o nome de vizinhança. Para a Cristina, a sua vizinhança, são todos os pontos que se encontram no interior da esfera que tem por raio o comprimento do seu braço. Esta é de facto a definição intuitiva de vizinhança espacial: um objeto A está na vizinhança de outro objeto B se estiver contido numa esfera que tenha centro em B e que a distância entre ambos seja inferior a uma distância pré-determinada. Assim, podemos concluir imediatamente que o conceito de vizinhança é algo que depende do valor desta mesma distância. Quando lidamos com conceitos da Análise Matemática, um pesadelo para os alunos universitários, interessa-nos sobretudo estudar vizinhanças em que os objetos têm uma proximidade tão próxima quanto possível, mas que nunca estejam no mesmo local. Ou seja, a distância entre ambos é quase nula, mas nunca se chega a anular.

Quando se cria atividades exploratórias da noção de proximidade para crianças de 7 anos, estas permitem à própria criança desenvolver estratégias de mapeamento e cálculo da posição relativa dos pontos que estão na sua proximidade. Deve-se introduzir conhecimentos de termos tais como: Sobre – sob – à esquerda – à direita – diante de – no interior – no exterior – em cima de – debaixo de, etc.

A própria noção de elemento interior de um conjunto é muito intuitiva e fácil de perceber. Vamos imaginar um conjunto qualquer de elementos. Quando lidamos com um conjunto matemático, estes elementos podem assumir o nome de pontos. Um dado elemento está no interior de um determinado conjunto se for possível estabelecer uma vizinhança à sua volta, com uma determinada distância, não nula, que esteja totalmente incluída neste conjunto. Um dos exemplos mais clássicos, sem recorrer ao formalismo matemático, para se perceber esta noção é a seguinte: Como podemos ter a certeza que estamos dentro de uma sala, em que estão presentes mais indivíduos, para além de nós? Nós estamos dentro da sala, estamos no interior da sala, pois é possível estabelecer uma proximidade com outros indivíduos, que também estão na sala, sem nunca ser necessário sair da mesma.

A noção de elemento exterior de um determinado conjunto segue a mesma linha de raciocínio, mas em sentido contrário. Como é que sabemos que estamos fora de um determinado lugar? Para ser mais fácil perceber, vamos imaginar uma sala cheia de pessoas. Fora da sala estão também mais pessoas. Neste caso fazemos parte das pessoas que estão fora da sala. Se olharmos à nossa volta conseguimos construir uma proximidade, uma vizinhança de pessoas, que nos estão próximas, mas que não estão dentro da sala. Assim, temos a certeza que estamos fora da sala. Assim, se for possível construir uma



vizinhança à nossa volta, mesmo que seja apenas espaço vazio, que não contenha elementos que estão no interior da sala, temos a certeza que estamos no exterior do conjunto que é a sala.

Assim, sabendo o que é um elemento interior e elemento exterior a um dado conjunto, é fácil construir o conjunto dos elementos interiores a um conjunto e o conjunto dos elementos exteriores a um conjunto. Agora é fácil definir um ponto fronteiro.

Vamos imaginar um elemento X. Ao construirmos uma vizinhança de centro em X, com um raio positivo, mas tão pequeno quanto queiramos, e esta vizinhança, mesmo assim, conseguir incorporar elementos do interior e do exterior de um determinado conjunto, então este elemento X é um elemento fronteiro deste conjunto. Ao conjunto dos elementos fronteiros chamamos fronteira.

Relembrando o tratado de Alcanizes, a linha de fronteira entre o reino de Portugal e o reino de Leão e Castela é uma linha formada por pontos, a partir dos quais podemos construir uma vizinhança, com um raio positivo, com uma medida tão pequena quanto queiramos, em que existe simultaneamente território que é Português e território que não é Português.

Quando se trabalha com estas noções topológicas de ponto interior, ponto exterior e ponto fronteiro é muito natural ensinar-se as noções de conjunto aberto, de conjunto fechado e de conjunto que nem é aberto nem fechado. Estas noções também são passíveis de serem ensinadas de forma intuitiva a alunos de tenra idade.

Carlos, de seis anos, e Cristina de sete, estão num passeio. Chegam a um pasto, com vacas, que se encontra vedado com arame farpado.

- Para mim, o pasto está aberto, diz o Carlos. - Não está fechado, porque posso passar a quatro patas por debaixo do arame.

- No entanto, para as vacas está fechado, retifica a Cristina.

No final do passeio, voltam à sala de aula e encontram a porta fechada à chave.

- E agora, Carlos, podemos entrar? - Questiona a Cristina.

- Não, responde o Carlos, a sala de aula está fechada e as paredes impedem-me de entrar.

Cristina esclarece logo de imediato que no pasto a vedação era possível ser transposta pelos humanos, mas não pelos animais, mas que no caso da sala era impossível transpor as paredes.

Um conjunto diz-se aberto quando não contém qualquer ponto da sua fronteira, e um conjunto diz-se fechado quando contém todos os seus pontos da sua fronteira.

Enquanto esperam que a professora abra a sala de aula, Cristina e Carlos brincam aos polícias e ladrões, com os restantes colegas. Quando um ladrão é apanhado, é levado para a prisão. A prisão é a caixa de areia no recreio. João foi apanhado pelo Carlos e conduzido para a prisão, mas fugiu.

- Tu não tens o direito de fugir da prisão! Protestou o Carlos.

- Mas esta prisão não tem muros! Quando me levaram para lá, não me disseram que tinha muros! Argumentou o João.

- Sim, mas agora tem um muro! Afirmou a Cristina. - Tu agora não podes fugir!

A professora, que tinha mesmo acabado de chegar, aproveitou logo a situação para explicar que a prisão estava aberta quando se entra nela, mas que estava fechada quando dela se quer sair. Ou seja, aquela caixa de areia, a prisão, era um exemplo de um conjunto que não é aberto nem fechado.

Os casos aqui retratados aconteceram na realidade, o que mostra que a Topologia é algo natural, que pode ser ensinado intuitivamente às crianças, em níveis considerados, até ao momento, muito precoces. Se a intuição existir, será depois muito mais fácil ao docente construir as regras que vão permitir o formalismo da linguagem Matemática, ao longo do percurso académico da criança.