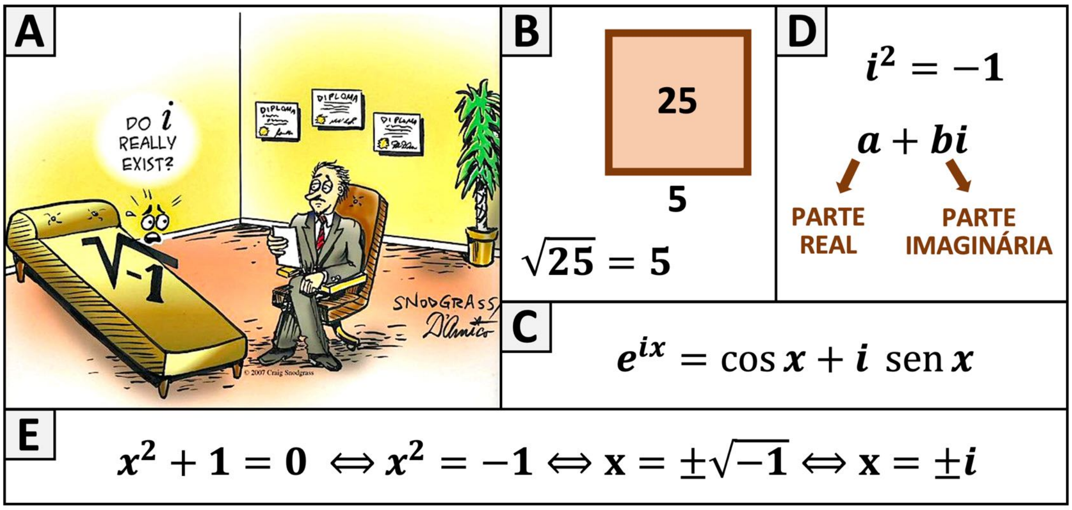
i de Imaginário

Por: Ricardo Cunha Teixeira
Professor Associado da Faculdade de Ciências
e Tecnologia da Universidade dos Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt



Os números complexos assumem um papel fundamental na ciência contemporânea, em particular na Matemática e na Física. No cerne do conceito de número complexo está a unidade imaginária, a raiz quadrada de -1, representada usualmente pela letra i. A introdução da unidade imaginária permitiu expandir o conjunto dos números reais (que inclui os números inteiros e as dízimas que utilizamos recorrentemente no dia a dia) para um conjunto mais amplo constituído pelos números complexos (que inclui os números reais e os números imaginários).

Com este texto, pretende-se aludir à história dos números imaginários desde as suas origens até ao presente, realçando algumas curiosidades e aplicações. Estes números são uma das inovações mais intrigantes da Matemática, por desafiarem a nossa visão tradicional dos números e das operações. A Figura A apresenta uma imagem de Craig Snodgrass e Bob D'Amico que, em tom cómico, ilustra a dificuldade que os matemáticos sentiram na definição da unidade imaginária como a raiz quadrada de -1.

Para percebermos melhor o desafio em causa, começamos por recordar o conceito de raiz quadrada. Ora, se o quadrado de um número alfa é igual a um número beta, ou seja, se alfa x alfa = beta, então dizemos que alfa é uma raiz quadrada de beta. Por exemplo, como 2x2=4, então 2 é uma raiz quadrada de 4. Mas, também temos (-2) x (-2) = 4, pelo que -2 também é uma raiz quadrada de 4. Na verdade, todo o número real positivo apresenta duas raízes quadradas, um valor positivo e o seu simétrico. Por exemplo, 9 tem duas raízes quadradas: 3 e -3. Já 16 tem como raízes quadradas 4 e -4. E assim sucessivamente. Nos cálculos com raízes, convenciona-se considerar para cada número a sua raiz quadrada positiva, a qual se designa por raiz quadrada principal.

Por curiosidade, é de referi que o termo "raiz quadrada" tem origem na Grécia Antiga. Os gregos constataram que, por exemplo, se a área de um quadrado for 25, então cada um dos seus lados mede 5, em particular, o lado em que o quadrado se "apoia", ou seja, a sua base ou "raiz". Assim, a raiz/base do quadrado de área 25 é 5 ou, dito de forma mais simples, a raiz de 25 é 5 (Figura B). Já o símbolo usado para representar uma raiz surgiu bastante mais tarde, tendo sido introduzido por Johann Rahn (1622-1676) em 1659, no seu livro "Teutsche Algebra". O símbolo em causa resultou de uma deformação da letra "r", inicial da palavra "radix", que significa raiz em latim.

Concentremos, agora, a nossa atenção na seguinte propriedade dos números reais: se multiplicarmos um número real não nulo por si próprio, o resultado é um número positivo. Por outras palavras, o quadrado de um número real não nulo é sempre um número positivo. Assim sendo, aparentemente não faz sentido aplicar o conceito de raiz quadrada a um número negativo, porque isso colocar-nos-ia à procura de um número que multiplicado por si próprio dá um número negativo, o que não é possível no conjunto dos números reais. Portanto, supostamente é impossível encontrar um número alfa tal que alfa x alfa = -1. Ou seja, tudo parece indicar que a raiz quadrada de -1 não existe!

Contudo, apesar de concordarem com o raciocínio apresentado acima, vários matemáticos a partir do século XVI acabaram por ter de considerar a raiz quadrada de -1 nos seus cálculos que envolviam a resolução de equações polinomiais para conseguirem encontrar soluções para essas equações. Gerolamo Cardano (1501-1576) foi um dos primeiros a lidar com números que hoje consideramos imaginários, embora sem uma compreensão completa do seu significado. No entanto, foi Rafael Bombelli (1526-1572) quem começou a desenvolver algumas regras fundamentais para operar com esses números não convencionais.Esta contribuição foi, sem dúvida, um passo significativo em direção à plena aceitação dos números imaginários. Porém, o reconhecimento e a formalização destes intrigantes números ocorreram apenas no século XVIII, graças ao trabalho de matemáticos como Leonhard Euler (1707-1783) e Carl Gauss (1777-1855). Euler, por exemplo, introduziu a representação dos números complexos com recurso à função exponencial, apresentando a famosa fórmula ilustrada na Figura C. Também foi Euler que começou a representar a raiz quadrada de -1 pela letra i e que introduziu a representação algébrica atual dos números complexos (Figura D).

Já a representação geométrica dos números complexos é amplamente atribuída a Jean-Robert Argand (1768-1822), que, em 1806, introduziu o que hoje conhecemos como o Plano de Argand. Esta representação gráfica utiliza um eixo horizontal para a parte real e um eixo vertical para a parte imaginária, permitindo visualizar em termos bidimensionais os números complexos como pontos ou vetores de um plano. A inovação de Argand foi fundamental para a compreensão dos números complexos, pois facilitou a análise de operações como a adição e a multiplicação, que podem ser visualizadas geometricamente.

Ao terem de considerar a raiz quadrada de -1 nos seus cálculos para encontrarem as soluções de equações polinomiais (por exemplo, a equação apresentada na Figura E não tem soluções no conjunto dos números reais, mas tem duas soluções no conjunto dos números complexos), os matemáticos abriram a porta a um novo conjunto numérico, o conjunto dos números complexos, formado pelos números reais e pelos números imaginários. Assim, a unidade imaginária, ou seja, a raiz quadrada de -1 não é um número real, mas ao "imaginarem" a sua existência os matemáticos conseguiram expandir o conceito de número, surgindo os números imaginários, que permitem resolver equações que antes eram consideradas insolúveis. Em 1816, Carl Gauss (1777-1855) apresentou a primeira demonstração do famoso Teorema Fundamental da Álgebra, segundo o qual todas as equações polinomiais com coeficientes reais têm pelo menos uma solução complexa (real ou imaginária). Mais tarde, em 1849, Gauss provou que o mesmo acontece com as equações polinomiais com coeficientes complexos, abrindo a porta à constatação de uma propriedade fantástica das equações polinomiais de grau n (com n maior ou igual a 1) de coeficientes complexos: estas equações têm precisamente n soluções complexas (reais e/ou imaginárias), em que algumas delas podem aparecer repetidas. Desta forma, ao conceberem um novo conjunto numérico, o conjunto dos números complexos, os matemáticos resolveram definitivamente a procura pelas soluções das equações polinomiais!

Estabeleceram-se, assim, as bases para o desenvolvimento dos números complexos que abriram novas fronteiras na Matemática.Estes números têm aplicações significativas em várias áreas da ciência e tecnologia, sendo fundamentais para a análise de circuitos na Engenharia Elétrica, em especial os circuitos de corrente alternada, para a modelação de sistemas dinâmicos, por proporcionarem a análise da dinâmica e do comportamento de sistemas complexos, e para a física quântica, ajudando a descrever estados que não podem ser representados apenas com números reais. Os números complexos também são amplamente utilizados no processamento de sinais, facilitando a comunicação atual por meio de algoritmos de compressão de dados e modulação de sinais.

É curioso constatar que os números complexos estão ligados, através da função zeta de Riemann, a um dos problemas mais intrigantes e ainda não resolvidos da Matemática, formulado por Bernhard Riemann (1826-1866) em 1859.Visualizar os zeros da função zeta no plano complexo permite que os matemáticos explorem aspetos geométricos e analíticos da distribuição dos números primos. Muitos resultados da teoria dos números dependem da localização desses zeros. Isto significa que ainda não está completamente determinado o impacto resultante da criação/descoberta dos números complexos, que se baseia na aceitação da existência da raiz quadrada de -1.

E os matemáticos não se ficaram por aqui. William Hamilton (1805-1865), após vários anos a tentar generalizar o conceito de número complexo através do aumento do número de coordenadas, para além das duas que caracterizam os números complexos, chegou à conclusão que com quatro coordenadas era possível fazer essa generalização mantendo a possibilidade de operar com esses números. E, assim, surgiram os quaterniões, que já têm aplicações práticas atualmente, pois permitem, nos jogos de computador e nos simuladores de voo, calcular a nova posição do jogador ou piloto sempre que há uma rotação envolvida. O cálculo é feito através das regras de multiplicação dos quaterniões.

É questão para se dizer que não há limites para a imaginação dos matemáticos, o que tem conduzido à definição de novos conjuntos numéricos que apresentam, por incrível que possa parecer, aplicações concretas no nosso dia a dia.