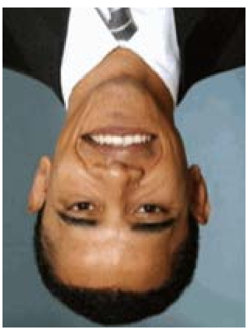
Pisando Arte e Matemática em Lisboa

Alda Carvalho[1], Carlos Pereira dos Santos[2], Jorge Nuno Silva[3], Ricardo Cunha Teixeira[4]

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa & CEMAPRE, Centro de Análise Funcional Estruturas Lineares e Combinatórias, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, NICA-Universidade dos Açores.

Motifs in one or two directions can be classified mathematically by the types of symmetries they possess, and that classification gives rise to seven frieze patterns and to seventeen wallpaper patterns. Rosettes are other type of patterns in which the repetition of the design occurs about a single point, within a limited region of the plane. Rosettes are either dihedral or cyclic, depending on the presence or absence of mirror symmetries. Many Portuguese pavements are beautiful artistic works: all the seven friezes, cyclic rosettes, dihedral rosettes and twelve of the seventeen types of wallpapers were detected in Lisbon. In this paper, we exemplify some of these artistic works, highlighting, in particular, the work in Rossio dos Olivais, carried out by Fernando Conduto. In 2014, the Ludus Association and the University of Lisbon published the Baralho de Simetrias - Calçadas de Lisboa, a deck of cards to disseminate this subject to the largest possible number of people. We also discuss that initiative.

Keywords: portuguese pavement, symmetry, wallpapers, friezes, rosettes.



1.Omnipresença das simetrias

Em museus de ciência é muito comum encontrar placas giratórias com imagens de rostos humanos como se ilustra na Figura 1.

Figura 1 (à esquerda): O que há de estranho nesta imagem?

Um visitante curioso, ao passar por tal imagem, pode ser tentado a girar a placa para poder olhar para a cara na sua «posição correta». É exatamente nessa altura que o cenário fica mais interessante. Como pode o leitor facilmente verificar virando esta página ao contrário, a cara passa a assumir um aspeto monstruoso. A questão que se coloca é a seguinte:

Por que razão não se tem a mesma sensação ao olhar para a figura de pernas para o ar?

A resposta a esta pergunta prende-se com questões puramente psicológicas. Embora de pernas para o ar, há pontos importantes como os olhos, a boca ou as orelhas que estão nas posições corretas e simétricas em relação ao eixo central da cara. As coisas invertidas são o contorno, o nariz e as sobrancelhas da cara. O nosso íntimo sente-se bem com a disposição simétrica dos olhos, boca e orelhas atribuindo pouca importância ao resto. A seleção natural criou em nós expectativas face à simetria. É exatamente o facto de estarmos programados dessa forma que nos liberta de olhar atentamente e conscientemente para os pormenores. Nós procuramos alguma simetria e isso basta. Biologicamente faz todo o sentido; somos muito mais rápidos e menos esforçados a avaliar potenciais perigos se bastar um relance sobre alguns pontos em vez de uma atenção focada em todos os pormenores. Depois de virar a placa, tudo é mais inesperado. Nesse caso, os importantes fatores olhos, boca e orelhas estão invertidos. E aqui soam os alarmes! A cara parece-nos horrível; detetamos problemas evidentes nas simetrias esperadas. Basta um relance para os detetarmos.

A simetria aparece na natureza pelas mais variadas razões. Uma bastante lógica relaciona-se com o equilíbrio. Há imensos dispositivos biológicos que funcionam melhor aos pares para desempenhar as suas funções. Um ser humano anda melhor com duas pernas pela simples razão de que, dessa forma, uma perna pode apoiar-se no chão enquanto a outra perna dá o passo em frente. Esse simples facto faz com que muitos outros órgãos fiquem a funcionar melhor aos pares. Por exemplo, é sabido que uma pessoa que oiça só de um ouvido se equilibra pior. Milhares de pensamentos do tipo podem ser utilizados para defender a utilidade das distribuições simétricas. Se tivermos uma perna mais pesada do que a outra ou uma perna mais curta do que a outra temos novamente mais problemas na nossa função de locomoção. E, é claro, estas considerações não acabam no ser humano, sendo válidas para a generalidade dos seres vivos. Com duas asas iguais voa-se melhor, etc.

Há também um papel importante nas simetrias relacionado com a economia no armazenamento de informação. Repare-se que, para guardar a informação relativa às asas de uma borboleta, admitindo que as asas são perfeitamente simétricas, basta guardar a informação relativa a uma asa (a informação da outra é obtida por simetria). As próprias operações aritméticas têm propriedades que não são mais do que fenómenos de simetria. A comutatividade de certas operações é um caso desses. Por exemplo, em relação à multiplicação,3x2 é igual a 2x3; e o mesmo para quaisquer números a e b, axb é igual a bxa. Isso significa que uma memorização da tabuada da multiplicação requer apenas a memorização de metade da tabuada. Este é um pequeno exemplo da forma simples como o conhecimento de uma simetria pode ajudar uma melhor eficácia no armazenamento de informação (neste caso, a memorização da tabuada).

Ainda quanto à omnipresença das simetrias, uma palavra sobre a forma como a constatação de uma simetria pode ajudar na construção de um raciocínio lógico. Quanto a esta ideia, nada melhor do que recordar um episódio clássico. Um dos grandes nomes da história da matemática foi o alemão Karl Friedrich Gauss (1777-1855). As suas contribuições foram em grande número, apresentando uma enorme sofisticação em praticamente todas as áreas da matemática. Dizem que Gauss tinha um professor muito severo que não aceitava brincadeiras nas suas aulas. Como Gauss já era muito bom em matemática e achava as aulas do professor pouco interessantes, encontrava-se quase sempre distraído. O professor, vendo que Gauss não estava atento, resolveu dar-lhe um castigo: somar todos os números de 1 a 100, com o objetivo de entreter Gauss durante muito tempo para que não atrapalhasse a sua aula (provavelmente este episódio não passa de um interessante mito). Mas o professor não contava com a habilidade que Gauss possuía para a matemática. Em poucos minutos, Gauss somou todos os números de 1 a 100, deixando o professor espantado. Vejamos como Gauss realizou esses cálculos de forma tão rápida e precisa: ele reparou que 1+100 dá exatamente o mesmo resultado do que 2+99 pois de 1 para 2 ganha-se uma unidade e de 100 para 99 perde-se uma unidade. Se o que se ganha com a alteração da primeira parcela é o mesmo que o que se perde com a alteração da segunda, o resultado mantém-se igual. Com o mesmo argumento, prova-se que as somas 3+98, 4+97, etc., devem ser todas iguais a 101. O que Gauss fez foi identificar uma simetria na soma dos primeiros cem números naturais, aproveitando esta propriedade para emparelhar cuidadosamente as parcelas em seu proveito. Uma vez que a soma tem 50 pares de parcelas, com este emparelhamento, Gauss foi capaz de calcular corretamente a soma com a conta 50x101=5050. Devido ao facto de a matemática estar recheada de fenómenos de simetria deste género, torna-se muito útil o treino que consiste em detetar e perceber as simetrias existentes nos mais variados contextos. É por esse motivo que este tópico é bastante relevante.

2. Isometrias do plano

Para que melhor se perceba o conceito matemático de simetria, é importante explorar em primeiro lugar o conceito de isometria do plano. Numa linguagem simplificada, pode dizer-se que uma isometria é um movimento que permite manipular uma figura mantendo exatamente a sua forma e o seu tamanho. Isto significa, por exemplo, que não pode haver efeito de «elasticidade» em parte alguma da figura. Em termos rigorosos, uma isometria é uma transformação do plano que, quando aplicada a uma figura, ou seja, a um conjunto de pontos, mantém as distâncias entre os seus pontos — daí «iso», igual. Por exemplo, uma translação de pontos do plano é uma isometria (Figura 2).

No plano, existem três isometrias fundamentais. A sua compreensão é a base para um melhor conhecimento das transformações geométricas e, como veremos, para uma melhor compreensão do conceito matemático de simetria plana.

2.1. Translação

Como referido anteriormente, uma translação consiste num «deslizar» de um objeto, em linha reta, de uma posição para outra. Os elevadores e as escadas rolantes são bons exemplos do quotidiano que ilustram o conceito.

Para que uma translação fique bem determinada, é necessário estabelecer qual a distância, direção e sentido que se deve aplicar. No plano, a

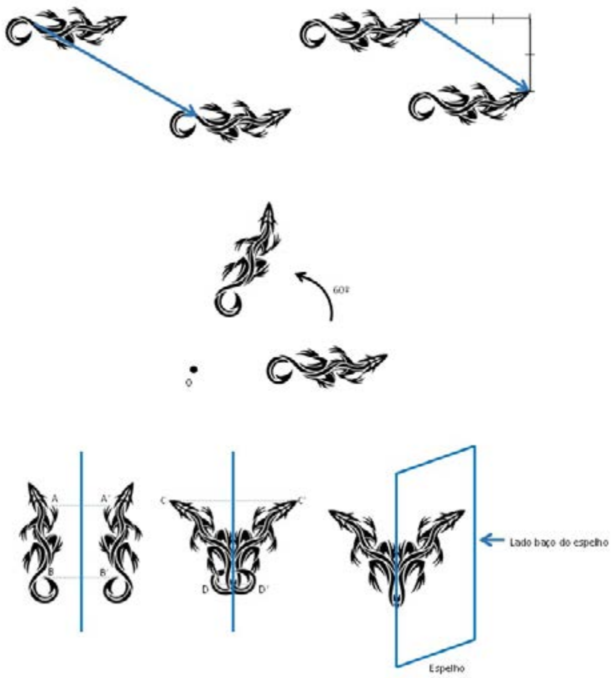


Figura 2: Isometrias no plano

caracterização de uma translação fica simplificada. Para tal, basta saber qual a distância a percorrer para a esquerda ou para a direita e qual a distância para cima ou para baixo. No exemplo apresentado no canto superior direito da Figura 2, estipulada certa unidade de comprimento, o lagarto desloca-se 3 unidades para a direita e 2 unidades para baixo. A matemática usa objetos denominados vetores para representar economicamente a informação «3 para a direita» e «2 para baixo». A informação é representada apenas por (3,-2). A primeira coordenada do par diz respeito ao número de unidades a deslocar para a direita/esquerda (associa-se o sinal «-» ao movimento para a esquerda) e a segunda coordenada diz respeito ao número de unidades a percorrer para cima/baixo (associa-se o sinal «-» ao movimento para baixo). Sendo assim, para descrever bem uma translação, é necessário apresentar um vetor que contenha a informação sobre o deslocamento. Por exemplo, uma translação segundo o vetor (-2,4) está associada a movimentos de pontos do plano duas unidades de comprimento para a esquerda e quatro unidades de comprimento para cima.

Definição 1: Dado um vector $\vec{v}$, chama-se *translação do plano* definida pelo vector $\vec{v}$ à transformação T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(A)=A+\vec{v}$.

É muito comum, ao falar-se de transformações geométricas, falar-se do objeto que é alvo da transformação (neste caso A) e da imagem que é o resultado da transformação (neste caso A'). Utiliza-se uma plica para os distinguir.

2.2. Rotação

Uma rotação está naturalmente associada ao ato de rodar. Bons exemplos quotidianos são os relógios analógicos e as rodas gigantes presentes em muitas feiras.

Para uma rotação estar bem definida, tem de se responder a três questões: rotação à volta de quê?, qual a amplitude da rotação?, em que sentido se processa a rotação, a favor ou contra os ponteiros do relógio? Considerando rotações no plano, a primeira pergunta pode ser respondida indicando um ponto, o centro de rotação. Além disso, um ângulo orientado pode ser facilmente expresso em graus (ou noutra unidade de amplitude escolhida para o mesmo efeito) juntamente com o sinal «+» ou «-».

O sentido positivo é atribuído ao sentido anti-horário; a razão para tal tem origem no sentido do movimento aparente do Sol. Um observador no hemisfério norte como, por exemplo, na cidade de Lisboa, desde que voltado para norte, segue o movimento do Sol rodando a cabeça da direita para a esquerda, no sentido contrário aos ponteiros do relógio. Sucede exatamente o mesmo com a sombra que se projeta no chão atrás de si.

Sendo assim, desde que esclarecida a posição do centro e o ângulo orientado, a rotação fica bem definida. Ao centro, na Figura 2, vê-se o lagarto rodado 60° em torno de O.

Definição 2: Dado um ponto *O* e um ângulo orientado , chama-se *rotação do plano* de centro *O* e ângulo α à transformação T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, se A for um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $A'=T(A)$, então $\bar{O}\bar{A}=\bar{O}\bar{A}'$ e $\angle AOA'=\alpha$.

2.3. Reflexão

A melhor forma de compreender uma reflexão consiste em recordar alguns fenómenos que conhecemos em relação a espelhos. No projeto para crianças *Ciência a Brincar 5 Descobre a Matemática!* [7], a dada altura, fala-se do país da cara metade, onde todos os seres são metade opacos, metade transparentes. Essa ideia originou bonitos desenhos feitos por crianças. Para se poder ver na totalidade os seres de tão bizarro país, o instrumento indicado é um espelho.

A imagem refletida de metade dos seres permite completar os seus corpos. Outra situação do género, aproveitando a mesma ideia, surge nas tradicionais brincadeiras envolvendo recortes de papel.

Para que uma reflexão plana fique bem determinada, é necessário saber-se qual é a reta que constitui o eixo (intimamente ligado à posição do espelho). Na realidade, cada ponto terá a sua imagem espelhada do outro lado do eixo exactamente à mesma distância deste. Repare-se que o objeto da transformação, tal como a sua imagem podem «cruzar o eixo», como se ilustra na linha inferior, ao centro, na Figura 2. Nesses casos, os fenómenos espelhados apresentam uma ligeira diferença devido ao facto de a generalidade dos espelhos apresentar um lado baço. Relativamente ao mesmo exemplo, a utilização de um espelho resultaria num fenómeno como o que se apresenta na linha inferior, à direita, na Figura 2. A existência de um lado baço nos espelhos permite efeitos mágicos muito antigos.

Definição 3: Dada uma reta r, chama-se *reflexão do plano* de eixo r à transformação $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que, se A for um ponto de $\mathbb{R}^2$ e $A'=T(A)$, então a mediatriz do segmento definido por A e A' é r.

Recuperando agora a questão inicial relativa ao conceito de simetria, é importante frisar que, ao contrário das isometrias que estão formalmente muito bem definidas, o termo «simetria» é consideravelmente mais abrangente e subjetivo. A simetria, falando de uma forma não matemática, está ligada a sensações de equilíbrio e harmonia, podendo essas manifestações ser encontradas na arte, na ciência, na natureza, etc. Utilizando uma visão mais matemática, podemos objetivar mais o seu significado. A palavra «simetria» tem a sua origem no grego σνμμετρια (σνμ «com» e μετρια «medida»). Sendo assim, na sua génese, a palavra aponta para algo mensurável. Um objeto com muita simetria tem alguma lógica suscetível de ser medida e compreendida. Historicamente a palavra simetria sempre apareceu fortemente relacionada com a noção de reflexão e imagens espelhadas. Por exemplo, se olharmos para as letras do alfabeto, algumas ficam invariantes por reflexão se posicionarmos bem um eixo – esse eixo bem posicionado é usualmente designado «eixo de simetria». Muitas letras admitem um eixo de simetria. Por exemplo, o «A» admite um eixo vertical e o «B» admite um eixo horizontal. Repare-se que estamos a usar o verbo «admitir» querendo focar a atenção na transformação que deixa a letra imóvel. Há letras que até admitem mais do que um eixo de simetria como, por exemplo, o «X».

A compreensão da invariância não é mais do que a compreensão de uma repetição, de um padrão. É nesse sentido que essa invariância pode trazer uma sensação de harmonia e equilíbrio. Se compreendemos uma coisa então sentimo-nos bem. Coloca-se agora uma questão pertinente:

Por que é que devemos dar um estatuto tão importante apenas à reflexão?

Figura 3: À esquerda, *a obra Snakes* (1969) de M. C. Escher; À direita, um ambigrama.

Observe-se a parte esquerda da Figura 3, um trabalho famoso do artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972).

Quem observa o *Snakes* tem quase forçosamente um sentimento forte em relação à sua harmonia e equilíbrio. Há algo que se repete; há um padrão evidente. No entanto, a figura não aceita nenhum eixo que a deixe invariante por reflexão.

Considere-se o ambigrama da parte direita da Figura 3, uma palavra escrita de tal forma que, se for rodada 180º, mantém exatamente a mesma visualização. Mais uma vez, não podemos deixar de ficar indiferentes à harmonia deste desenho (experimente virar a página ao contrário). Novamente, a figura não aceita eixos que a deixem invariante por reflexão. Modernamente, é comum adotar-se um conceito de simetria mais abrangente e de acordo com a globalidade dos nossos instintos e perceções. À luz dessa visão mais abrangente, já podemos descrever matematicamente a simetria existente em exemplos como os que foram expostos. Costuma-se associar o conceito de simetria apenas à noção de invariância, independentemente se esta é obtida por uma reflexão ou por outra transformação geométrica. Uma figura apresenta «muita simetria» se o grupo de transformações que a deixem na mesma for rico e não trivial. No caso da ilustração de Escher, rotações de 120° e 240° (1/3 e 2/3 de volta, respetivamente) deixam a figura na mesma. Em relação ao ambigrama, como já foi mencionado, uma meia-volta deixa a figura invariante. Muitas possibilidades de invariância levam naturalmente a padrões existentes nas figuras, o que transmite forte sensação de harmonia.

2.4. Noções relacionadas

Estando bem definidas as isometrias planas fundamentais, pode agora entender-se melhor algumas noções relacionadas. Um primeiro conceito importante prende-se com a noção de movimento rígido. Voltando à rotação do lagarto ilustrada na Figura 2, pode intuir-se facilmente que esta pode ser efetuada através de um movimento sobre o plano, sem que a figura se deforme. Isto quer dizer que se se recortar a imagem do lagarto, a transformação pode ser feita sem ter de se sair do plano – por esse facto, a rotação dizse uma «isometria direta». Considerese agora a reflexão do lagarto, também ilustrada na Figura 2. Nesse caso, após recortar o lagarto, não é possível obter a imagem refletida com movimentos rígidos sobre o plano. É necessário sair com o lagarto para o espaço e virá-lo ao contrário para levar a cabo a tarefa. É possível efetuar a transformação através de movimentos rígidos, mas é forçoso sair das duas dimensões do plano. Por esse motivo, a reflexão diz-se uma «isometria oposta».

Também se deve mencionar o conceito de «ponto fixo». Há isometrias que deixam alguns pontos imóveis. Quer isto dizer que há objetos que coincidem com as suas imagens (pontos fixos). Os centros das rotações são pontos fixos. Os pontos pertencentes aos eixos das reflexões também são pontos fixos. A Tabela 1 resume a informação.

Isometrias planas	Com pontos fixos	Sem pontos fixos
Diretas	Rotações	Translações
Opostas	Reflexões	Reflexões deslizantes

Tabela 1: Isometrias diretas/opostas; com/sem pontos fixos.

Outro assunto distinto, mas de grande importância, diz respeito à composição de isometrias. Uma isometria mantém distâncias; sendo assim, ao efetuar-se duas isometrias consecutivas o resultado é ainda uma isometria, uma vez que nenhuma das duas altera distâncias. Considere-se a parte esquerda da Figura 4, relativa a uma translação segundo o vetor $\vec{v}$ logo após uma reflexão em torno de r.

O Lagarto foi transformado em Lagarto′ por meio de uma reflexão. Em seguida, Lagarto′ foi transformado em Lagarto′′ por meio de uma translação. Repare-se que, ao contrário de outras operações, a ordem com que se

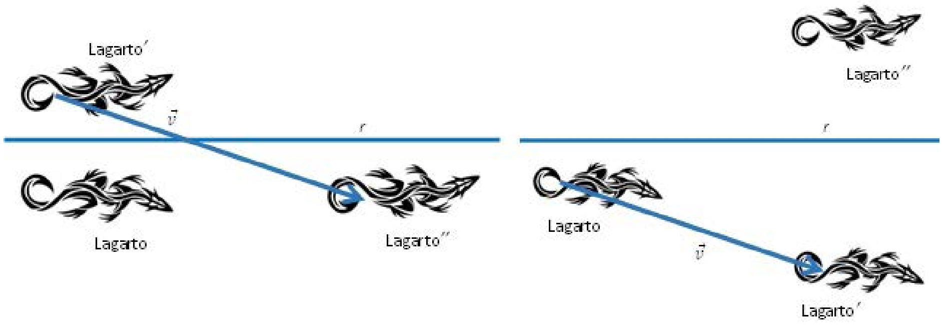


Figura 4: Composição de isometrias.

efetuam as transformações interessa. A composição de isometrias não é comutativa. Vejase, na parte direita da mesma figura, como o resultado seria diferente se se tivesse efetuado primeiro a translação e só depois a reflexão.

Contudo, há uma situação em que a composição de uma translação com uma reflexão é comutativa. Tal verifica-se quando o eixo de reflexão é paralelo ao vetor da translação. Estas transformações chamam-se *reflexões deslizantes* e desempenharão um papel relevante no que resta do artigo.

Há composições de isometrias que se reduzem a uma isometria única. Por exemplo, uma translação segundo $\vec{w}$ logo após uma translação segundo $\vec{v}$ reduz-se a uma única translação segundo $\vec{v}+\vec{w}$. Na realidade, todas as composições foram analisadas geometricamente e demonstra-se que as únicas isometrias planas que são autónomas, no sentido em que não se reduzem, são as translações, rotações, reflexões e reflexões deslizantes [2,5,8]. É comum chamar-se a este conjunto de quatro transformações, as quatro isometrias do plano. A composição de quaisquer duas destas quatro transformações resulta de novo numa das quatro (ver Tabela 2).

Composição	Reflexão	Translação	Rotação	Reflexão deslizante
Reflexão	T ou Rot	Ref ou RD	Ref ou RD	Ref ou RD
Translação	Ref ou RD	T	Rot	Ref ou RD
Rotação	Ref ou RD	Rot	T ou Rot	Ref ou RD
Reflexão deslizante	T ou Rot	Ref ou RD	Ref ou RD	T ou Rot

Tabela 2: T - Translação; Rot – Rotação; Ref – Reflexão; RD – Reflexão Deslizante.

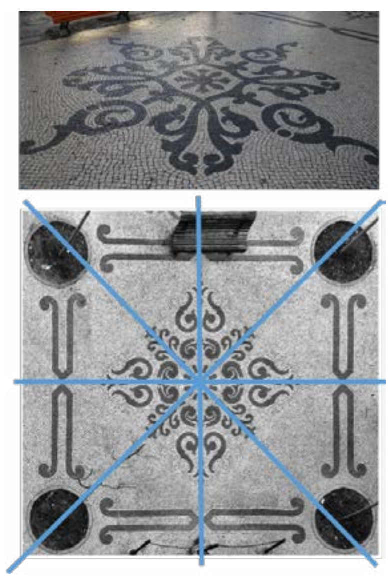
3. Rosáceas, frisos e padrões

Alguns objetos destacam-se pela sua impressionante simetria. As rosáceas são configurações planas limitadas, normalmente apresentadas numa disposição circular, que podem manter-se inalteradas quando sujeitas a rotações ou, eventualmente, a reflexões. São comuns em objetos artísticos e arquitetónicos. A Figura 5 mostra duas rosáceas em calçada portuguesa na Avenida da Liberdade, em Lisboa.

A simetria da rosácea em cima é evidente: há um conjunto não trivial de rotações que deixam a figura invariante. Além da rotação trivial correspondente a 0° (que consiste em não lhe tocar), as rotações de 90°, 180° e 270° também produzem invariância. Em termos rigorosos, todos os múltiplos de 1/4 de volta produzem invariância. Por esse motivo, é habitual dizer-se que uma rosácea deste género é do tipo C_4; «C» a primeira letra da palavra «cíclica» e o número 4 relacionado com o facto de os quartos de volta serem a chave para a caracterização das simetrias desta rosácea.

A rosácea em baixo ainda exibe mais simetria. Tal como no primeiro caso, podemos detetar invariância por meio de múltiplos de rotações de 0°, 90°, 180° e 270°. No entanto, há uma diferença entre os dois exemplos: esta rosácea também fica invariante por meio de reflexões.

Figura 5: Avenida da Liberdade, Lisboa. Em cima, rosácea cíclica. Em baixo, rosácea diedral.



Por motivos que veremos em seguida, dizemos que esta rosácea é do tipo D_4; «D» a primeira letra da palavra «diedral». Surgem naturalmente duas questões:

1) Será que as rosáceas do tipo diedral, por admitirem reflexões, estão associadas a efeitos obtidos com espelhos?

2) Será que, quando uma rosácea admite rotações e reflexões, estas são sempre em igual número como na rosácea diedral da Figura 5 (4 rotações e 4 reflexões)?

Comecemos por dar resposta à primeira questão. Diedro é o análogo tridimensional do conceito de ângulo. É definido como o espaço entre dois semiplanos com origem numa reta comum (aresta do diedro). A amplitude do diedro coincide com a amplitude do ângulo plano obtido cortando o diedro com um plano perpendicular à sua aresta. Se tivermos «fatias» de rosácea, podemos produzir bonitas figuras com auxílio de um diedro espelhado. No entanto, apenas no caso em que a rosácea admite reflexões se observa uma coincidência entre a rosácea original e a que é produzida com o diedro espelhado. Essa é a razão da denominação «diedral». Consideremos as obras de Escher, *Snakes* (1969) e *Circle Limit* IV (*Heaven and Hell*) (1960) produzidas com um diedro espelhado (Figura 6). Se olharmos com atenção, percebemos que há um problema com as *Snakes* (compare-se com o original exposto na Figura 3).

O problema surge devido ao facto de essa rosácea não ser do tipo diedral. Outra interessante forma de constatar o mesmo efeito consiste em traçar um segmento de reta numa folha. Depois, à medida que se fecha o diedro, é possível observar polígonos regulares. No limite, a imagem tende para uma circunferência perfeita.

A resposta à segunda questão também é afirmativa; consegue-se demonstrar que, quando uma rosácea admite rotações e reflexões, estas são sempre em igual número. Alguns autores atribuem este resultado a Leonardo da Vinci e chamam-lhe «Teorema de Leonardo da Vinci» [8]. São famosos alguns dos seus desenhos, como a «Flor da Vida» no Códice Atlântico, (f. 307v) ou muitos outros e variados esboços de rosácea.

Definição 4: Uma *rosácea* é uma figura plana cujo grupo de simetrias é finito.

A classificação do grupo de simetrias de uma rosácea não é complicada. Na prática, apenas é necessário identificar o motivo que se repete em torno do centro de rotação e contar o número de repetições (n). Depois, resta verificar se só há simetrias de rotação (rosáceas ciclícas) ou se também há simetrias de reflexão (rosáceas diedrais).

Uma figura com grupo de simetria C_1 é considerada assimétrica (desprovida de simetria), uma vez que a única forma de a transformar em si própria é através da rotação trivial de 360/1 = 360º (ou, se preferirmos, de 0º). Já uma figura com grupo de simetria D_1, para além da rotação trivial, apresenta uma simetria de reflexão. Para

Figura 6: Diedros espelhados.

o grupo de simetria C_2, temos uma simetria de rotação de 360/2=180º e a rotação de 180+180=360º (ou seja, a rotação trivial). Para o grupo D_2, há ainda a considerar duas simetrias de reflexão (com eixos de simetria perpendiculares). Por sua vez, o grupo C_3 contém as rotações de 360/3=120º, 120+120=240º e 120+120+120=360º. Para o grupo D_3, há que acrescentar três simetrias de reflexão, e assim sucessivamente.

Há também desenhos infinitos com muita simetria, como são os casos dos frisos e dos padrões. Os frisos têm natureza unidimensional, podendo observar-se «partes de friso» nas mais variadas manifestações artísticas. Varandas antigas em metal exibem usualmente um tipo de simetria associado aos frisos (imaginando que a varanda se prolonga infinitamente nos dois sentidos, para a direita e para a esquerda). Outro exemplo típico relaciona-se com as tapeçarias tradicionais. Os padrões têm natureza bidimensional – o desenho cobre todo o plano. Também podemos observar «partes de padrão» em variadas manifestações

Figura 7: Friso da Rua do Ouro, em Lisboa. Em cima, fotografia (2007) de Dias dos Reis.

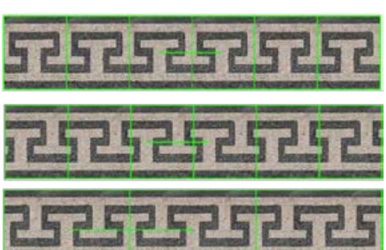


Figura 8: Motivos repetidos do friso da Rua do Ouro..

artísticas. São inúmeros os casos de praças em cidades por todo o mundo com pavimentos elegantes e simétricos. As paredes também são altamente propícias a obras do mesmo género.

Considere-se o friso existente, entre outros locais, na calçada da Rua do Ouro em Lisboa (Figura 7).

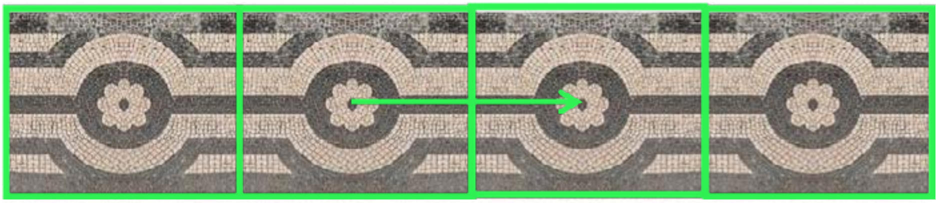
Imagine-se o friso prolongado infinitamente para a esquerda e para a direita. Uma simples inspeção visual permite perceber que existem translações que o deixam exatamente na mesma. Se movermos o friso segundo o vetor marcado a verde na parte superior da Figura 8, o desenho manter-se-á inalterado. Existem zonas do desenho (motivos) que se considerarmos repetidas segundo múltiplos inteiros do dito vetor (para a esquerda ou para a direita, conforme o inteiro seja negativo ou positivo), produzem o friso na totalidade. Estes motivos são a «ideia artística do friso». Repetem-se na sua globalidade, no desenho, nas cores e no posicionamento[5].

É importante salientar que não se pode falar de «o» motivo. O mesmo desenho pode ser pensado considerando motivos diferentes. A comparação entre a parte superior e parte central da Figura 8 elucida isso mesmo.

Mesmo em relação ao «comprimento» do vetor (norma ou módulo, como se diz em linguagem mais formal), é possível considerar várias hipóteses. Nas partes superior e central da Figura 8, foi considerado um vetor não nulo com o menor comprimento possível – vetor de módulo mínimo – no entanto, a ideia poderia ter sido apresentada com um vetor maior em norma, mas não seria «económico» nesse sentido – parte inferior da Figura 8.

Elencadas as ideias fundamentais relativas aos frisos, estamos em condições de apresentar a definição matemática.

Definição 4: Um *friso* é uma figura plana ilimitada verificando a seguinte condição: Existe um vector não nulo $\vec{v}$, tal que as possíveis translações



que deixam a figura inalterada são exatamente as translações segundo um múltiplo inteiro de $\vec{v}$.

Repare-se que, por definição, um friso tem de apresentar alguma simetria; um friso aceita pelo menos translações invariantes. Uma pergunta pertinente, que justifica a classificação dos frisos que explicaremos mais à frente, é a seguinte:

Além das translações, poderá um friso aceitar outras isometrias que o mantenham inalterado?

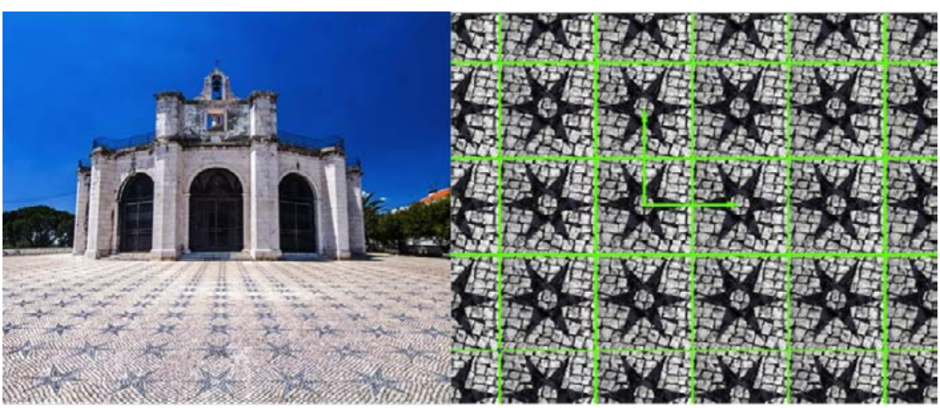
A resposta é afirmativa. Considere-se o exemplo lisboeta da Rua Nova do Almada (Figura 9).

É simples constatar de que se trata mesmo de um friso, na medida em que há um motivo que se repete sucessivamente ao longo de uma faixa. No entanto, este friso mantém-se inalterado através de outras isometrias além das translações referidas na definição; também aceita reflexões e meias voltas. São as isometrias «extra» que permitem elaborar uma elegante classificação dos frisos. Na realidade, é possível provar-se que existem exactamente 7 tipos de friso [2,5,8].

Na Figura 10, mostra-se o padrão que está na zona da Capela de Santo Amaro em Lisboa.

Figura 9: Friso da Rua Nova do Almada, Lisboa.

Figura 10: Padrão de Santo Amaro. Em cima, fotografia (2008) de António Dias dos Reis.



Novamente, imagine-se o padrão prolongado infinitamente por todo o plano. Uma simples inspeção visual permite perceber que existem translações que o deixam exatamente na mesma. Dada a sua natureza bidimensional, desta vez consideramos dois vetores marcados a verde. Na imagem, os motivos aparecem também delimitados a verde. Se movermos o padrão segundo múltiplos inteiros de qualquer um dos vetores ou segundo «misturas» (por exemplo, 3 verticais para cima juntamente com 4 horizontais para trás) o desenho manter-se-á inalterado. O termo técnico para estas «misturas» é «combinação linear com coeficientes inteiros».

Tal como no caso dos frisos, podemos considerar dois vetores não nulos de módulo mínimo. E, mais uma vez, não se pode falar de «o» motivo. Exatamente o mesmo desenho poderia ser pensado considerando motivos diferentes desfasados, tal como no exemplo apresentado para o caso dos frisos.

Definição 5: Um *padrão* é uma figura plana ilimitada verificando a seguinte condição: Existem dois vetores não nulos com direcções distintas $\vec{v}$ e $\vec{w}$, tais que as possíveis translações que deixam a figura inalterada são exactamente as translações segundo uma combinação linear com coeficientes inteiros de $\vec{v}$ e de $\vec{w}$.

A questão anteriormente colocada relativamente aos frisos, continua a ser premente no que diz respeito aos padrões:

Além das translações, poderá um padrão aceitar outras isometrias que o mantenham inalterado?

A resposta é novamente afirmativa. No caso dos padrões, a classificação envolve um número maior de casos distintos. Em 1891, o cristalógrafo russo Evgraf Fedorov (18531919) descreveu 17 tipos de padrão [3]. Ao longo dos tempos, muitos outros investigadores realizaram interessantes estudos e propuseram notações próprias [2,5,8].

4. Classificação das simetrias planas

Como visto anteriormente, a menos de número de repetições, há dois tipos de rosáceas essencialmente diferentes – cíclicas e diedrais. As rosáceas caem num dos dois tipos dependendo se, além de rotações, aceitam ou não reflexões.

Os frisos e os padrões também podem ser classificados usando as quatro isometrias do plano. A análise matemática destes objetos revelou a existência de 7 frisos e 17 padrões. Para os sete frisos pode ser usada, por exemplo, a notação do matemático húngaro László Fejes Tóth (19152005) ou a notação cristalográfica. O fluxograma relativo à sua classificação pode ver-se na Figura 11.

Considere-se o padrão da Praça do Município, em Lisboa (Figura 12).

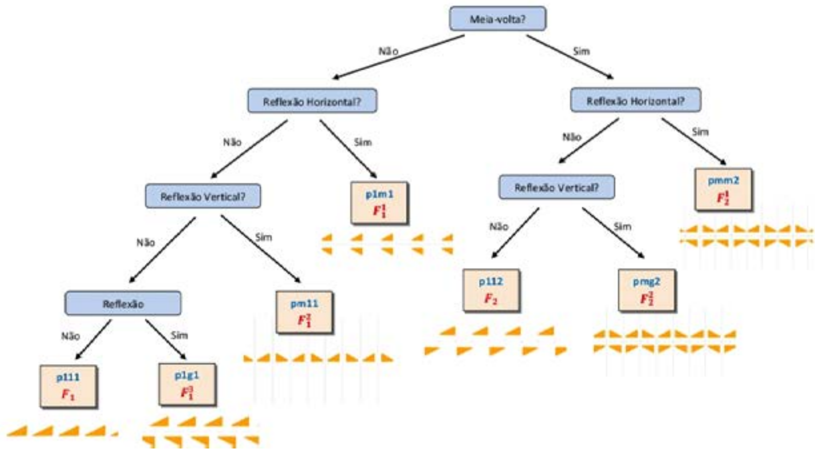


Figura 11: Fluxograma para a classificação matemática dos frisos.

Percorrendo o fluxograma, constata-se que o friso não aceita meia-volta, não aceita reflexão horizontal, mas aceita reflexão vertical (eixos a azul). Na notação de Tóth é designado por $F^2{}_1$.

Pode ver-se o fluxograma relativo aos dezassete padrões na Figura 13.

Considere-se o padrão da Praça do Município, em Lisboa (Figura 14).

Percorrendo o fluxograma, constata-se que o padrão aceita quartos de volta (centros a vermelho) e meia-volta (centro a verde). Além disso, aceita reflexões (eixos a verde). Finalmente, os centros de rotação pertencem a eixos de reflexão. Na notação de Tóth é designado por $W^4{}_1$.

Além das notações utilizadas nos fluxogramas das Figuras 13 e 15, há outras notações para explicitar as simetrias das figuras planas. O matemático William Thurston (19462012), medalha Fields em 1982, propôs uma notação especialmente útil para a descrição dos frisos e padrões (em inglês, *orbifold notation*).

Figura 12: Friso da calçada da Igreja de São Julião, Lisboa.

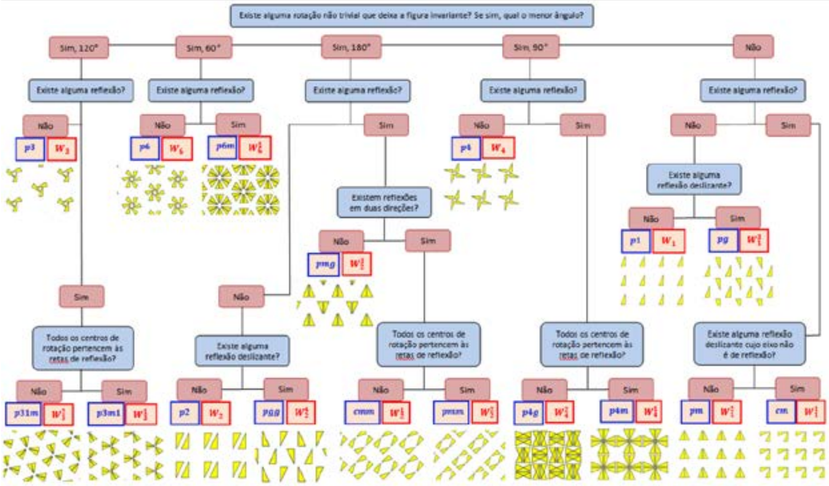
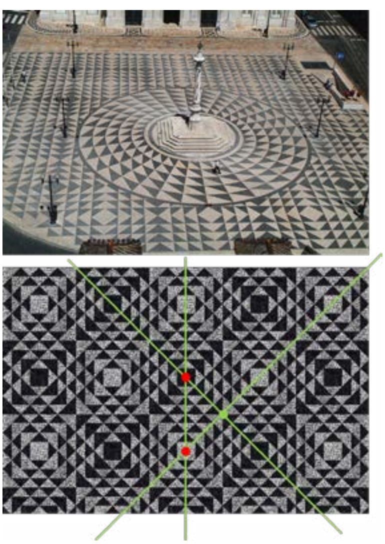


Figura 13: Fluxograma para a classificação matemática dos padrões.

Figura 14: Padrão da Praça do Município, Lisboa. Em cima, fotografia de Dias dos Reis. Motivo de Eduardo Nery (1938-2013).



A sua notação tem duas vantagens consideráveis: é intuitiva e está na base do elegante «Teorema Mágico», que descreveremos mais à frente. Mais tarde, John Horton Conway (1937), um dos maiores matemáticos vivos à data em que se escreve este artigo, foi coautor do lindíssimo livro *Symmetries of Things* (com Heidi Burgiel e GoodmanStrauss) [2]. Nessa obra, escrita de um ponto de vista avançado, podemos encontrar a análise de inúmeros conceitos matemáticos sofisticados relacionados com simetrias. O livro mencionado utiliza a notação de Thurston, sendo em larga medida um grande contributo para a divulgação da mesma.

Considere-se o padrão da calçada da Biblioteca Nacional, em Lisboa (Figura 15).

Para construir a sequência de símbolos de Thurston, o leitor deverá pensar primeiro nas rotações invariantes. No exemplo exposto na Figura 15, o padrão aceita duas rotações essencialmente diferentes de amplitude 180° (1/**2** de volta). Sendo assim, na simbologia de Thurston, terão de aparecer dois símbolos «**2**». Em segundo lugar, o leitor deverá pensar se o padrão aceita reflexões simples. Neste caso, verifica-se. Aceitando reflexões simples, a escrita deverá incluir o símbolo «O». Se o padrão não aceitasse nenhuma reflexão simples, não apareceria nenhum asterisco na escrita. Em terceiro lugar, observando que há centros que pertencem aos eixos de reflexão e que há centros que não pertencem, esse facto deve ser esclarecido na escrita. A notação de Thurston é posicional, no sentido em que os símbolos respeitantes a centros que não pertencem a eixos são colocados à esquerda do asterisco e os centros que pertencem a eixos são colocados à direita do asterisco. No caso concreto, a notação seria **2*2**, uma vez que um dos centros pertence ao eixo e o outro não pertence. Em quarto lugar, o leitor deverá ter atenção às reflexões deslizantes autónomas (as reflexões deslizantes correspondentes a reflexões simples compostas com uma translação fundamental ou a efeitos de meia volta não são contabilizadas). No caso em que há reflexões deslizantes autónomas é usado o símbolo «X». Quando o padrão não admite nenhuma simetria além das translações é usado o símbolo «O». Só se utilizam dois «» quando o padrão admite apenas duas reflexões simples distintas. Por exemplo, observando o padrão da Figura 14, facilmente se constata que o código é ***442**. Todos os números ficam à direita do «*», uma vez que todos os centros de rotação pertencem a eixos de reflexão.

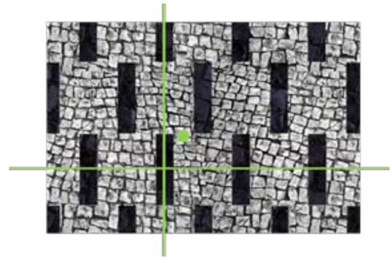
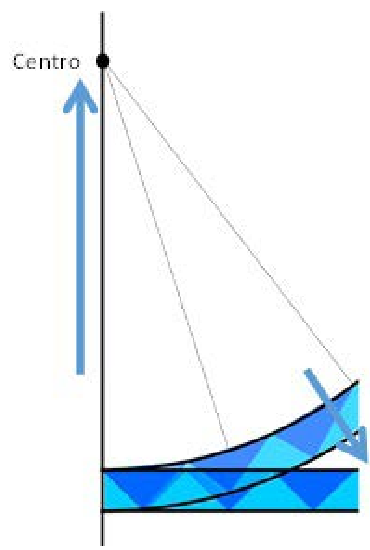


Figura 15: Padrão da calçada da Biblioteca Nacional, Lisboa.

Figura 16: Ponto infinito como centro de rotação invariante.



Antes de iniciar a explicação da notação de Thurston relativa aos frisos, convém esclarecer que, dada a sua natureza unidimensional, há pelo menos um centro de rotação a ser considerado. Considere-se a Figura 16, respeitante à rotação de uma zona de um friso.

Com um pequeno esforço de imaginação, é possível visualizar que quanto mais longe estiver o centro, mais a faixa rodada se adapta ao friso original. Devido a esse facto, dizse que os frisos aceitam sempre um ponto infinito (∞) como centro de rotação. Podem inclusivamente aceitar dois pontos ∞ no caso em que o friso não aceita nenhuma simetria horizontal (nem reflexão simples, nem reflexão deslizante, nem meia-volta). Tendo em conta o ponto infinito, a notação de Thurston funciona exatamente da mesma maneira também para os frisos. A Tabela 3 resume, nesta notação, todos os 7 frisos e 17 padrões.

17 tipos de padrão					7 tipos de friso		
*632	632	*442	442	*333	*22∞	22∞	2∞
333	*2222	2222	4*2	3*3	2*22	*∞∞	∞∞
22*	**	*X	XX	22X	O	∞*	∞X

Tabela 3: Frisos e padrões na notação de Thurston.

Para entender o enunciado do «Teorema Mágico» anteriormente mencionado, é necessário atribuir valores numéricos aos diversos símbolos da notação de Thurston.

1) Aos símbolos relacionados com as rotações, 2, 3, 4, 6 e ∞, são atribuídos os valores $^{n-1}/_{n}$ se se encontrarem à esquerda de um asterisco ou metade desses valores se se encontrarem à direita de um asterisco. No caso do ponto infinito, para n muito grande, $^{n-1}/_{n}$ resulta num valor próximo de 1. Sendo assim, o valor atribuído ao infinito é 1 se este estiver à esquerda de um asterisco, e ½ se este estiver à direita de um asterisco. A informação pode ser sintetizada como se mostra na Tabela 4.

Símbolo de rotação	Esquerda de *	Direita de *
2	1/2	1/4
3	2/3	1/3
4	3/4	3/8
6	5/6	5/12
∞	1	1/2

Tabela 4: Atribuição de valores relativa ao «Teorema Mágico».

2) Aos símbolos «*» e «X» é atribuído o valor 1.

3) Ao símbolo «O» é atribuído o valor 2.

Uma das tarefas mais importantes destinadas a um matemático consiste em encontrar e demonstrar resultados gerais, a partir de casos particulares. Quer isto dizer, a constatação de propriedades válidas para uma vasta família de objetos, com base em propriedades fundamentais que estes possam ter em comum. Por exemplo, o «Teorema de Pitágoras» aplica-se a todos os triângulos rectângulos, por muito diferentes que sejam em tamanho e forma.

De certa maneira, ao fazer isso, um matemático tem a sensação que captou algo que faz parte da «alma» dos objetos em estudo; separou o essencial do acessório. Esse processo é realmente fascinante.

O «Teorema Mágico» é algo desse género. Por muito diferente que possa ser a classificação de um friso ou de um padrão, uma coisa não muda: a soma dos valores atribuídos aos símbolos de Thurston resulta sempre em dois [2]. Enumerando todas as combinações possíveis de símbolos cuja soma resulte em 2, obtêm-se exatamente 24 possibilidades; os 17 padrões e os 7 frisos. Por exemplo, 3*3 resulta na soma 2/3+1+1/3 = 2. Outro exemplo, 632 resulta na soma 5/6+2/3+1/2 = 2. O mesmo para todos os outros casos. Parece que se pode dizer que a arte plana, matematicamente falando, se resume ao número 2!

5. As simetrias da calçada portuguesa num baralho de cartas

A calçada portuguesa é altamente original no domínio dos pavimentos públicos. Tratase de um chão em pedra, baseado em calcários dispostos de forma homogénea. Alia durabilidade, utilidade e beleza.

A dita originalidade deve-se aos motivos utilizados – motivos geométricos, motivos figurativos, motivos alusivos a atividades, motivos regionais – e à competência técnica e estética do artífice que efetua o assentamento, o calceteiro.

A calçada portuguesa é uma herança histórica da técnica de construção romana, de que existem inúmeros exemplos em Portugal, como a estrada romana situada em Alqueidão da Serra. Podem destacar-se dois momentos fundamentais de florescimento da calçada portuguesa; a criação das chamadas «Ruas Novas» junto às áreas ribeirinhas no reinado de D. João II (séc. XIV) e o grande terramoto de Lisboa em 1755, em que se assistiu à abertura de novas ruas, bem como a recuperação de ruas antigas (maior desenvolvimento desta temática em [4,6]).

Muitos passeios portugueses são bonitos frisos, padrões, ou rosáceas. Em Lisboa, é muito fácil pisar configurações altamente simétricas, susceptíveis do tipo de análise matemática exposto nas secções anteriores. O projeto *Simetria Passo a Passo*, levado a cabo em 2010 por Ana Cannas da Silva e apoiado pela Fundação Calouste Gulbenkian [9], fez um primeiro levantamento matemático relativo a estas obras lisboetas. Até 23 de Junho de 2010, todos os 7 frisos, rosáceas cíclicas, rosáceas diedrais e 11 dos 17 padrões tinham sido encontrados na capital de Portugal, faltando apenas os 632, 333, *333, 22X, 4*2 e O (notação de Thurston). Uma sequela do projeto *Simetria Passo a Passo* é o livro *Simetria Passo a Passo – Calçadas de Portugal* [1], lançado pela mesma autora em 2016.

Recentemente, os autores deste trabalho encontraram um exemplo em falta, classificado como «O». Sendo assim, atualmente, há 5 padrões não identificados em Lisboa.

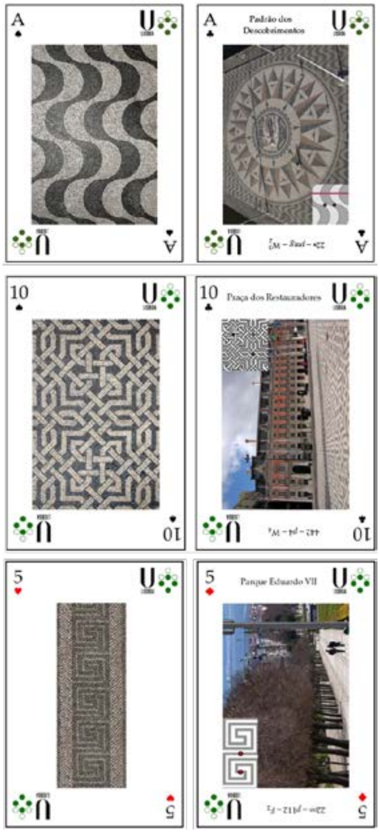


Figura 17: Algumas cartas do Baralho de Simetria - Calçadas de Lisboa.

Repare-se que os 7 frisos, 17 padrões e 2 rosáceas (diedral e cíclica) originam um total de 26 objetos. Como 26 é o número de cartas de 2 naipes de um baralho usual, a Associação Ludus e a Universidade de Lisboa lançaram em 2014 um baralho baseado nesta coincidência. O *Baralho de Simetria - Calçadas de Lisboa* é uma iniciativa de divulgação, procurando fazer chegar esta temática ao maior número de pessoas possível.

O baralho tem cartas–problema (espadas e copas) e cartas–solução (paus e ouros). Cada carta–problema tem um motivo. O objetivo do desafio consiste em tentar identificar uma zona de Lisboa com esse motivo, bem como classificar matematicamente o pavimento. As cartas estão organizadas por cores. Por exemplo, a solução do 10 de espadas está no 10 de paus; a solução do Ás de copas está no Ás de ouros.

As cartas–solução mostram um local de Lisboa onde existe o motivo proposto nas cartas-problema respetivas (local que pode não ser único). A classificação matemática é explicitada em três notações – Thurston, cristalográfica e Tóth.

Na Figura 17 mostram-se alguns exemplos. Em cima, o padrão *Mar Largo*, proposto pelo tenente-general Eusébio Furtado Pinheiro (17771861) ¾ esse padrão aparece um pouco por todo o mundo [4,6]. Para o baralho, a escolha recaiu na envolvência da pavimentação do icónico Padrão dos Descobrimentos. Trata-se de um traçado branco e preto que tenta recriar o ritmo das ondas do mar. Ao centro, o bonito padrão entrelaçado de João Abel Manta (1928-), presente na Praça dos Restauradores. Em baixo, o friso da faixa lateral do Parque Eduardo VII, obra levada a cabo pelo arquiteto Francisco Keil do Amaral (1910-1975).

Há 5 padrões em Lisboa por identificar. Por essa razão há 5 cartas abstratas. Os locais imaginários foram batizados com os nomes dos 5 sólidos platónicos.

Há um local muito interessante no Rossio dos Olivais, no Parque das Nações em Lisboa.

O pavimento, em calçada portuguesa, utiliza o desenho de um curso de água, levado a cabo pelo artista Fernando Conduto [10]. Na Figura 18, mostra-se uma panorâmica do *Google Earth*. Toda a via se trata de um friso em calçada portuguesa, como se de um canal de água se tratasse. Na curva, há um «desaguar» para um padrão. A unidimensionalidade transforma-se em bidimensionalidade, uma metamorfose artística.

A construção artística transmite a ideia de que a água corre para o rio. Primeiro num canal (em calçada), depois numa «abertura» (também em calçada) e, finalmente, a «mistura» imaginária com o rio Tejo, que está logo ali. Essa construção pede uma rara mistura friso/padrão ¾ um friso é especialmente adequado para a parte do canal, um padrão é especialmente indicado para a parte da abertura.

Para levar a cabo a obra, foram utilizados 6 módulos (parte superior da Figura 19). Os módulos M1 e M2, utilizados no friso, têm uma fina faixa escura por razões logísticas; serve para melhor ligarem com outra zona do local. Essencialmente, os módulos M1 e M2 são iguais aos módulos M3 e M4. Sendo assim, o que é importante é analisar os módulos M3, M4, M5 e M6.

O artista, de forma inteligente, desenhou os módulos de forma a poderem ser conectados de mais do que uma forma. Dessa maneira, foi possível servirem simultaneamente a abordagem unidimensional e bidimensional. Por um lado, os módulos M3, M4, M5 e M6, podem ser conectados em forma de quadrado, de maneira a formarem o motivo de um friso de tipo «∞∞» (parte central da Figura 19). Por outro lado, os módulos M3 e M4 podem ser conectados em forma de retângulo, de maneira a formarem o motivo de um padrão de tipo «O» (parte inferior da Figura 19). Esta dualidade só funciona devido ao facto de os módulos M3 e M4 terem sido desenhados para poderem ligar *tanto na horizontal como na vertical*. Pode ver-se, na Figura 20, a explicação da dupla utilização sobre a planta utilizada na obra.

Figura 18: Friso e padrão.

Figura 19: Em cima, módulos utilizados na calçada do Rossio dos Olivais, no Parque das Nações.

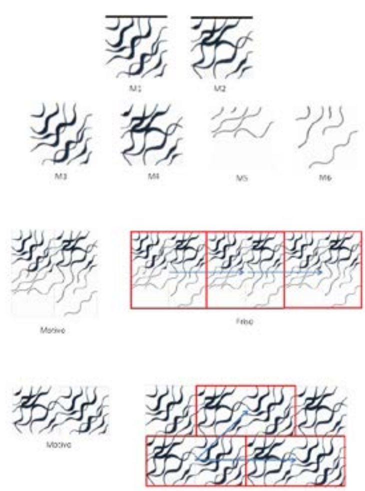


Figura 20: Explicação matemática da planta do Rossio dos Olivais.

Por esse motivo, esse cantinho de Lisboa onde se dá a «abertura ao rio» trata-se de um padrão de tipo «O», sem simetrias a não ser translações, colocado no valete de ouros, carta fatal do filme *The Cincinnati Kid*.

Para ajudar na classificação, uma das cartas do baralho é um espelho. A própria caixa do baralho tem um ambigrama. Podem ver-se em [11] alguns vídeos de exemplificação, a globalidade das cartas-problema e das cartas-solução, e a distribuição dos motivos escolhidos em Lisboa.

Agradecimentos

Nas Figuras 9, 12 e 16, foram utilizados trabalhos de António Dias Reis [12], a quem agradecemos a disponibilidade total.

Nas Figuras 6 e 14, foram utilizadas fotografias do Arquivo Municipal de Lisboa, a quem também agradecemos.

Agradecemos ao artista Fernando Conduto a amável prontidão com que acedeu a uma questão sobre o seu trabalho no Rossio dos Olivais.

Em algumas imagens, foi utilizado um software de geometria dinâmica [13] para a reconstrução de alguns motivos vistos de cima. Dada a dificuldade de obtenção de boas fotografias nessas condições, o procedimento revelou-se bastante adequado.

Notas

[1] acarvalho@adm.isel.pt

[2] cmfsantos@fc.ul.pt

[3] jnsilva@cal.berkeley.edu

[4] ricardo.ec.teixeira@uac.pt

[5] Existem classificações que contemplam a possibilidade de mudanças de cor (ver, por exemplo, [2], capítulo 11).

Referências

[1] Cannas da Silva, A. *Simetria Passo a Passo – Calçadas de Portugal*, Edições CTT, 2016.

[2] Conway, J., Burgiel, H., Goodman-Strauss, C. *The Symmetries of Things*, A K Peters, 2008.

[3] Fedorov, E. *The Simmetry of Regular Systems of Figures* (russo), A. Yakob, St. Petersburg Mineral Soc., Series 2, 1891.

[4] Henriques, A., Moura, A., Santos, F. *The Portuguese Pavements Handbook*, Direcção Geral de Energia e Geologia, 2009.

[5] Martin, G. *Transformation Geometry: An Introduction to Symmetry*, New York, Springer-Verlag, 1982.

[6] Matos, E. *Calçada Portuguesa/ Portuguese Stone Pavement of Portugal*, Sessenta e Nove Manuscritos, 2011.

[7] Simões, C. *Ciência a Brincar 5 – Descobre a Matemática*, Bizâncio, 2006.

[8] Umble, R., Han, Z. *Transformational Plane Geometry*, Series Textbooks in Mathematics, Taylor & Francis Group / CRC Press, 2014.

[9] http://www.math.ist.utl.pt/~acannas/Simetria

[10] http://www.portaldasnacoes.pt/item/fernando-conduto-1

[11] https://sites.google.com/site/cpshomepage/matematica-recreativa/recreational-mathematics/matematica-recreativa-2/matematica-recreativa-3/matematica-recreativa-4/matematica-recreativa-6

[12] http://www.pbase.com/diasdosreis

[13] https://www.geogebra.org

Contactar autor (a) – ver notas 1, 2, 3 e 4