UNIVERSIDADE DOS AÇORES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FACTORIZAÇÕES REFLECTIVAS, ADMISSIBILIDADE E DESCIDA EM CATEGORIAS DE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS ORDENADOS

Margarida de Jesus Silva Raposo Dias

PONTA DELGADA

2004

FACTORIZAÇÕES REFLECTIVAS, ADMISSIBILIDADE E DESCIDA EM CATEGORIAS DE ESPAÇOS TOPOLÓGICOS ORDENADOS

Margarida de Jesus Silva Raposo Dias

Dissertação submetida à Universidade dos Açores para obtenção do grau de Doutor em Matemática na especialidade de Álgebra, orientada pela Professora Doutora Maria Manuela Oliveira de Sousa Antunes Sobral da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra.

PONTA DELGADA

2004

Agradecimentos

Agradeço profundamente à Professora Doutora Manuela Sobral, minha orientadora, pela disponibilidade, dedicação, conselhos e palavras de incentivo que sempre teve para comigo durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Doutor George Janelidze, pelo tempo disponibilizado e pelas valiosas sugestões.

À minha família, pelo apoio e afecto que sempre me transmitem.

Aos meus colegas e amigos, por me terem ajudado a ultrapassar alguns obstáculos.

Ao Departamento de Matemática da Universidade dos Açores, agradeço as condições disponibilizadas para a realização deste trabalho.

Ao Centro de Matemática da Universidade de Coimbra, agradeço o apoio concedido.

Ao júri, presidido pelo Senhor Vice-Reitor, Doutor Jorge Manuel Rosa de Medeiros (por delegação do Reitor), e aos vogais, Doutora Maria Manuela Oliveira de Sousa Antunes Sobral, professora catedrática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra; Doutor Jorge Manuel Senos da Fonseca Picado, professor associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra; Doutora Júlia Maria Antunes Loureiro Vaz de Carvalho, professora associada da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa; Doutora Helena de Fátima Sousa Melo, professora auxiliar da Universidade dos Açores; e Doutora Maria Isabel de Oliveira Marques Ribeiro, professora auxiliar da Universidade dos Açores, agradeço as críticas e sugestões feitas a esta dissertação.

Resumo

A inclusão $E : CHausOrd \to CHausPreord$ é plena, e a categoria Psp dos espaços de Priestley é também uma subcategoria plena de $CHausOrd$, o que nos permite obter a reflexão $CHausOrd \to Psp$ por composição de E com a composição das reflexões $CHausPreord \to StonePreord$, $StonePreord \to PPreord$ e $PPreord \to Psp$, que são aqui estudadas com pormenor. Estabelecemos semelhanças e diferenças entre a reflexão $CHausOrd \to Psp$ e a reflexão correspondente para as ordens triviais, $CHaus \to Stone$, nomeadamente o facto de a primeira não ser nem regular epireflectiva nem admissível.

Caracterizamos os morfismos de descida na categoria $PPreord$ dos espaços de Stone pré-ordenados que são totalmente desconexos em relação à pré-ordem, e em Psp. Provamos que um morfismo de Psp é morfismo de descida efectiva nessa categoria se e só se for morfismo de descida efectiva em $PPreord$.

A categoria dos espaços de Priestley surge na equivalência induzida por uma adjunção dual entre $TopOrd$ e $Ret_{0,1}$. Ela é também uma subcategoria de $TopPreord$ cujos objectos são limite de determinados espaços pré-ordenados finitos e discretos.

A reflexão $E-$*completamente regular ordenado* $\to$ $E-$*compacto ordenado*, quando E é o espaço ordenado discreto $2 = \{0 < 1\}$, dá-nos uma terceira forma de obter espaços de Priestley: a categoria dos espaços 2-compactos ordenados é exactamente Psp.

Abstract

The full inclusion functor $E : CHausOrd \to ChausPreord$ and the fact that the category Psp is also a full subcategory of $CHausOrd$ gives us the reflection $CHausOrd \to Psp$ through the composition of E with the composition of the reflections $CHausPreord \to StonePreord$, $StonePreord \to PPreord$, and $PPreord \to Psp$, which are described here in detail. We state similarities and differences between the reflection $CHausOrd \to Psp$ and the corresponding reflection for the trivial orders, $CHaus \to Stone$, namely that the former reflection is not regular epireflective and not admissible.

We characterize the descent morphisms in the categories $PPreord$ of preordered Stone spaces which are totally disconnected with respect to the preorder, and in Psp. We prove that a morphism in Psp is an effective descent morphism in this category if and only if it is an effective descent morphism in $PPreord$.

The induced equivalence by the dual adjunction between $TopOrd$ and $Ret_{0,1}$ lead us to the category of Priestley spaces. This category is also a subcategory of $TopPreord$ whose objects are limits of suitable finite discrete preordered spaces, the category of limits of all such preordered spaces being exactly $PPreord$.

The reflection E*–ordered completely regular* $\to$ E*–ordered compact*, when E is the ordered discrete space $2 = \{0 < 1\}$, gives us another way to obtain Priestley spaces: the category of 2-ordered compact spaces is exactly Psp.

Conteúdo

Introdução

A Dualidade de Priestley pode ser descrita como a equivalência induzida, num sentido que tornaremos preciso mais adiante, por uma adjunção entre a categoria dos espaços topológicos ordenados $TopOrd$ e a categoria dual da dos reticulados limitados $Ret_{0,1}$. De forma análoga, a Dualidade de Stone é a equivalência induzida pela adjunção correspondente para as ordens triviais, isto é, a adjunção entre a categoria Top dos espaços topológicos e $Ret_{0,1}$. No segundo caso, a adjunção e a equivalência dual determinam a reflexão da categoria $CHaus$ dos espaços compactos de Hausdorff na categoria $Stone$ dos espaços de Stone, também chamados espaços profinitos. No primeiro caso, pelo mesmo processo, obtém-se a reflexão de $CHausOrd$ na categoria Psp dos espaços de Priestley.

A reflexão de $CHaus$ em $Stone$ bem como as propriedades das categorias envolvidas, nomeadamente a existência de um sistema de factorização reflectivo por ela induzido em $CHaus$ bem como do sistema que dele advém por localização/estabilização, é um exemplo importante de reflexão onde o processo referido conduz à factorização monótona-leve, que é apresentado com pormenor em [CJKP97] por Carboni, Janelidze, Kelly e Paré.

O estudo da reflexão correspondente da categoria $CHausOrd$ em Psp foi o tema proposto por M. Sobral e G. Janelidze e ponto de partida deste trabalho. Uma generalização crucial consistiu na substituição de ordem por pré-ordem. As novas categorias $CHausPreord$ e $PPreord$ permitiram-nos analisar semelhanças e diferenças entre as reflexões referidas e os contextos em que elas são definidas.

Nas primeiras secções do Capítulo 1 apresentamos conceitos e resultados gerais utilizados em todo o trabalho. A secção 7 contém um estudo pormenorizado de aspectos dos espaços topológicos ordenados (pré-ordenados), importantes no desenvolvimento deste trabalho. O teorema final, que generaliza os resultados anteriores, é relativo a espaços de uma subcategoria plena $\mathcal{C}$ de Top equipados com uma ordem (pré-ordem), $\mathcal{C}Ord$ ($\mathcal{C}Preord$). Razões para a passagem de Ord a $Preord$ são evidentes em 1.7.2, 1.7.3 e 1.7.4.

Na secção 8 estudam-se as categorias Psp dos espaços de Priestley e a categoria $PPreord$ dos espaços de Stone pré-ordenados que são totalmente desconexos em relação à pré-ordem. Tal como $Stone$ é a subcategoria plena de Top dos espaços limites de espaços finitos e discretos([BJ90]) provamos que $PPreord$ é constituída pelos espaços que são limite de espaços finitos discretos e pré-ordenados. Daí se deduz, em 1.8.8, que os espaços de Priestley são limite de determinados espaços finitos discretos e pré-ordenados.

No Capítulo 2 a adjunção dual entre $TopOrd$ e $Ret_{0,1}$ é estudada em 2.1. Em 2.2 mostramos que a equivalência induzida é a Dualidade de Priestley. Através da adjunção e da dualidade obtém-se a reflexão $CHausOrd \to Psp$.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo da reflexão $CHausOrd \to Psp$. Nele começamos por analisar o caso das ordens triviais $CHaus \to Stone$. Mostramos que ela também pode ser obtida através da adjunção correspondente entre Top e $Ret_{0,1}$ e da dualidade de Stone. Diferenças e semelhanças são referidas, nomeadamente o facto de não ser nem regular epireflectiva nem admissível. As reflexões $CHausPreord \to StonePreord$ e $StonePreord \to PPreord$ são estudas nas secções 3.2 e 3.3, respectivamente. Mostramos que elas não são admissíveis e apresentamos, para a primeira, uma classe de morfismos para a qual ela é admissível. Na secção 3.4 provamos que a reflexão $PPreord \to Psp$ tem unidades estáveis. Finalmente, como a inclusão $E : CHausOrd \to CHausPreord$ é plena e a categoria Psp é também uma subcategoria plena de $CHausOrd$, obtém-se a reflexão $CHausOrd \to Psp$ por composição de E com a composição das reflexões atrás mencionadas.

No Capítulo 4 caracterizamos morfismos de descida em $PPreord$ e Psp e provamos que um morfismo de Psp é morfismo de descida efectiva nessa categoria se e só se for morfismo de descida efectiva em $PPreord$.

No Capítulo 5 descrevemos o sistema de factorização reflectivo induzido em $PPreord$ pela reflexão $PPreord \rightarrow Psp$, tendo como base o estudo do sistema de factorização reflectivo induzido em $Preord$ pela reflexão $Preord \rightarrow Ord$, realizado por Xarez em [Xar03].

No último capítulo começamos por estudar "E-compactificações" para um espaço E de Hausdorff. Na terminologia introduzida por Engelking e Mrówka ([EM58]) definem-se as subcategorias plenas de Top:

E*-completamente regular* dos subespaços de produtos de cópias de E e $E - compacto$ dos subespaços fechados de tais produtos.

Temos então a reflexão E*-completamente regular*$\rightarrow$ E*-compacto*, a "E-compactificação". Se E é o espaço discreto $2 = \{0, 1\}$, elas são as categorias dos espaços zero-dimensionais e dos espaços de Stone, respectivamente. Também aqui Psp substitui $Stone$ quando consideramos o espaço ordenado discreto $2 = \{0 < 1\}$: a categoria dos espaços 2-compactos ordenados é exactamente Psp.

1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados gerais que são utilizados ao longo de todo o trabalho. Nomeadamente são referidos a noção e as propriedades da adjunção, admissibilidade em estruturas de Galois, sistemas de pré-factorização e de factorização, monacidade, relações binárias internas, e resultados sobre espaços de Stone. Espaços topológicos ordenados e espaços de Priestley são estudados com pormenor nas duas últimas secções. Terminamos este capítulo apresentando uma forma de construir espaços de Priestley através de determinados espaços pré-ordenados finitos.

1.1 Adjunções

Dadas duas categorias e functores $F : \mathcal{X} \to \mathcal{A}$, $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, temos uma *adjunção* se existe uma função φ que a cada par de objectos $X \in \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{A}$ faz corresponder uma função bijectiva

$$\varphi = \varphi_{X,A} : \mathcal{A}(FX, A) \cong \mathcal{X}(X, GA)$$

natural em X e em A.

Esta noção, usada ao longo de todo este trabalho, é muito importante e pode ser definida de várias formas ([Mac97], IV.1). Na proposição que se segue referimos as formas que são utilizadas neste trabalho.

Proposição 1.1.1 *Uma adjunção* $< F, G, \varphi >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ *fica completamente determinada por qualquer um dos items da seguinte lista:*

(i) O functor $G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ *e para cada* $X \in \mathcal{X}$ *um objecto* $F_0X \in \mathcal{A}$ *e o morfismo universal* $\eta_X : X \to GF_0X$ *de* X *para* G*. Então o functor* F *tem função objecto* F_0 *e é definido nos morfismos* $h : X \to X'$ *por* $GFh \circ \eta_X = \eta_{X'} \circ h$*.*

(ii) Functores F*,* G *e transformações naturais* $\eta : I_{\mathcal{X}} \to GF$ *e* $\epsilon : FG \to I_{\mathcal{A}}$ *tais que* $G\epsilon \circ \eta G = I_G$ *e* $\epsilon F \circ F\eta = I_F$*. A adjunção* $< F, G, \varphi >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ *é, nesse caso, denotada por* $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$*.*

Numa adjunção $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$, o functor F diz-se *adjunto à esquerda* de G e G *adjunto à direita* de F. Frequentemente são usadas outras notações tais como $F \dashv G : \mathcal{A} \to \mathcal{X}$, $F \dashv G(\eta, \epsilon)$ e

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{A} \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

sendo η a unidade e ϵ a counidade da adjunção.

Proposição 1.1.2 *Se os functores* $G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *e* $G' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *têm adjuntos à esquerda* F *e* F'*, respectivamente, então* FF' *é adjunto à esquerda de* $G'G$*.*

Dada uma subcategoria $\mathcal{A}$ de uma categoria $\mathcal{B}$, as funções imersão, que a cada objecto e a cada morfismo de $\mathcal{A}$ fazem corresponder os próprios em $\mathcal{B}$, definem um functor $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, o *functor inclusão*.

Ao longo da tese as subcategorias consideradas são *subcategorias plenas* e *repletas*, isto é o respectivo functor inclusão é pleno e são subcategorias fechadas para isomorfismos.

Uma subcategoria $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ diz-se *reflectiva* em $\mathcal{B}$ quando o functor inclusão $E : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tem adjunto esquerdo $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$. O functor R é chamado functor *reflector* e a adjunção $< R, E, \eta, \epsilon >: \mathcal{B} \rightharpoonup \mathcal{A}$ diz-se a *reflexão* de $\mathcal{B}$ em $\mathcal{A}$. Em particular, a reflexão diz-se *epireflectiva* (*regular epireflectiva*) quando as componentes da unidade da adjunção são epimorfismos (epimorfismos regulares, isto é, morfismos que são co-igualizadores de algum par de morfismos).

Toda a subcategoria plena e repleta $\mathcal{X}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é fechada para limites ([Mac97]). Relativamente a colimites, todo o diagrama em $\mathcal{X}$ que tem colimite em $\mathcal{C}$ tem também, por reflexão, colimite em $\mathcal{X}$ tal como indicamos seguidamente para co-igualizadores.

Proposição 1.1.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com co-igualizadores. Dada uma subcategoria plena, repleta e reflectiva $\mathcal{X}$ de $\mathcal{C}$ e $(f,g) : X \to X'$ um par de morfismos em $\mathcal{X}$, o morfismo $r_Q \circ q$, com $q : X' \to Q$ co-igualizador do par (f,g) em $\mathcal{C}$ e r_Q a componente da unidade da reflexão associada a Q, é co-igualizador do par de morfismos (f,g) em $\mathcal{X}$.*

Demonstração: Seja $q : X' \to Q$ o co-igualizador em $\mathcal{C}$ do par de morfismos (f,g), consideremos o seguinte diagrama

$$X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} X' \xrightarrow{q} Q \xrightarrow{r_Q} R(Q),$$

como $q \circ f = q \circ g$, também $(r_Q \circ q) \circ f = (r_Q \circ q) \circ g$ e $r_Q \circ q \in \mathcal{X}$. Seja $h : X' \to X''$ um morfismo em $\mathcal{X}$ tal que $h \circ f = h \circ g$. Como q é co-igualizador do par (f,g) em $\mathcal{C}$, então existe um único morfismo $h' : Q \to X''$ tal que $h' \circ q = h$. Mas r_Q é componente da unidade da reflexão, logo existe um único morfismo $h'' : R(Q) \to X''$ em $\mathcal{X}$ tal que $h'' \circ r_Q = h'$. Portanto $h'' \circ (r_Q \circ q) = h$ e é o único morfismo que satisfaz esta igualdade. Supondo que existe $l : R(Q) \to X''$ tal que $l \circ (r_Q \circ q) = h$, então $l \circ r_Q = h'' \circ r_Q = h'$, porque q é epimorfismo e $l = h''$ pela unicidade de h''. Portanto $r_Q \circ q$ é co-igualizador do par (f,g) em $\mathcal{X}$. $\square$

Uma adjunção $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ é uma *equivalência* se a unidade $\eta : I_{\mathcal{X}} \to GF$ e a co-unidade $\epsilon : FG \to I_{\mathcal{A}}$ são isomorfismos naturais. Duas categorias dizem-se *equivalentes* se existe uma tal adjunção ([Mac97], IV.4).

Proposição 1.1.4 *Toda a adjunção $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{B}$ induz uma equivalência $< F_1, G_1, \eta', \epsilon' >: \mathcal{A}_1 \rightharpoonup \mathcal{B}_1$ entre $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{B}_1$ que são as subcategorias plenas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ definidas por:*

(i) $X \in \mathcal{A}_1$ *se e só se* η_X *é um isomorfismo em* $\mathcal{A}$.

(ii) $Y \in \mathcal{B}_1$ *se e só se* ϵ_Y *é um isomorfismo em* $\mathcal{B}$.

que são também subcategorias repletas.

Demonstração: Seja $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{A} \rightharpoonup \mathcal{B}$ uma adjunção e $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_1$ as subcategorias plenas de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ satisfazendo (i) e (ii), respectivamente.

Seja $X \in \mathcal{A}_1$, então $\eta_X : X \to GFX$ é um isomorfismo em $\mathcal{A}$, logo $F\eta_X : FX \to FGFX$ é um isomorfismo. Assim existe o isomorfismo $(F\eta_X)^{-1} : FGFX \to FX$ tal que $(F\eta_X)^{-1} \circ F\eta_X = Id_{FX}$ e $F\eta_X \circ (F\eta_X)^{-1} = Id_{FGFX}$.

Sabendo que $\epsilon F \circ F\eta = Id_F$ temos que

$$\begin{aligned}
\epsilon FX \circ F\eta_X = Id_{FX} \quad &\Rightarrow \quad \epsilon FX \circ F\eta_X \circ (F\eta_X)^{-1} = Id_{FX} \circ (F\eta_X)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad \epsilon FX \circ Id_{FGFX} = (F\eta_X)^{-1} \\
&\Rightarrow \quad \epsilon FX = (F\eta_X)^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $(F\eta_X)^{-1}$ é isomorfismo, ϵFX é isomorfismo, logo $FX \in B_1$.

De forma análoga, tem-se que se $Y \in \mathcal{B}_1$ então $GY \in A_1$.

Assim obtemos uma adjunção $< F_1, G_1, \eta', \epsilon' >: \mathcal{A}_1 \rightharpoonup \mathcal{B}_1$, onde $F_1(X) = F(X)$, $F_1(f) = F(f)$ e $\eta'_X = \eta_X$, para todo o objecto e morfismo de $\mathcal{A}_1$, e $G_1(Y) = G(Y)$, $G_1(g) = G(g)$ e $\epsilon'_Y = \epsilon_Y$, para todo o objecto e morfismo de $\mathcal{B}_1$. $\square$

1.2 Admissibilidade e unidades estáveis

Nesta secção referimos alguns conceitos e resultados relativos às estruturas categoriais de Galois introduzidos por G. Janelidze em [Jan90]. Para informação detalhada ver [BJ01]. Em particular, averiguamos a admissibilidade e a existência de unidades estáveis de diversas adjunções.

Uma adjunção $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X}$ juntamente com duas classes de morfismos (chamadas *fibrações*) $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ em $\mathcal{C}$ e $\mathcal{X}$, respectivamente, tais que

- $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são classes estáveis para produtos fibrados e existem produtos fibrados ao longo de morfismos de $\mathcal{K}$ e de $\mathcal{S}$;
- $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ são classes fechadas para a composição e contêm todos os isomorfismos;
- $F(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{S}$ e $G(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{K}$

constitui uma *estrutura de Galois* na categoria $\mathcal{C}$.

Uma estrutura de Galois numa categoria $\mathcal{C}$ é *admissível* se para todo o objecto C em $\mathcal{C}$ e toda a fibração $\phi : X \to F(C)$ em $\mathcal{X}$ a composição dos morfismos canónicos

$$F(C \times_{GF(C)} G(X)) \to FG(X) \to X$$

é um isomorfismo.

Sejam $\mathcal{K}$ e $\mathcal{S}$ as classes de todos os morfismos de codomínio B e $F(B)$, respectivamente. Se $\mathcal{C}/B$ e $\mathcal{X}/F(B)$ são as correspondentes categorias na adjunção associada a uma reflexão admissível $< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X}$,

$$< F^B, G^B, \eta^B, \epsilon^B >: \mathcal{C}/B \rightharpoonup \mathcal{X}/F(B)$$

o functor G^B induz uma equivalência $\mathcal{X}/F(B) \sim \mathcal{M}/B$ onde $\mathcal{M}$ é constituída pelos morfismos $\alpha : A \to B$ para os quais $\eta^B_{(A,\alpha)}$ é um isomorfismo. Este facto, bem como os que lhe correspondem para fibrações particulares, é um resultado central da teoria referida ([BJ01] 5.1 e [CJKP97] 5.).

Consideremos $\mathcal{K} = Mor(\mathcal{C})$ e $\mathcal{S} = Mor(\mathcal{X})$.

Proposição 1.2.1 *Uma reflexão plena, isto é uma adjunção*

$$< F, G, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X} \tag{1.1}$$

cuja co-unidade ϵ é isomorfismo, é admissível se e só se F preserva produtos fibrados da forma

$$\begin{tikzcd}
B \times_{GF(B)} G(X) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"'] & GF(B)
\end{tikzcd}$$

com $X \in \mathcal{X}$.

Definição 1.2.2 *Diz-se que a reflexão (1.1) tem unidades estáveis quando o functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{X}$ preserva qualquer produto fibrado da forma*

$$\begin{tikzcd} A \times_{G(X)} B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & G(X) \end{tikzcd}$$

Proposição 1.2.3 *Se a reflexão (1.1) tem unidades estáveis e a co-unidade $\epsilon : FG \to I_{\mathcal{X}}$ é um isomorfismo, então a adjunção é admissível.*

1.3 Monacidade

Uma *mónada* $\mathbb{T}$ numa categoria $\mathcal{X}$ é um terno (T, η, μ) constituído por um functor $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ e duas transformações naturais $\eta : I_{\mathcal{X}} \to T, \mu : T^2 \to T$ tais que, para todo o objecto $X \in \mathcal{X}$, os diagramas

$$\begin{tikzcd} T^3X \arrow[r, "T\mu_X"] \arrow[d, "\mu_{TX}"'] & T^2X \arrow[d, "\mu_X"] \\ T^2X \arrow[r, "\mu_X"] & TX \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TX \arrow[r, "\eta_{TX}"] \arrow[dr, "I_{TX}"'] & T^2X \arrow[d, "\mu_X"] & TX \arrow[l, "T\eta_X"'] \arrow[dl, "I_{TX}"] \\ & TX & \end{tikzcd}$$

são comutativos.

Dada uma mónada em $\mathcal{X}$, uma $\mathbb{T}$-*álgebra* é um par (X, ξ) constituído por um objecto X e um morfismo $\xi : TX \to X$ em $\mathcal{X}$, chamado o morfismo de estrutura, para o qual os diagramas

$$\begin{tikzcd} T^2X \arrow[r, "T\xi"] \arrow[d, "\mu_X"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ TX \arrow[r, "\xi"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "I_X"'] & TX \arrow[d, "\xi"] \\ & X \end{tikzcd}$$

são comutativos.

Um $\mathbb{T}$-*morfismo* entre duas $\mathbb{T}$-álgebras, (X, ξ) e (Y, θ), é um morfismo $f : X \to Y$ em $\mathcal{X}$ para o qual o diagrama

$$\begin{tikzcd} TX \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\xi"'] & TY \arrow[d, "\theta"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Para qualquer mónada $\mathbb{T}$ numa categoria $\mathcal{X}$ as $\mathbb{T}$-álgebras e os $\mathbb{T}$-morfismos constituem uma categoria, denotada por $\mathcal{X}^{\mathbb{T}}$, e o functor de esquecimento $U^{\mathbb{T}} : \mathcal{X}^{\mathbb{T}} \to \mathcal{X}$ tem adjunto à esquerda

$$\begin{array}{rccc} F^{\mathbb{T}} : & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X}^{\mathbb{T}} \\ & X & \longmapsto & (TX, \mu_X) \\ & f & \longmapsto & Tf \end{array}$$

com unidade $\eta^{\mathbb{T}}_X = \eta_X$, para cada $X \in \mathcal{X}$, e co-unidade $\epsilon^{\mathbb{T}}_{(Y,\theta)} = \theta$, para cada $(Y, \theta) \in \mathcal{X}^{\mathbb{T}}$.

Proposição 1.3.1 *Se $< F, U, \eta, \epsilon >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ é uma adjunção então existe uma mónada $\mathbb{T}$ em $\mathcal{X}$ definida da seguinte forma:*

- $T = UF$;
- $\eta : I_{\mathcal{X}} \to UF$;
- $\mu = U\epsilon F : UFUF \to UF$.

Nota: Toda a adjunção induz uma mónada e, reciprocamente, toda a mónada é induzida por (em geral por mais do que) uma adjunção. Em particular a adjunção definida por $(U^{\mathbb{T}}, F^{\mathbb{T}})$ induz a mónada $\mathbb{T}$ em $\mathcal{X}$.

Teorema 1.3.2 *Dada uma adjunção $< F, U, \eta, \epsilon >: \mathcal{X} \rightharpoonup \mathcal{A}$ seja $\mathbb{T}$ a mónada por ela induzida em $\mathcal{X}$. Então existe um functor $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{X}^{\mathbb{T}}$ definido por*

$\Phi(A) = (UA, U\epsilon_A)$ e $\Phi(f) = Uf$. Ele é o único functor para o qual $U^{\mathbb{T}} \circ \Phi = U$ e $\Phi \circ F = F^{\mathbb{T}}$, ou seja para o qual o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, shift left, "U"] & & \mathcal{X}^{\mathbb{T}} \arrow[dl, shift right, "U^{\mathbb{T}}"'] \\
& \mathcal{X} \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift right, "F^{\mathbb{T}}"'] &
\end{tikzcd}$$

O functor Φ chama-se *functor de comparação* de Eilenberg-Moore. Este functor permite "avaliar" a algebricidade da categoria $\mathcal{A}$ relativamente à mónada induzida pela adjunção em causa.

Um functor com adjunto à esquerda diz-se *pré-monádico* se o functor de comparação Φ é fiel e pleno e diz-se *monádico* se Φ é uma equivalência.

Da teoria das mónadas referimos seguidamente alguns factos que serão frequentemente utilizados neste trabalho.

Proposição 1.3.3 *(i) O functor Φ é pré-monádico se e só se as componentes da co-unidade da adjunção são epimorfismos regulares.*

(ii) Todo o functor monádico reflecte isomorfismos.

1.4 Sistemas de factorização

Enunciamos, aqui, definições e resultados sobre sistemas de pré-factorização e de factorização usando as notações e resultados referidos por Carboni, Janelidze, Kelly e Paré em [CJKP97].

Um *sistema de factorização* numa categoria $\mathcal{C}$ é um par $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, onde $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ são classes de morfismos de $\mathcal{C}$, tal que todo o morfismo de $\mathcal{C}$ se factoriza de forma única segundo um morfismo de $\mathcal{E}$ seguido de um morfismo de $\mathcal{M}$. Mais precisamente, se $f \in \mathcal{C}$ então $f = m \circ e$ com $m \in \mathcal{M}$ e $e \in \mathcal{E}$ e, se $f = m' \circ e'$ é outra factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ então existe um único isomorfismo g tal que $g \circ e = e'$

e $m' \circ g = m$.

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[rd, "m"] \arrow[dd, dashed, "g"] & \\
A \arrow[ru, "e"] \arrow[rr, "f"] \arrow[rd, "e'"'] & & B \\
 & C' \arrow[ru, "m'"'] &
\end{tikzcd}$$

Dados morfismos p e i, numa categoria $\mathcal{C}$, dizemos que p é *ortogonal* ao morfismo i, e escrevemos $p \downarrow i$, se para todo o par de morfismos u, v tais que $v \circ p = i \circ u$ existe um único morfismo w que torna o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \bullet \arrow[d, "v"] \arrow[ld, "w"] \\
\bullet \arrow[r, "i"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

comutativo.

Para cada classe $\mathcal{H}$ de morfismos na categoria $\mathcal{C}$ considera-se as seguintes classes de morfismos

$\mathcal{H}^{\uparrow} = \{p | p \downarrow h$ para todo $h \in \mathcal{H}\}$ e $\mathcal{H}^{\downarrow} = \{i | h \downarrow i$ para todo $h \in \mathcal{H}\}$.

Um *sistema de pré-factorização* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ em $\mathcal{C}$ é o par de classes de morfismos para as quais $\mathcal{E} = \mathcal{M}^{\uparrow}$ e $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{\downarrow}$. Um *sistema de factorização* é um sistema de pré- factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ tal que qualquer morfismo $f \in \mathcal{C}$ se factoriza na forma $f = m \circ e$ com $m \in \mathcal{M}$ e $e \in \mathcal{E}$. Em resumo, classes de morfismos em $\mathcal{C}$ constituem sistemas de factorização se verificam as condições da seguinte proposição.

Proposição 1.4.1 *Classes de morfismos $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ constituem sistemas de factorização se e só se*

(i) $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ contêm todos os isomorfismos;

(ii) $\mathcal{E}$ e $\mathcal{M}$ são fechadas para a composição;

(iii) todo o morfismo f de $\mathcal{C}$ se factoriza como $f = m \circ e$ com $m \in \mathcal{M}$, $e \in \mathcal{E}$;

(iv) $e \downarrow m$, *com* $e \in \mathcal{E}, m \in \mathcal{M}$.

Em particular, se todo o morfismo $f : A \to B$ numa categoria $\mathcal{C}$ se factoriza na forma $f = m \circ e$ sendo m monomorfismo e e epimorfismo regular então a categoria $\mathcal{C}$ tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$. De facto, a classe $\mathcal{E}$ dos epimorfismos regulares e a classe $\mathcal{M}$ dos monomorfismos numa categoria $\mathcal{C}$ contêm os isomorfismos de $\mathcal{C}$, portanto satisfazem a condição (i). Essas classes também satisfazem (iv): se $e =$ co-ig(u, v) e $m \circ s = t \circ e$ com $m \in \mathcal{M}$ então,

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & A \arrow[r, "e"] \arrow[d, "s"'] & C \arrow[d, "t"] \\ & C' \arrow[r, "m"'] & D \end{tikzcd}$$

como m é um monomorfismo e $m \circ s \circ u = m \circ s \circ v$, vem que $s \circ u = s \circ v$. Portanto, por definição de co-igualizador, existe um único morfismo $d : C \to C'$ tal que $d \circ e = s$. Além disso $m \circ d \circ e = m \circ s = t \circ e$ implica que $m \circ d = t$, sendo d o único morfismo nessas condições, como é fácil verificar.

Admitindo que todo o morfismo de $\mathcal{C}$ tem uma factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, isto é a condição (iii), resta provar (ii). Dados $e_1 : A \to B$ e $e_2 : B \to C$ com $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ suponhamos que $e_2 \circ e_1 = m \circ e$ é a factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ de $e_2 \circ e_1$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, "e"'] & B \arrow[r, "e_2"] \arrow[dl, dashed, "d_1"'] & C \arrow[d, equal] \arrow[dll, dashed, "d_2"] \\ D \arrow[rr, "m"] & & C \end{tikzcd}$$

Por (iv) existe d_1 tal que $d_1 \circ e_1 = e$ e $m \circ d_1 = e_2$. De $m \circ d_1 = e_2$ e (iv) deduz-se a existência de um único d_2 tal que $d_2 \circ e_2 = d_1$ e $m \circ d_2 = 1_C$. Como m é monomorfismo e epimorfismo cindido é um isomorfismo, portanto $e_2 \circ e_1 \in \mathcal{E}$.

Em qualquer categoria a classe $\mathcal{M}$ é fechada para a composição, pois a composição de monomorfismos é sempre um monomorfismo.

Proposição 1.4.2 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$. Se $\mathcal{X}$ é uma subcategoria plena, repleta e regular epireflectiva de $\mathcal{C}$ então* *(i)* $\mathcal{X}$ *tem factorizações* $(EpiReg, Mono)$*;*

(ii) o functor inclusão preserva e reflecte epimorfismos regulares;

(iii) se $m : C \to X$ *é monomorfismo em* $\mathcal{C}$ *e* $X \in \mathcal{X}$ *então* $C \in \mathcal{X}$*.*

Proposição 1.4.3 *Para um sistema de factorização* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ *numa categoria* $\mathcal{C}$ *tem-se as seguintes propriedades:*

(i) $f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{M} \Rightarrow f$ *é um isomorfismo;*

(ii) a factorização $f = m \circ e, m \in \mathcal{M}, e \in \mathcal{E}$*, de um morfismo* f *de* $\mathcal{C}$ *é única a menos de um isomorfismo;*

(iii) $f \in \mathcal{M}$ *se e só se* $e \downarrow f$*, com* $e \in \mathcal{E}$*;*

(iv) $f \circ g \in \mathcal{M}$ *e* $f \in \mathcal{M} \Rightarrow g \in \mathcal{M}$*,*

(v) no produto fibrado

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "n"] \arrow[d, "a"] & \bullet \arrow[d, "b"] \\ \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet \end{tikzcd}$$

se $m \in \mathcal{M}$*, então* $n \in \mathcal{M}$*.*

As propriedades duais de *(iii), (iv), (v)* são válidas para morfismos em $\mathcal{E}$. A propriedade *(v)* não é em geral válida para morfismos da classe $\mathcal{E}$. Os sistemas que verificam essa propriedade, isto é, tais que a classe $\mathcal{E}$ é estável para produtos fibrados designam-se por *sistemas de factorização estáveis.*

1.5 Relações binárias internas

Definição 1.5.1 *Seja* $\mathcal{C}$ *uma categoria. Uma relação binária interna em* $X \in \mathcal{C}$ *é um objecto* $R \in \mathcal{C}$ *juntamente com um par de morfismos conjuntamente monomórfico*

$$R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} X$$

Definição 1.5.2 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos binários.*

Um par $R \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ de morfismos numa categoria $\mathcal{C}$ (ou o morfismo induzido pelo produto $< f, g >: R \to X \times X$), diz-se uma relação de pré-ordem em X se

(i) (f, g) é um par de morfismos monomórfico, isto é $< f, g >$ é um monomorfismo;

(ii) existe um morfismo $\delta : X \to R$ tal que $f \circ \delta = 1_X$, $g \circ \delta = 1_X$;

(iii) existe um morfismo $\sigma : R \times_X R \to R$ tal que $f \circ \sigma = f \circ \rho_1$, $g \circ \sigma = g \circ \rho_2$, onde o produto fibrado é o apresentado no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} R \times_X R \arrow[r, "\rho_2"] \arrow[d, "\rho_1"'] & R \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

Definição 1.5.3 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos binários.*

Um par $R \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} X$ de morfismos de $\mathcal{C}$ (ou o morfismo induzido pelo produto $< f, g >: R \to X \times X$), diz-se uma relação de equivalência em X se

(i) (f, g) é um par de morfismos monomórfico, isto é $< f, g >$ é um monomorfismo;

(ii) a diagonal $\Delta : X \to X \times X$ factoriza-se através de $< f, g >$;

(iii) existe um morfismo $t : R \to R$ tal que $f \circ t = g$ e $g \circ t = f$;

(iv) para o diagrama produto fibrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & R \arrow[d, "f"] \\ R \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

$< f \circ f', g \circ g' >: A \to X \times X$ factoriza-se através de $< f, g >$.

Definição 1.5.4 *Uma relação de equivalência diz-se efectiva se é o par núcleo de algum morfismo.*

1.6 Espaços de Stone

Um espaço topológico X diz-se

- *totalmente desconexo* se os únicos subconjuntos conexos de X são os subconjuntos singulares;
- *totalmente separado* se para quaisquer dois pontos distintos de X existe um subconjunto aberto-fechado de X que contém um e não contém o outro;
- *zero dimensional* se os subconjuntos abertos-fechados de X formam uma base para a topologia.

Proposição 1.6.1 *Para um espaço topológico X são equivalentes as seguintes condições:*

(i) X é compacto, Hausdorff e totalmente desconexo;

(ii) X é compacto e totalmente separado;

(iii) X é compacto, T_0 e zero dimensional.

Um *espaço de Stone*, também chamado *espaço profinito,* é um espaço topológico satisfazendo uma e, portanto, todas as condições da proposição anterior. Denotamos por $Stone$ a subcategoria plena da categoria dos espaços topológicos constituída por estes espaços. Sendo uma subcategoria reflectiva ([BJ01] 3.4.4) ela é fechada para produtos e subespaços. Efectivamente, $Stone$ é uma subcategoria regular epireflectiva de $CHaus$, tendo, portanto, as propriedades referidas em 1.4.2.

1.7 Espaços topológicos ordenados

Tal como em [DP90] um terno $(X, \tau, \leq)$ diz-se um *espaço topológico ordenado* (*pré-ordenado*) se (X, τ) é um espaço topológico e $(X, \leq)$ é um conjunto parcialmente ordenado (pré-ordenado).

Neste trabalho não utilizamos a definição de espaço topológico ordenado (pré-ordenado) de L. Nachbin ([Nac65]) visto não incluirmos a condição de a relação de ordem (pré-ordem) ser fechada em $X \times X$. No entanto essa condição surge naturalmente em determinados tipos de espaços como veremos.

A categoria $TopOrd$ é a categoria cujos objectos são os espaços topológicos ordenados e os morfismos são as aplicações contínuas que preservam a ordem e o mesmo para $TopPreord$.

Proposição 1.7.1 *As categorias $TopOrd$ e $TopPreord$ são completas.*

Demonstração: Dado um conjunto $\{(X_i, \tau_i, \leq_i) | i \in I\}$ de espaços topológicos ordenados o seu produto é o terno $(X, \tau, \leq)$, onde $X = \prod_{i \in I} X_i$ é o produto dos conjuntos subjacentes, τ é a topologia produto e $(x_i)_{i \in I} \leq (y_i)_{i \in I}$ se e só se $x_i \leq_i y_i$ para todo o $i \in I$, munido das projecções $p_i : (X, \tau, \leq) \to (X_i, \tau_i, \leq_i)$. Como o espaço singular é objecto terminal em $TopOrd$, concluímos que esta categoria tem produtos.

O igualizador em $TopOrd$ de $f, g : (X, \tau, \leq) \to (Y, \tau, \leq)$ é o par (E, i) onde $E = \{x | f(x) = g(x)\}$ é o subconjunto de X equipado com a topologia e a ordem de subespaço de X e $i : E \to X$ é a inclusão.

Sendo uma categoria com produtos e igualizadores $TopOrd$ tem limites ([Mac97], capV 2, teorema 2), isto é, é uma categoria completa. E o mesmo se verifica para $TopPreord$. $\square$

O functor de esquecimento $U : TopPreord \to Top$ preserva limites. O resultado seguinte dá-nos uma boa razão para esse facto e diz-nos que U também preserva colimites.

Proposição 1.7.2 *O functor $U : TopPreord \to Top$ tem adjunto à esquerda e adjunto à direita.*

Demonstração: Os functores $F, G : Top \to TopPreord$ definidos em objectos por $F(X, \tau) = (X, \tau, \Delta_X)$, onde $\Delta_X = \{(x, x) | x \in X\}$, e $G(X, \tau) = (X, \tau, X \times X)$ são o adjunto à esquerda e o adjunto à direita, respectivamente. $\square$

Seja $Preord$ a categoria dos conjuntos pré-ordenados e das funções que preservam as pré-ordens. Denotemos por R_X o subconjunto $\{(x, x')|x \preceq x'\}$ de $X \times X$ para $(X, \preceq) \in Preord$.

Lema 1.7.3 *([JS02] 2.2) Um morfismo $f : (X, \preceq) \to (Y, \preceq)$ é um epimorfismo regular em $Preord$ se e só se $f(X) = Y$ e R_Y é o fecho transitivo de $f \times f(R_X)$.*

Usamos também $\preceq_X$ para denotar R_X.

Seja $V : TopPreord \to Preord$ o functor de esquecimento.

Proposição 1.7.4 *O morfismo $f : (X, \tau, \preceq) \to (Y, \tau, \preceq)$ é um epimorfismo regular em $TopPreord$ se e só se Uf é epimorfismo regular em Top e Vf é epimorfismo regular em $Preord$.*

Demonstração: Se f é um epimorfismo regular em $TopPreord$ então f é o co-igualizador do seu par núcleo (π_1, π_2) e, por 1.7.2, $(U\pi_1, U\pi_2)$ é o par núcleo de Uf e Uf é o co-igualizador de $(U\pi_1, U\pi_2)$. Além disso, supondo que R_Y contém estritamente o fecho transitivo de $f \times f(R_X)$, seja Y' o espaço com o mesmo espaço topológico subjacente de Y e $R_{Y'}$ o fecho transitivo de $f \times f(R_X)$. O morfismo $f' : X \to Y'$ definido por $f'(x) = f(x)$, para todo o $x \in X$, é tal que $f' \circ \pi_1 = f' \circ \pi_2$ mas não se factoriza através de f. Consequentemente, f não é co-igualizador de (π_1, π_2).

Reciprocamente, se Uf e Vf são epimorfismos regulares em Top e $Preord$, respectivamente, e $g \circ \pi_1 = g \circ \pi_2$ em $TopPreord$, então existe um morfismo $h \in Top$ tal que $h \circ f = g$.

Além disso, se $y \preceq y'$ em Y, pela lema anterior, existe uma sequência finita

$$x_0 \preceq x'_0, x_1 \preceq x'_1, \ldots, x_n \preceq x'_n$$

em X tal que $y = f(x_0), f(x'_i) = f(x_{i+1})$, para $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e $y' = f(x'_n)$. Então $h(y) = g(x_0) \preceq g(x'_0) = g(x_1) \preceq \ldots \preceq g(x'_n) = h(y')$ e, pela transitividade, $h(y) \preceq h(y')$. Portanto, $h \in TopPreord$ e é o único morfismo que satisfaz a condição $h \circ f = g$. $\square$

Proposição 1.7.5 *$TopOrd$ é uma subcategoria plena e regular epireflectiva de $TopPreord$*

Demonstração: Para $X = (X, \tau, \preceq)$ em $TopPreord$ define-se uma relação de equivalência em X da seguinte forma

$$x \sim x' \Leftrightarrow x \preceq x' \text{ e } x' \preceq x$$

e toma-se $I(X) = (X/\sim, \tau, \leq)$ onde $X/\sim$ é o conjunto quociente, τ é a topologia quociente relativamente à projecção canónica $p_X : X \to X/\sim$ e $\leq$ é o fecho transitivo de $p_X \times p_X(R_X)$, que é uma ordem em $X/\sim$. Então $p_X : X \to I(X)$ é a reflexão de X em $TopOrd$. Além disso, por 1.7.4, p_X é um epimorfismo regular sendo portanto $TopOrd$ uma subcategoria plena e regular epireflectiva de $TopPreord$. □

Seja $\mathcal{C}Preord$ a subcategoria plena de $TopPreord$ cujos objectos são ternos $(X, \tau, \preceq)$ tais que (X, τ) é objecto da subcategoria plena $\mathcal{C}$ de Top. Denotamos por U e V os correspondentes functores de esquecimento de $\mathcal{C}Preord$ em $\mathcal{C}$ e em $Preord$.

As proposições desta secção são casos particulares das que reunimos no teorema que se segue.

Teorema 1.7.6 *Em $\mathcal{C}Preord$*

(i) O functor $U : \mathcal{C}Preord \to \mathcal{C}$ tem adjunto à esquerda e à direita;

(ii) um functor $D : I \to \mathcal{C}Preord$ tem limite se e só se $UD : I \to \mathcal{C}$ tem limite em $\mathcal{C}$;

(iii) se $\mathcal{C}$ é fechada para produtos fibrados um morfismo $f \in \mathcal{C}Preord$ é epimorfismo regular se e só se Uf e Vf são epimorfismos regulares em $\mathcal{C}$ e em $Preord$, respectivamente;

(iv) se, para $(X, \tau, \preceq) \in \mathcal{C}Preord$, $X/\sim$ com a topologia quociente pertence ainda a $\mathcal{C}$ então $\mathcal{C}Ord$ é uma subcategoria regular epireflectiva de $\mathcal{C}Preord$.

1.8 Espaços de Priestley

Seja X um espaço topológico ordenado (pré-ordenado). Um subconjunto I de X diz-se *decrescente* em X se

$$x, y \in X, y \in I \text{ e } x \leq y \Rightarrow x \in I.$$

Denotamos por $AFD(X)$ o conjunto dos subconjuntos abertos-fechados decrescentes de X.

Definição 1.8.1 *O espaço topológico ordenado (pré-ordenado) $(X, \tau, \leq)$ diz-se totalmente desconexo em relação à ordem (pré-ordem) se dados $x, y \in X$ tais que $y \not\leq x$ existe um subconjunto U aberto-fechado decrescente de X tal que $x \in U$ e $y \notin U$.*

Proposição 1.8.2 *Todo o espaço totalmente desconexo em relação à ordem é espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço totalmente desconexo em relação à ordem. Vejamos que é de Hausdorff.

Sejam $x, y \in X$ tais que $x \neq y$.

Suponhamos que $y \not\leq x$. Então, como $(X, \tau, \leq)$ é totalmente desconexo em relação à ordem, existe U, subconjunto aberto-fechado decrescente de X, tal que $x \in U$ e $y \notin U$.

Sendo U aberto-fechado, $X - U$ é aberto-fechado. Como $y \notin U$, então $y \in X - U$. Assim existem os abertos U, $X - U$ tais que $x \in U$, $y \in X - U$ e $U \cap (X - U) = \emptyset$, ou seja (X, τ) é espaço de Hausdorff. $\square$

Proposição 1.8.3 *Todo o subespaço de um espaço totalmente desconexo em relação à ordem é ainda totalmente desconexo em relação à ordem.*

Demonstração: Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço topológico totalmente desconexo em relação à ordem. Seja A um subespaço de X.

Vejamos que A é ainda totalmente desconexo em relação à ordem.

Sejam $a, a' \in A$ tais que $a \not\leq a'$. Então existe $U \in AFD(X)$ tal que $a' \in U$ e $a \notin U$. Se U é aberto-fechado decrescente de X então $U \cap A$ é aberto-fechado decrescente de A, e assim A é totalmente desconexo em relação à ordem. $\square$

Proposição 1.8.4 *O espaço produto de espaços topológicos totalmente desconexos em relação à ordem é ainda um espaço totalmente desconexo em relação à ordem.*

Demonstração: Sejam $(X_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos ordenados totalmente desconexos em relação à ordem.

Vejamos que o espaço topológico produto, $\prod_{i\in I} X_i$, é totalmente desconexo em relação à ordem.

Sejam $(x_i)_{i\in I}$, $(y_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tais que $(x_i)_{i\in I} \not\leq (y_i)_{i\in I}$. Então existe um índice $i_0 \in I$ para o qual $x_{i_0} \not\leq y_{i_0}$. Em X_{i_0} existe $U_{i_0} \in AFD(X_{i_0})$ tal que $y_{i_0} \in U_{i_0}$ e $x_{i_0} \notin U_{i_0}$.

Fazendo $U_i = X_i$, para todo o $i \neq i_0$, em $U = \prod_{i\in I} U_i$, U é um subconjunto aberto-fechado decrescente do espaço produto, $\prod_{i\in I} X_i$, tal que $(y_i)_{i\in I} \in U$ e $(x_i)_{i\in I} \notin U$. Logo o espaço produto considerado é totalmente desconexo em relação à ordem. $\square$

Um *espaço de Priestley* é um espaço topológico ordenado, compacto e totalmente desconexo em relação à ordem, portanto os espaços de Priestley são espaços de Stone visto serem espaços compactos, Hausdorff e totalmente desconexos.

Denotamos por Psp a subcategoria plena de $TopOrd$ constituída pelos espaços de Priestley.

Proposição 1.8.5 *Se X é um espaço totalmente desconexo em relação à ordem então a relação é fechada.*

Demonstração: Seja $(X, \tau, \leq)$ um espaço totalmente desconexo em relação à ordem e seja $R_X = \{(x, y) \in X \times X | x \leq y\}$. Mostremos que R_X é um subconjunto fechado de $X \times X$.

Consideremos $A = (X \times X) - R_X$ e vejamos que A é um aberto de $X \times X$.

Seja $(x, y) \in A$, isto é $x \not\leq y$. Como X é um espaço totalmente desconexo em relação à ordem, existe U aberto-fechado decrescente de X tal que $y \in U$ e $x \notin U$. Logo existe um subconjunto aberto de $X \times X$, $(X - U) \times U$, que contém (x, y). Vejamos que $(X - U) \times U \subseteq A$.

Seja $(a, b) \in (X - U) \times U$. Suponhamos que $(a, b) \notin A$. Então $a \leq b$, como $b \in U$ e U é decrescente, tem-se $a \in U$, o que é um absurdo. $\square$

Em particular, num espaço de Priestley a relação de ordem é interna. De facto, R_X sendo um subespaço fechado de $X \times X$ é compacto e totalmente desconexo em relação à ordem. Além disso Psp é uma subcategoria plena de $TopOrd$.

Um espaço finito e discreto é um espaço de Priestley relativamente a qualquer ordem.

F. Borceux e G. Janelidze, em [BJ01] 3.4.7, caracterizam os espaços de Stone como sendo limites de espaços topológicos finitos e discretos. Para obter uma "versão ordenada" deste resultado, seguindo um raciocínio semelhante, temos que passar a um patamar mais elevado de generalidade e considerar os espaços de Stone pré-ordenados que são totalmente desconexos em relação à pré-ordem. A correspondente subcategoria plena de $TopPreord$ vai ser denotada por $PPreord$.

Proposição 1.8.6 *As categorias Psp e $PPreord$ são completas.*

Demonstração: Como o produto de espaços compactos é compacto, de 1.8.4 e atendendo a que o objecto terminal de $TopOrd$ e $TopPreord$ (o espaço ordenado singular) é o terminal em Psp e em $PPreord$, vem que estas categorias têm produtos.

De 1.8.2 e 1.8.3 conclui-se que o igualizador de qualquer par de morfismos em Psp ou $PPreord$ ainda pertence a essas categorias: basta ver que no igualizador (E, i) do par $f, g : X \to Y$, E é um subconjunto fechado de X (porque estamos a trabalhar com espaços Hausdorff) portanto compacto.

Concluímos portanto que Psp e $PPreord$ tendo produtos e igualizadores têm todos os limites. $\square$

Teorema 1.8.7 *Um espaço topológico pré-ordenado é objecto de $PPreord$ se e só se é limite de espaços pré-ordenados finitos e discretos.*

Demonstração: Um espaço finito e discreto é compacto. Ele é também totalmente desconexo em relação a qualquer pré-ordem (tal como a qualquer ordem). Pela proposição anterior concluímos que o limite de espaços pré-ordenados finitos e discretos é ainda um objecto de $PPreord$.

Reciprocamente, seja $X \in PPreord$ e $\mathcal{R}$ o conjunto das relações de equivalência R em X tais que o espaço topológico quociente X/R relativamente à projecção canónica $p_R : X \to X/R$ é finito e discreto. Considerando o conjunto $\mathcal{R}$ ordenado por inclusão como uma categoria seja

$$D : \mathcal{R} \to PPreord$$

o functor definido por $D(R) = X/R$, o espaço quociente com a relação de pré-ordem que é o fecho transitivo de $p_R \times p_R(\preceq_X)$.

Se $R \subseteq R'$ temos um morfismo $X/R \to X/R'$ definido por $[x]_R \mapsto [x]_{R'}$, denotando por $[x]_R$ e por $[x]_{R'}$ as correspondentes classes de equivalência de $x \in X$.

Seja $(\lambda_R : L \to X/R)_{R\in\mathcal{R}}$ o limite de D. Como $(p_R : X \to X/R)_{R\in\mathcal{R}}$ é um cone de X para D, pela definição de limite, existe um único morfismo g em $PPreord$ tal que $\lambda_R \circ g = p_R$ para todo o $R \in \mathcal{R}$.

Pelo teorema 3.4.7 em [BJ01], g é um homeomorfismo. Suponhamos agora que $g(x) \preceq g(y)$ e que $x \not\preceq y$. Então, porque X é totalmente desconexo em relação à pré-ordem, existe U subconjunto aberto-fechado decrescente de X tal que $y \in U$ e $x \notin U$.

Tomemos a relação de equivalência R_U em X correspondente à partição $\{U, X - U\}$. Então $R_U \in \mathcal{R}$. Vejamos que $[x]_{R_U} \not\preceq [y]_{R_U}$.

Suponhamos que $[x]_{R_U} \preceq [y]_{R_U}$, então existem
$x'_1 \preceq x_1, x'_2 \preceq x_2, \ldots, x'_n \preceq x_n$ tais que

$[x'_1]_{R_U} = [x]_{R_U}, [x_1]_{R_U} = [x'_2]_{R_U}, \ldots, [x_n]_{R_U} = [y]_{R_U}$.

Assim, como $y \in U$ então $x_n \in U$ e, também, $x'_n \in U$, pois U é um subconjunto decrescente. Aplicando o mesmo raciocínio sucessivamente temos também $x'_1 \in U$.

Por outro lado, $x \notin U$ logo $x \in X - U$, e, como $[x'_1]_{R_U} = [x]_{R_U}$, também $x'_1 \in X - U$. O que é um absurdo.

Assim existe uma relação de equivalência $R_U \in \mathcal{R}$ tal que $[x]_{R_U} \not\leq [y]_{R_U}$, portanto $g(x) \not\leq g(y)$.

Portanto X é limite de espaços topológicos pré-ordenados finitos e discretos, a menos de um isomorfismo. □

Partindo de um espaço de Priestley X, as relações induzidas em X/R pelo fecho transitivo podem não ser, e não são em geral, relações de ordem. Contudo o limite L sendo isomórfico em $PPreord$ a X é ordenado: considerando os espaços pré-ordenados X/R, mais precisamente o correspondente diagrama em $PPreord$ definido pela categoria $\mathcal{R}$ e o seu limite em $PPreord$ obtemos o espaço de Priestley X de que partimos.

Assim, o teorema anterior dá-nos uma forma de construir espaços de Priestley.

Corolário 1.8.8 *Todo o espaço de Priestley é limite de espaços finitos, discretos e pré-ordenados.*

2

Adjunção dual entre $TopOrd$ e $Ret_{0,1}$

Seja $TopOrd$ a categoria dos espaços topológicos ordenados e das aplicações contínuas que preservam a ordem, definida na secção 1.7. $Ret_{0,1}$ denota a categoria cujos objectos são os reticulados limitados e que tem por morfismos os homomorfismos de reticulados que preservam o zero e o um.

Vamos estabelecer uma adjunção entre $TopOrd$ e a categoria dual da categoria $Ret_{0,1}$ cuja equivalência induzida, no sentido de 1.1.4, é exactamente a dualidade de Priestley. Daí se deduz a reflexão da categoria $CHausOrd$ dos espaços compactos Hausdorff ordenados em Psp.

2.1 Adjunção entre $TopOrd$ e $Ret_{0,1}^{op}$

O conjunto $2 = \{0, 1\}$ com a ordem $0 < 1$ é um reticulado limitado, que denotamos por 2_r. O mesmo conjunto ordenado equipado com a topologia discreta é um espaço topológico ordenado, denotado por 2_t.

Para um objecto L de $Ret_{0,1}$, consideremos o conjunto $Hom(L, 2_r)$ com a ordem ponto a ponto, isto é $f \leq g$ se e só se $f(a) \leq g(a)$ para todo o $a \in L$, sendo a topologia a menor topologia na qual todos os subconjuntos

$$U_a = \{f \in Hom(L, 2_r) | f(a) = 1\}, a \in L \tag{2.1}$$

e os seus complementos são subconjuntos abertos.

Proposição 2.1.1 *Existe um functor $U : Ret_{0,1}^{op} \to TopOrd$ que a cada $L \in Ret_{0,1}$ faz corresponder o espaço topológico $Hom(L, 2_r)$ e a todo o morfismo $f : L \to K$ em $Ret_{0,1}$ faz corresponder o morfismo $U(f) : Hom(K, 2_r) \to Hom(L, 2_r)$ definido por $U(f)(g) = g \circ f$.*

Demonstração: De facto, para todo o morfismo $f : L \to K$ em $Ret_{0,1}$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} Uf: & Hom(K, 2_r) & \longrightarrow & Hom(L, 2_r) \\ & g & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

é contínua e preserva a ordem, pois sejam $g, h \in Hom(K, 2_r)$ tais que $g \leq h$, isto é $g(b) \leq h(b)$ para todo o $b \in K$.

Seja $a \in L$.

$Uf(g)(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a)) \leq h(f(a)) = (h \circ f)(a) = Uf(h)(a)$. Então $Uf(g) \leq Uf(h)$, isto é Uf preserva a ordem.

Mostremos que Uf é uma aplicação contínua.

Seja $b \in L$.

$$\begin{aligned} (Uf)^{-1}(U_b) &= \{g \in Hom(K, 2_r) | (Uf)(g) \in U_b\} \\ &= \{g \in Hom(K, 2_r) | (g \circ f) \in U_b\} \\ &= \{g \in Hom(K, 2_r) | (g \circ f)(b) = 1\} \\ &= \{g \in Hom(K, 2_r) | g(f(b)) = 1\} = U_{f(b)}, \text{ subconjunto} \end{aligned}$$

aberto de $Hom(K, 2_r)$.

$$\begin{aligned} (Uf)^{-1}(Hom(L, 2_r) - U_b) &= \{g \in Hom(K, 2_r) | Uf(g) \notin U_b\} \\ &= \{g \in Hom(K, 2_r) | (g \circ f)(b) \neq 1\} \\ &= \{g \in Hom(K, 2_r) | g(f(b)) \neq 1\} \\ &= Hom(K, 2_r) - U_{f(b)}, \text{ subconjunto aberto} \end{aligned}$$

de $Hom(K, 2_r)$.

É óbvio que $U(id_L) = id_{UL}$ e que $U(g \circ f) = Uf \circ Ug$ já que U é uma "elevação" do functor $Hom(-, 2_r) : Ret_{0,1}^{op} \to Conj$ para $TopOrd$, onde $Conj$ denota a categoria dos conjuntos. □

Vamos agora provar que também o functor $Hom(-, 2_t) : TopOrd \to Conj$ admite uma "elevação" para $F : TopOrd \to Ret_{0,1}^{op}$.

Para um objecto $X \in TopOrd$, o conjunto $Hom(X, 2_t)$ com a ordem ponto a ponto é um reticulado limitado, onde o zero (limite inferior) e o um (limite superior) são definidos por

$$\theta_X : X \to 2_t, \theta(x) = 0, \forall x \in X$$
$$\iota_X : X \to 2_t, \iota(x) = 1, \forall x \in X,$$

respectivamente, e

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x), \forall x \in X$$
$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x), \forall x \in X$$

Proposição 2.1.2 *Define-se um functor $F : TopOrd \to Ret_{0,1}^{op}$ fazendo corresponder a cada $X \in TopOrd$ o reticulado limitado $Hom(X, 2_t)$ e a cada morfismo $f : X \to Y$ em $TopOrd$ a função $F(f) : Hom(Y, 2_t) \to Hom(X, 2_t)$ tal que $F(f)(g) = g \circ f$.*

Demonstração: Para qualquer morfismo $f : X \to Y$ em $TopOrd$ a aplicação

$$\begin{array}{cccc} Ff: & Hom(Y, 2_t) & \longrightarrow & Hom(X, 2_t) \\ & g & \longrightarrow & g \circ f \end{array}$$

é um morfismo de reticulados limitados. De facto tem-se, para qualquer $x \in X$,

$Ff(\theta_Y)(x) = (\theta_Y \circ f)(x) = \theta_Y(f(x)) = 0;$

$Ff(\iota_Y)(x) = (\iota_Y \circ f)(x) = \iota_Y(f(x)) = 1;$

$Ff(g \wedge h)(x) = (Ff(g) \wedge Ff(h))(x), \forall g, h \in Hom(Y, 2_t);$

$Ff(g \vee h)(x) = (Ff(g) \vee Ff(h))(x), \forall g, h \in Hom(Y, 2_t).$

E para quaisquer $g, h \in Hom(Y, 2_t)$ tais que $g \leq h$, isto é tal que $g(y) \leq h(y)$ para todo o $y \in Y$, $g \circ f \leq h \circ f$. Logo F define um functor de $TopOrd$ em $Ret_{0,1}^{op}$.

$\square$

Para todo o espaço topológico ordenado X e $x \in X$ a aplicação de avaliação, $av_{X,x} : Hom(X, 2_t) \to 2_r$ tal que $av_{X,x}(i) = i(x)$, para todo o $i \in Hom(X, 2_t)$, é um morfismo de reticulados limitados.

Proposição 2.1.3 *A função que a cada $X \in TopOrd$ faz corresponder*

$$\begin{array}{rccc} \eta_X : & X & \longrightarrow & UFX = Hom(Hom(X, 2_t), 2_r) \\ & x & \longrightarrow & av_{X,x} \end{array}$$

é uma transformação natural $\eta : Id_{TopOrd} \to UF$.

Demonstração: A aplicação η_X preserva a ordem. Vejamos que é contínua.

Seja $f \in FX$.

$$\begin{aligned} \eta_X^{-1}(U_f) &= \{x \in X | \eta_X(x) \in U_f\} \\ &= \{x \in X | av_{X,x}(f) = 1\} \\ &= \{x \in X | f(x) = 1\} \\ &= f^{-1}(1), \text{ subconjunto aberto de X.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_X^{-1}(UFX - U_f) &= \{x \in X | \eta_X(x) \notin U_f\} \\ &= \{x \in X | av_{X,x}(f) \neq 1\} \\ &= f^{-1}(0), \text{ subconjunto aberto de } X. \end{aligned}$$

Sejam X, Y espaços topológicos ordenados. Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua que preserva a ordem. Mostremos que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & UFX \arrow[d, "UFf"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"'] & UFY \end{tikzcd}$$

Seja $x \in X$.

$(\eta_Y \circ f)(x) = \eta_Y(f(x)) = av_{Y,f(x)}$.

$(UFf \circ \eta_X)(x) = UFf(\eta_X(x)) = UFf(av_{X,x}) = av_{X,x} \circ Ff$.

Vejamos que $av_{Y,f(x} = av_{X,x} \circ Ff$.

Seja $i \in Hom(Y, 2_t)$.

$av_{Y,f(x}(i) = i(f(x))$.

$(av_{X,x} \circ Ff)(i) = av_{X,x}(Ff(i)) = av_{X,x}(i \circ f) = (i \circ f)(x) = i(f(x))$. □

Para todo o reticulado limitado L e $a \in L$ a aplicação avaliação, $av_{L,a} : Hom(L, 2_r) \to 2_t$ tal que $av_{L,a}(i) = i(a)$ para todo o $i \in Hom(L, 2_r)$, é uma aplicação contínua que preserva a ordem.

Proposição 2.1.4 *A função que a cada $L \in Ret_{0,1}$ faz corresponder*

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_L : & L & \longrightarrow & Hom(Hom(L, 2_r), 2_t) \\ & a & \longrightarrow & av_{L,a} \end{array}$$

é uma transformação natural $\epsilon : Id_{Ret_{0,1}} \to FU$.

Demonstração: A aplicação ϵ_L é um morfismo de reticulados limitados.

Seja $f : L \longrightarrow K$ um morfismo de reticulados limitados.

Vejamos que o diagrama seguinte comuta

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\epsilon_L"] \arrow[d, "f"'] & FUL \arrow[d, "FUf"] \\ K \arrow[r, "\epsilon_K"'] & FUK \end{tikzcd}$$

Seja $a \in L$.

$(FUf \circ \epsilon_L)(a) = FUf(\epsilon_L(a)) = FUf(av_{L,a}) = av_{L,a} \circ Uf$.

$(\epsilon_K \circ f)(a) = \epsilon_K(f(a)) = av_{K,f(a)}$.

Vejamos que $av_{L,a} \circ Uf = av_{K,f(a)}$.

Seja $i \in Hom(L, 2_r)$.

$$\begin{array}{rcl} (av_{L,a} \circ Uf)(i) & = & av_{L,a}(Uf(i)) \\ & = & av_{L,a}(i \circ f) \\ & = & (i \circ f(a)) \\ & = & i(f(a)) \\ & = & av_{K,f(a)}. \end{array}$$

□

Teorema 2.1.5 *O functor F é adjunto à esquerda do functor $U : Ret_{0,1}^{op} \to TopOrd$.*

Demonstração: Vamos provar que os functores F, U e as transformações naturais η e ϵ satisfazem as identidades triangulares, isto é que

$U\epsilon_L \circ \eta_{UL} = Id_{UL}$ e $F\eta_X \circ \epsilon_{FX} = Id_{FX}$, para todo $L \in Ret_{0,1}$ e $X \in TopOrd$.

Sejam $X \in TopOrd$ e $f \in FX$.

$(F\eta_X \circ \epsilon_{FX})(f) = F\eta_X(\epsilon_{FX}(f)) = F\eta_X(av_{FX,f}) = av_{FX,f} \circ \eta_X$.
Vejamos que $av_{FX,f} \circ \eta_X = f$.
Seja $x \in X$.
$(av_{FX,f} \circ \eta_X)(x) = (av_{FX,f})(\eta_X(x)) = (av_{FX,f})(av_{X,x}) = av_{X,x}(f) = f(x)$.
Similarmente, $U\epsilon_L \circ \eta_{UL} = Id_{UL}$. □

2.2 Dualidade de Priestley

Vamos agora determinar a equivalência induzida, no sentido de 1.1.4, pela adjunção definida na secção anterior.

Dado um espaço topológico ordenado X , o conjunto dos abertos-fechados decrescentes de X, $AFD(X)$, é um reticulado distributivo limitado para a relação de inclusão.

Proposição 2.2.1 *Seja X um espaço topológico ordenado. O reticulado limitado $F(X) = Hom(X, 2_t)$ é isomorfo a $AFD(X)^{op}$.*

Demonstração: Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & Hom(X, 2_t) & \longrightarrow & (AFD(X))^{op} \\ & f & \longrightarrow & f^{-1}(\{0\}) \end{array}$$

e provemos que φ é isomorfismo de reticulados limitados.

Dado $f \in Hom(X, 2_t)$, isto é $f : X \to 2_t$ é uma aplicação contínua que preserva a ordem, $f^{-1}(\{0\}) \in AFD(X)$.

Sejam $f, g \in Hom(X, 2_t)$ tais que $f \neq g$, isto é existe $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$, logo tem-se ($x \in f^{-1}(\{0\})$ e $x \notin g^{-1}(\{0\})$) ou ($x \notin f^{-1}(\{0\})$ e $x \in g^{-1}(\{0\})$), e portanto φ é uma aplicação injectiva.

De seguida mostremos que φ é uma aplicação sobrejectiva.

Dado $A \in AFD(X)$, seja $f : X \to 2_t$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A, \\ 1 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Ora $f \in Hom(X, 2_t)$ e $\varphi(f) = A$. Logo φ é sobrejectiva.

$\varphi(\theta_X) = \theta_X^{-1}(\{0\}) = \{x \in X | \theta_X(x) = 0\} = X$

$\varphi(\iota_X) = \iota_X^{-1}(\{0\}) = \{x \in X | \iota_X(x) = 0\} = \emptyset$

$\varphi(f \wedge g) = (f \wedge g)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup g^{-1}(\{0\}) = \varphi(f) \cup \varphi(g)$, $\forall f, g \in Hom(X, 2_t)$.

$\varphi(f \vee g) = (f \vee g)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\}) = \varphi(f) \cap \varphi(g)$, $\forall f, g \in Hom(X, 2_t)$.

Sejam $g, h \in Hom(X, 2_t)$ tais que $g \leq h$, isto é $g(x) \leq h(x)$, para todo o $x \in X$. Então $h^{-1}(0) \subseteq g^{-1}(0)$. □

Dado um reticulado limitado L, o conjunto dos ideais primos de L, denotado por $I_p(L)$, é um espaço topológico ordenado. A topologia tem como subbase de abertos o conjunto

$$S = \{V_b | b \in L\} \cup \{I_P(L) - V_c | c \in L\},$$

sendo

$$V_b = \{I \in I_p(L) | b \notin I\}. \tag{2.2}$$

Proposição 2.2.2 *Para todo o reticulado distributivo limitado L o espaço topológico dos ideais primos de L, $X = (I_p(L), \tau)$, é compacto.*

Demonstração: Pelo Lema da subbase de Alexander, basta provarmos que toda a cobertura aberta de X por elementos de S tem uma subcobertura finita.

Sejam $A_0, A_1 \subseteq L$ tais que

$$X \subseteq (\bigcup_{b \in A_0} V_b) \cup (\bigcup_{c \in A_1} (X - V_c))$$

Seja J o ideal gerado por A_0 e G o filtro gerado por A_1. Suponhamos que $J \cap G = \emptyset$, pelo Teorema do Ideal Primo, existe I ideal primo de L tal que $J \subseteq I$ e $I \cap G = \emptyset$

Como $I \in X$, então

$$\exists b \in A_0 : I \in V_b \ \ ou \ \ \exists c \in A_1 : I \in (X - V_c)$$

Se $I \in V_b$ então $b \notin I$. Mas $b \in A_0 \subseteq J \subseteq I$. O que é um absurdo.

Se $I \in (X - V_c)$ então $c \in I$. Mas $c \in A_1 \subseteq G$ e $I \cap G = \emptyset$. O que é um absurdo. Então $J \cap G \neq \emptyset$

Seja $a \in J \cap G$.

Temos os seguintes casos:

1. Suponhamos que $A_0 \neq \emptyset, A_1 \neq \emptyset$

   Então, como

   $J = (A_0] = \downarrow \{b_1 \vee b_2 \vee ... \vee b_n | n \in \mathbb{N}, a_1, a_2, ..., a_n \in A_0\}$ (1)

   $G = [A_1) = \downarrow \{c_1 \wedge c_2 \wedge ... \wedge c_k | k \in \mathbb{N}, c_1, c_2, ..., c_k \in A_1\}$

   existe $n, k \in \mathbb{N}, b_1, ..., b_n \in A_0, c_1, ..., c_k \in A_1$ tal que

   $$c_1 \wedge ... \wedge c_k \leq a \leq b_1 \vee ... \vee b_n.$$

   Seja $I \in X$.

   Se $a \in I$ então $c_1 \wedge ... \wedge c_k \in I$, logo $I \notin V_{c1 \wedge ... \wedge c_k} = V_{c_1} \cap ... \cap V_{c_k}$. Então $I \in (X - V_{c_1}) \cup ... \cup (X - V_{c_k})$.

   Se $a \notin I$ então $b_1 \vee ... \vee b_n \notin I$ e, consequentemente $I \in V_{b_1 \vee ... \vee b_n} = V_{b_1} \cup ... \cup V_{b_n}$. Concluímos então que $X = V_{b_1} \cup ... \cup V_{b_n} \cup (X - V_{c_1}) \cup ... \cup (X - V_{c_k})$, isto é, existe uma subcobertura finita.

2. Suponhamos que $A_0 \neq \emptyset$ e $A_1 = \emptyset$. Neste caso $G = \{1\}$, então $a = 1$ e $1 \in J$. Existe $n \in \mathbb{N}$ e $b_1, ..., b_n \in A_0$ tal que $1 \leq b_1 \vee ... \vee b_n$. Então $1 = b_1 \vee ... \vee b_n$ e $V_1 = X_{b_1 \vee ... \vee b_n} = V_{b_1} \cup ... \cup V_{b_n}$. Logo existe uma subcobertura finita.

3. Se $A_0 = \emptyset$ e $A_1 \neq \emptyset$, de uma forma similar prova-se que existe uma subcobertura finita.

4. Se $A_0 = \emptyset$ e $A_1 = \emptyset$, é trivial que existe uma subcobertura finita.

□

Proposição 2.2.3 *Dado um reticulado distributivo limitado L e o espaço topológico ordenado dos ideais primos de L, $X = (I_p(L), \tau, \subseteq)$, tem-se:*

(i) $I, J \in I_p(L), J \nsubseteq I \Rightarrow \exists a \in L : I \in V_a$ *e* $J \notin V_a$*;*

(ii) Os subconjuntos abertos-fechados decrescentes de X *são exactamente os conjuntos* $V_a = \{I \in I_p(L) | a \notin I\}$ *com* $a \in L$.

Demonstração:

(i) Sejam I, J ideais primos de L tais que $J \nsubseteq I$. Então existe $a \in L$ tal que $a \in J$ e $a \notin I$ logo $J \notin V_a$ e $I \in V_a$.

Mais, para todo o $a \in L$, V_a é um subconjunto aberto-fechado de X, porque $V_a \in S$, e $X - V_a \in S$.

(ii) Sejam $I \in V_a$ e $J \in I_p(L)$ tais que $J \subseteq I$. Se $a \in J$ temos $a \in I$, o que é um absurdo, porque $I \in V_a$, logo $J \in V_a$. Então V_a é decrescente.

Seja V um subconjunto aberto-fechado decrescente de X.

Se $V = \emptyset$, então $V = V_0$.

Se $V = X$ então $V = V_1$.

Suponhamos que $V \neq \emptyset$ e $V \neq X$. Seja $J \in X - V$. Para todo o $I \in V$,tem-se $J \nsubseteq I$, porque V é decrescente e $J \notin V$. Por 1, para todo o $I \in V$, existe $a_I \in L$ tal que $I \in V_{a_I}$ e $J \notin V_{a_I}$. Logo

$$V \subseteq \bigcup_{I \in V} V_{a_I} \text{ e } J \notin \bigcup_{I \in V} V_{a_I}.$$

Como X é compacto e V é fechado, V é compacto. Como V_{a_I} é aberto para todo o $I \in V$, existe $U \subseteq V$ não vazio e finito tal que

$$V \subseteq \bigcup_{I \in V} V_{a_I}$$

Seja $b_J = \bigvee_{I \in V} a_I$. Então $V \subseteq V_{b_J}$ e $J \notin V_{b_J}$.

Seja $J \in X - V$. Tem-se

$$X - V \subseteq \bigcup_{J \in X - V} (X - V_{b_J}) \text{ e } V \subseteq \bigcap_{J \in X - V} V_{b_J}.$$

Mas, $X - V$ é fechado e consequentemente é compacto. Como $X - V_{b_J}$ é aberto para todo o $J \in X - V$, existe $A \subseteq (X - V)$ não vazio e finito tal que

$$X - V \subseteq \bigcup_{J \in A} (X - V_{b_J}) = X - \bigcap_{J \in A} V_{b_J}.$$

Então $V \supseteq \bigcap\limits_{J \in A} V_{b_J}$ e como $V \subseteq \bigcap\limits_{J \in A} V_{b_J}$, concluímos que

$$V = \bigcap_{J \in A} V_{b_J} = V_a$$

com $a = \bigwedge\limits_{J \in A} b_J$.

$\square$

Pelas proposições anteriores podemos concluir que

Proposição 2.2.4 *Para todo o reticulado distributivo limitado L o espaço dos ideais primos de L é um espaço de Priestley.*

Proposição 2.2.5 *Todo o espaço de Priestley X é isomorfo ao espaço dos ideais primos do reticulado dos seus abertos-fechados decrescentes.*

Demonstração: Seja X um espaço de Priestley, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \eta'_X : & X & \longrightarrow & I_p(AFD(X)) \\ & x & \longrightarrow & \Gamma_x \end{array}$$

sendo $\Gamma_x = \{A \in AFD(X) | x \notin A\}$ e vejamos que é um isomorfismo.

A aplicação η'_X é contínua e preserva a ordem.

Mostremos que η'_X é sobrejectiva.

Se $X = \emptyset$ então $I_p(AFD(X)) = \emptyset$ e η'_X é sobrejectiva.

Suponhamos que $X \neq \emptyset$.

Seja $x \in I_p(AFD(X))$. Consideremos os seguintes conjuntos:

$$F_0 = \bigcup_{A \in x} A \text{ e } F_1 = \bigcap_{A \in AFD(X) - x} A,$$

temos $(X - F_0) \cap F_1 \neq \emptyset$, porque X é compacto.

Seja $y \in (X - F_0) \cap F_1$. Vejamos que $\eta'_X(y) = x$.

$y \in (X - F_0) \cap F_1 \Rightarrow y \in Y, y \notin F_0$ e $y \in F_1$.

$y \notin F_0 \Rightarrow y \notin \bigcup_{A \in x} A \Rightarrow y \notin A, \forall A \in x$.

$y \in F_1 \Rightarrow y \in \bigcap_{A \in AFD(X)-x} A \Rightarrow y \in A, \forall A \in AFD(X) - x$.

Seja $A \in \eta'_X(y)$.

$A \in \eta'_X(y) \Rightarrow A \in \Gamma_y \Rightarrow y \notin A \Rightarrow A \in x$.

Seja $A \in x$.

$A \in x \Rightarrow y \notin A \Rightarrow A \in \Gamma_y \Rightarrow A \in \eta'_X(y)$.

Então η'_X é sobrejectiva.

Sejam $x_1, x_2 \in X$ tais que $\Gamma_{x_1} \subseteq \Gamma_{x_2}$. Suponhamos que $x_1 \not\leq x_2$, existe A subconjunto aberto-fechado decrescente de X tal que $x_2 \in A$ e $x_1 \notin A$, pois X é um espaço de Priestley. Logo $A \in \Gamma_{x_1}$ e $A \notin \Gamma_{x_2}$, o que é um absurdo.

Então η'_X é um isomorfismo. $\square$

Proposição 2.2.6 *Todo o reticulado distributivo limitado L é isomorfo ao reticulado dos abertos-fechados decrescentes dos seus ideais primos.*

Demonstração: Seja L um reticulado distributivo limitado, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \epsilon'_L : & L & \longrightarrow & AFD(I_p(L)) \\ & a & \longrightarrow & V_a \end{array}$$

e mostremos que é um isomorfismo de reticulados distributivos limitados.

A aplicação ϵ'_L é um homomorfismo de reticulados limitados.

Sejam $a, b \in L$ tais que $a \neq b$. Suponhamos que $a \not\geq b$. Pelo Teorema do Ideal Primo, existe I ideal primo de L tal que $b \in I$ e $a \notin I$. Então $I \in V_a$ e $I \notin V_b$, consequentemente $V_a \neq V_b$, logo $\epsilon'_L(a) \neq \epsilon_{1_L}(b)$ então ϵ'_L é injectiva.

Como $AFD(I_p(L)(L))$ é o reticulado dos subconjuntos abertos--fechados decrescentes de $I_p(L)$, e sabendo que $AFD(I_p(L)) = \{V_a | a \in L\}$ (2.2.3(ii)) então ϵ'_L é sobrejectiva. $\square$

Proposição 2.2.7 *Dado um reticulado limitado L, o espaço topológico ordenado $UL = Hom(L, 2_r)$ é isomorfo ao espaço $(I_p(L), \tau, \subseteq^{op})$.*

Demonstração: Consideremos a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccl} \psi: & Hom(L,2_r) & \longrightarrow & (I_p(L))^{op} \\ & f & \longrightarrow & f^{-1}(\{0\}) \end{array}$$

e mostremos que ψ é um homeomorfismo de ordem.

Para todo o morfismo $f: L \to 2_r$ em $Ret_{0,1}$, $f^{-1}(\{0\}) \in I_p(L)$.

Sejam $f, g \in Hom(L, 2_r)$ tais que $f \neq g$, isto é existe $a \in L$ tal que $f(a) \neq g(a)$. Tem-se ($a \in f^{-1}(\{0\})$ e $a \notin g^{-1}(\{0\})$) ou ($a \notin f^{-1}(\{0\})$ e $a \in g^{-1}(\{0\})$), logo ψ é injectiva.

Vejamos que ψ é sobrejectiva.

Seja I um ideal primo de L e $f: L \to 2_r$ tal que

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{se } a \in I, \\ 1 & \text{se } a \notin I \end{cases}$$

Porque I é ideal primo de L, a aplicação f é um morfismo de reticulados limitados e $\psi(f) = I$. Logo ψ é sobrejectiva.

Seja $b \in L$.

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1}(V_b) & = & \{f \in Hom(L,2_r) | \psi(f) \in V_b\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | f^{-1}(\{0\}) \in V_b\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | b \notin f^{-1}(\{0\})\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | f(b) = 1\} \\ & = & V_b, \text{ subconjunto aberto em } Hom(L,2_r). \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1}(I_p(L) - V_b) & = & \{f \in Hom(L,2_r) | \psi(f) \in I_p(L) - V_b\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | f^{-1}(\{0\}) \in V_b\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | f^{-1}(\{0\}) \in I_p(L) - V_b\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | f^{-1}(\{0\}) \notin V_b\} \\ & = & \{f \in Hom(L,2_r) | b \in f^{-1}(\{0\})\} \\ & = & Hom(L,2_r) - V_b, \text{ subconjunto aberto em } Hom(L,2_r). \end{array}$$

Então ψ é uma aplicação contínua.

Sejam $f, g \in Hom(L, 2_r)$ tais que $f \leq g$. Mostremos que $g^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}(\{0\})$.

Seja $a \in g^{-1}(\{0\})$. Então $g(a) = 0$. Como $f \leq g$, então $f(a) \leq g(a)$. Logo $f(a) = 0$, isto é $a \in f^{-1}(\{0\})$.

Sejam $f, g \in Hom(L, 2_r)$ tais que $f^{-1}(\{0\}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$. Vejamos que $g \leq f$.

Seja $a \in L$. Se $f(a) = 1$, então $g(a) \leq f(a)$. Se $f(a) = 0$, como $f^{-1}(\{0\}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$, $g(a) = 0$, então $g(a) \leq f(a)$. □

Proposição 2.2.8 *Um reticulado limitado L é distributivo se e só se ϵ_L (2.1.4) é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja L um reticulado distributivo limitado, então ϵ'_L (2.2.6) é, a menos de isomorfismo, ϵ_L. Logo ϵ_L é um isomorfismo.

Dado um reticulado limitado L, como $UL = Hom(L, 2_r)$ é um espaço topológico ordenado então FUL é um reticulado distributivo limitado (2.2.1). Assim, se ϵ_L é um isomorfismo então L é um reticulado distributivo limitado. □

Proposição 2.2.9 *Um espaço topológico ordenado X é um espaço de Priestley se e só se η_X é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja X um espaço de Priestley, então η'_X (2.2.5) é, a menos de isomorfismo, η_X, logo η_X é um isomorfismo.

Dado X um espaço topológico ordenado, como $FX = Hom(X, 2_t)$ é um reticulado distributivo limitado (2.2.1), $I_p(FX)$ é um espaço de Priestley (2.2.4), logo UFX é um espaço de Priestley, pois é isomorfo a $I_p(FX)$ (2.2.7). Assim, se η_X é um isomorfismo então X é um espaço de Priestley. □

As proposições anteriores conduzem-nos ao seguinte teorema

Teorema 2.2.10 *A adjunção $< F, U, \eta, \epsilon >: TopOrd \rightharpoonup Ret_{0,1}^{op}$ induz uma equivalência dual entre a subcategoria dos espaços de Priestley e a subcategoria dos reticulados distributivos limitados.*

2.3 Reflexão de $CHausOrd$ em Psp

Da adjunção dual entre $TopOrd$ e $Ret_{0,1}$, utilizando a dualidade anterior, obtemos a reflexão de $CHausOrd$ na categoria dos espaços de Priestley, cuja unidade tem por componente no ponto X

$$r_X = \eta_X : X \to R(X) = Hom(Hom(X, 2_t), 2_r).$$

De facto temos, denotando também por F e U os correspondentes functores contravariantes,

$$\begin{tikzcd}
TopOrd \arrow[r, shift left, "F"] & Ret_{0,1} \arrow[l, shift left, "U"] \\
CHausOrd \arrow[u, hook] \arrow[dr, "\overline{F}"] & \\
Psp \arrow[u, hook, "H"] \arrow[r, shift left, "F'"] & DRet \arrow[l, shift left, "U'"] \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

com $\overline{F}$ a restrição de F a $CHausOrd$, e $R = U'\overline{F}$ adjunto à esquerda do functor inclusão H.

Podemos descrever a reflexão da seguinte forma

$$< I, H, \eta, \epsilon >: CHausOrd \rightharpoonup Psp \tag{2.3}$$

onde :

- H é o functor inclusão
- $I(X, \tau, \leq) = (Hom(Hom(X, 2_t), 2_r), \tau_1, \leq)$; com $\leq$ a ordem ponto a ponto e τ_1 a topologia definida em (2.1).
- $\eta_X : X \to HI(X)$, $\eta_X(x) = av_{X,x}$;
- A counidade é a identidade $IH = Id$.

3

Reflexão de $CHausOrd$ em Psp

Depois de termos determinado, no capítulo anterior, a reflexão da categoria dos espaços compactos Hausdorff ordenados na categoria dos espaços de Priestley através da adjunção dual entre a categoria dos espaços topológicos ordenados e a categoria dos reticulados limitados, damos uma nova forma de descrever a reflexão de $CHausOrd$ em Psp. Para tal vamos definir functores $I_1 : CHausPreord \to StonePreord$, $I_2 : StonePreord \to PPreord$ e $I_3 : PPreord \to Psp$, que são adjuntos esquerdos dos respectivos functores inclusão, H_1, H_2, H_3.

3.1 A Reflexão $CHaus \to Stone$

A reflexão da categoria $CHausOrd$ em Psp é, embora existindo algumas semelhanças, bastante diferente da reflexão para o caso das ordens triviais, $CHaus \to Stone$. Nesta secção apresentamos algumas dessas semelhanças e diferenças.

Em primeiro lugar salientamos que um espaço de Priestley não é apenas um espaço de Stone ordenado.

Exemplo 3.1.1 Seja $\mathbb{N}_\infty$ a compactificação de Alexandroff do espaço discreto dos números naturais, isto é $\mathbb{N}_\infty = \{1, 2, 3, \cdots\} \cup \{\infty\}$ e os seus subconjuntos abertos são os subconjuntos que ou não contêm o infinito ou têm complemento finito. Equipando $\mathbb{N}_\infty$ com a ordem

$$\{(1, a) | a \in \mathbb{N}\} \cup \Delta_{\mathbb{N}_\infty}$$

obtemos um espaço de Stone ordenado, que denotamos por $\mathbb{N}'_\infty$. Mostremos que não é um espaço de Priestley.

Sabemos que $1 \not\leq \infty$. Suponhamos que existe V subconjunto aberto-fechado decrescente de $\mathbb{N}'_\infty$ tal que $\infty \in V$ e $1 \notin V$.

Como V é aberto-fechado de $\mathbb{N}'_\infty$ e $\infty \in V$, existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a \in V$, porque V é o complementar de um conjunto finito A. Mas $1 < a$ e V é decrescente, então $1 \in V$, o que é um absurdo. $\square$

À semelhança do que foi feito na secção 2.1, podemos, também, mostrar que existe uma adjunção entre $Ret_{0,1}^{op}$ e a categoria Top dos espaços topológicos cuja equivalência induzida, no sentido de 1.1.4, é exactamente a dualidade de Stone, isto é a equivalência entre a categoria $Stone$ dos espaços de Stone e a categoria dual da categoria das álgebras de Boole.

De facto, um espaço topológico pode ser considerado como um espaço topológico ordenado com a ordem trivial: $x \leq y$ se e só se $x = y$. Assim, podemos considerar os functores $\hat{U} = GU$ e $\hat{F} = FE$, sendo G o functor de esquecimento de $TopOrd$ em Top e E a inclusão de Top em $TopOrd$.

Sendo X um espaço topológico e L um reticulado limitado, as aplicações de avaliação $av_{X,x} : Hom(X, 2_t) \to 2_r$ e $av_{L,a} : Hom(L, 2_r) \to 2_t$ são, respectivamente, um morfismo de reticulados limitados e uma aplicação contínua. Além disso η_x e ϵ_L são respectivamente uma função contínua e um morfismo de reticulados limitados, sendo $\hat{F}$ adjunto à esquerda de $\hat{U} : Ret_{0,1}^{op} \to Top$.

Vejamos, aplicando a proposição 1.1.4, que esta adjunção induz uma equivalência entre a categoria dos espaços de Stone e a categoria dual das álgebras de Boole.

Dado um espaço topológico X, e sendo $AF(X)$ o conjunto de todos os subconjuntos abertos-fechados de X, $(AF(X), \cap, \cup)$ é uma álgebra de Boole, pois é um reticulado distributivo complementado. Pela proposição 2.2.1, o reticulado limitado $Hom(X, 2_t)$, com a ordem trivial em X, é isomorfo a $AF(X)^{op}$, isto é $(AF(X), \subseteq^{op})$ que é isomorfo a $(AF(X), \subseteq)$, logo é uma álgebra de Boole.

Por outro lado, dada uma álgebra de Boole B, e considerando $I_p(B)$ o conjunto de todos os ideais primos de B, temos que $(I_p(B), \tau)$, com τ a topologia definida em (2.2), é um espaço topológico compacto (2.2.2).

Resta provar que $(I_p(B), \tau)$ é totalmente separado. De facto, pela proposição 2.2.3 (i), podemos concluir que, para uma álgebra de Boole B, se $I, J \in I_p(B)$ com $I \neq J$ então existe $a \in B$ tal que $I \in V_a$ e $J \notin V_a$, com V_a subconjunto aberto-fechado de $(I_p(B), \tau)$, logo $(I_p(B), \tau)$ é um espaço de Stone. Assim, dado um espaço topológico X, temos que $\hat{F}(X)$ é uma álgebra de Boole e, consequentemente, que $I_p(\hat{F}X)$ é um espaço de Stone. Logo, pela proposição 2.2.7, $Hom(\hat{F}X, 2_r)$ com a ordem trivial em X é isomorfo ao espaço de Stone $I_p(\hat{F}(X))$, e, portanto, $\hat{U}\hat{F}X$ é um espaço de Stone.

Se considerarmos, na proposição 2.2.5, X um espaço de Stone, $I_p(AF(X))$ e $\Gamma_x = \{A \in AF(X) | x \notin A\}$ podemos concluir que X é isomorfo a $I_p(AF(X))$. Assim, como $\hat{F}X$ é isomorfo a $AF(X)$, temos que

$$\hat{U}\hat{F}X \cong \hat{U}(AF(X) = Hom(AF(X), 2_r) \cong I_p(AF(X)),$$

seguindo-se a proposição:

Proposição 3.1.2 *Um espaço topológico X é um espaço de Stone se e só $\eta_X : X \to \hat{U}\hat{F}X$ é um isomorfismo.*

Por outro lado, dado L um reticulado distributivo, temos que $\hat{F}\hat{U}L$ é uma álgebra de Boole, pois $\hat{F}(X)$ é isomorfo à álgebra de Boole $AF(X)$ para qualquer espaço topológico X.

Pela proposição 2.2.6 podemos concluir que toda a álgebra de Boole é isomorfa a $AF(I_p(B))$, pois os abertos-fechados de $I_p(B)$ são também os conjuntos U_a com $a \in B$. Assim, como $\hat{U}B$ é isomorfo a $I_p(B)$, temos que

$$\hat{F}\hat{U}B \cong \hat{F}(I_p(B)) = Hom(I_p(B), 2_t) \cong AF(I_p(B)),$$

seguindo-se a proposição:

Proposição 3.1.3 *Um reticulado limitado L é uma álgebra de Boole se e só se $\epsilon_L : L \to \hat{F}\hat{U}L$ é um isomorfismo.*

Teorema 3.1.4 *A adjunção dual $< \hat{F}, \hat{U}, \eta, \epsilon >$: $Top \rightharpoonup Ret_{0,1}^{op}$ define a equivalência dual entre a subcategoria dos espaços de Stone e a subcategoria das álgebras de Boole.*

Da adjunção dual entre Top e $Ret_{0,1}$ deduz-se a reflexão da categoria dos espaços compactos Hausdorff na categoria dos espaços de Stone, cuja componente unidade é $r_X = \eta_X : X \to R(X) = Hom(Hom(X, 2_t), 2_r)$. No entanto, a reflexão pode ser definida de uma forma mais directa, tal como apresentada em [Bou66].

Seja (X, τ) um espaço compacto Hausdorff. Considera-se a relação de equivalência em X definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \subseteq X \ conexo : x, y \in A.$$

O conjunto das componentes conexas de X, $\Gamma(X) = \{\Gamma_x | x \in X\}$, é o respectivo conjunto quociente. Sendo τ a topologia quociente relativamente à projecção canónica $\gamma_X : X \to \Gamma(X)$, que a cada ponto x de X faz corresponder a sua componente conexa Γ_x, então $(\Gamma(X), \tau)$ é um espaço de Stone e γ_X é a componente em X da reflexão de $CHaus$ em $Stone$.

A categoria dos espaços compactos Hausdorff é monádica sobre a categoria dos conjuntos, aqui denotada por $Conj$. O mesmo não sucede com a categoria dos espaços compactos Hausdorff ordenados.

O functor de esquecimento $| - | : CHaus \to Conj$, que tem por adjunto à esquerda o functor compactificação β tal que, para cada X, $\beta(X)$ é a compactificação de $Stone - \check{C}ech$ do correspondente espaço discreto, é monádico ([BJ01] 5.8.7).

O functor de esquecimento $| - | : CHausOrd \to Conj$ também tem adjunto à esquerda definido em objectos por $(\beta(X), \tau, =)$. No entanto não é monádico sobre $Conj$, pois não reflecte isomorfismos. Por exemplo, se X é um espaço topológico finito e discreto, a aplicação $f : (X, \tau, =) \to (X, \tau, \leq)$, sendo $\leq_X$ não trivial, é um morfismo em $CHausOrd$, $|f|$ é isomorfismo em $Conj$ e f não é isomorfismo de ordem.

A categoria $CHaus$, sendo uma categoria monádica sobre $Conj$, é exacta ([Bor94b] 4.4.5). Portanto, qualquer morfismo em $CHaus$ se factoriza através de um epimorfismo regular seguido de um monomorfismo ([Bor94b] 2.1.3), isto é a categoria tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$. Nesta categoria os epimorfismos regulares são as aplicações contínuas sobrejectivas e os monomorfismos são as aplicações contínuas injectivas. Consequentemente, a reflexão $CHaus \to Stone$ é regular epireflectiva.

Analisemos estes conceitos na categoria $CHausOrd$. Começamos por considerar a categoria $CHausPreord$. Pelo teorema 1.7.6 o functor esquecimento $U : CHausPreord \to CHaus$ tem adjunto à esquerda, o functor $F : CHaus \to CHausPreord$ tal que $F(X,\tau) = (X,\tau,\Delta_X)$, pois $\eta_X = Id_X : X \to UFX$ definido por $\eta_X(x) = x$ é morfismo universal de X para U.

Vamos descrever os epimorfismos regulares em $CHausPreord$.

Sejam $(X,\tau,\preceq) \in CHausPreord$ e $q : X \to Q$ um epimorfismo regular em $CHaus$, isto é

$$X \times_Q X \underset{\pi_2}{\overset{\pi_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{\ q\ } Q$$

é o diagrama do co-igualizador em $CHaus$. Equipemos o espaço Q com a pré-ordem que é o fecho transitivo de $q \times q(\preceq_X)$, portanto $Q \in CHausPreord$. Seja $f : X \to C$ um morfismo em $CHausPreord$ tal que $f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$. Logo, existe um único morfismo $f_1 : Q \to C$ em $CHaus$ com $f_1(a) = f(x), x \in q^{-1}(a)$ e, portanto, tal que $f_1 \circ q = f$. Vejamos que $f_1 \in CHausPreord$, isto é que preserva a pré-ordem.

Sejam $a \preceq a'$ em Q, então existem $x'_1 \preceq_X x_1$, $x'_2 \preceq_X x_2$, …, $x'_n \preceq_X x_n$ tais que

$q(x'_1) = a$,

$q(x_i) = q(x'_{i+1})$, para $i = 1, \dots n-1$,

$q(x_n) = a'$.

Mas f preserva a pré-ordem, então $f(x'_1) \preceq_C f(x_1)$, …, $f(x'_n) \preceq_C f(x_n)$.

Por outro lado, se $q(x_i) = q(x'_{i+1})$ então $f(x_i) = f(x'_{i+1})$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Assim, tem-se
$f_1(a) = f_1(q(x'_1)) = f(x'_1) \preceq_C f(x_1) = f(x'_2) \preceq_C \ldots \preceq_C f(x_n) = f_1(q(x_n)) = f_1(a')$.

Portanto $f_1(a) \preceq_C f_1(a')$, seguindo-se a proposição:

Proposição 3.1.5 *Dados $X \in CHausPreord$ e $q : X \to Q$ um epimorfismo regular em $CHaus$, atribuindo a Q a pré-ordem obtida através do fecho transitivo de $q \times q(\preceq_X)$ q é epimorfismo regular em $CHausPreord$.*

Seja $f : X \to Y$ um morfismo em $CHausPreord$. Consideremos a factorização $(EpiReg, Mono)$ de f em $CHaus$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q"] & Y \\ & Q \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Atribuindo a $Q \in CHaus$ a pré-ordem obtida através do fecho transitivo de $q \times q(\preceq_X)$, q é epimorfismo regular em $CHausPreord$ e o morfismo m é monomorfismo em $CHaus$ que preserva a pré-ordem. Obtemos assim a factorização $(EpiReg, Mono)$ de f em $CHausPreord$ o que implica, como provámos em 1.4, o resultado seguinte:

Proposição 3.1.6 *A categoria $CHausPreord$ tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$.*

Como, em (3.1), m é injectiva, $Q \in CHausOrd$, portanto $CHausOrd$ tem o mesmo sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$ que $CHausPreord$.

Proposição 3.1.7 *A categoria $CHausOrd$ tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$.*

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.8 Consideremos o espaço de Stone ordenado $\mathbb{N}'_\infty$ descrito no exemplo 3.1.1 e $\mathbb{N}^*_\infty$ o espaço compactificação de um ponto do espaço discreto dos números naturais com a ordem 1 menor ou igual a a, para todo o natural a, e 1 menor que ∞ e mais nenhum par ordenado. Note-se que $\mathbb{N}^*_\infty$ é um espaço de Priestley.

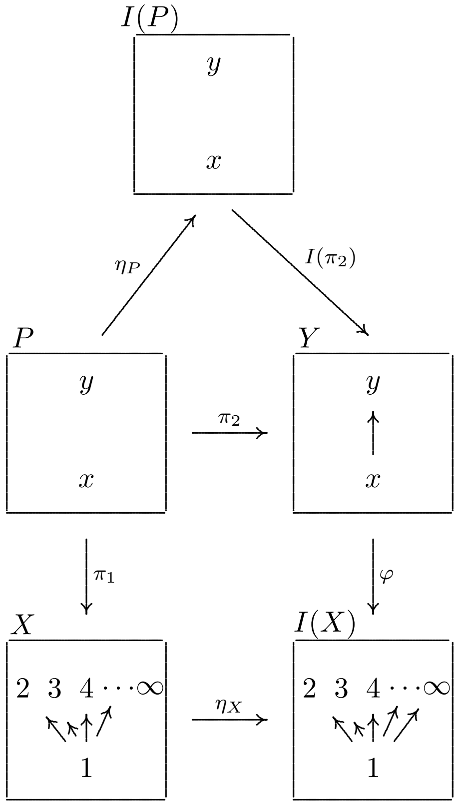
Seja $m : \mathbb{N}'_\infty \longrightarrow \mathbb{N}^*_\infty$ tal que $m(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{N}'_\infty$. Ora m é um monomorfismo, mas $\mathbb{N}^*_\infty$ é um espaço de Priestley e $\mathbb{N}'_\infty$ não. $\square$

Assim a reflexão ordenada de $CHausOrd$ em Psp não é regular epireflectiva (1.4.2)(*iii*).

Uma outra diferença relevante entre estas duas reflexões é que a reflexão de $CHaus$ em $Stone$ é admissível, efectivamente, mais do que isso, ela tem unidades estáveis ([BJ01] 5.8.4) enquanto que a versão ordenada não é admissível, como podemos verificar pelo seguinte exemplo:

Exemplo 3.1.9 Sejam $X = \mathbb{N}'_\infty$ e $I(X) = \mathbb{N}^*_\infty$ os espaços descritos no exemplo anterior: de facto, é fácil ver que $\eta_X = m$ é a reflexão de X em Psp. Seja $Y = \{x, y\}$ um espaço discreto com a ordem $\Delta_Y \cup \{(x, y)\}$, sendo portanto um espaço de Priestley.

Consideremos o seguinte diagrama:



onde

- $\varphi(x) = 1, \varphi(y) = \infty$, sendo, portanto, uma aplicação contínua que preserva a ordem;

- o produto fibrado é o espaço $P = \{x, y\}$ discreto e finito com a ordem trivial;

- $I(P) = P$, pois $x \not\leq y$ em P e existe $U = \{y\} \in AFD(P)$ tal que $y \in U$ e $x \notin U$.

Claramente $I(\pi_2) = \pi_2$ não é um isomorfismo em Psp e isso implica que a reflexão não é admissível já que a composição dos morfismos canónicos referida na página 9, $\epsilon_Y \circ I(\pi_2) : I(P) \to I(Y) = Y$, não é isomorfismo. $\square$

3.2 A Reflexão de $CHausPreord$ em $StonePreord$

Nesta secção descrevemos a reflexão de $CHausPreord$ em $StonePreord$ usando a descrição da reflexão da categoria $CHaus$ em $Stone$ através das suas componentes conexas, apresentada na secção anterior. Mostramos que esta reflexão não é admissível e apresentamos uma classe de morfismos em $StonePreord$ para a qual é admissível.

Consideremos a subcategoria plena de $CHausPreord$ dos espaços de Stone pré-ordenados, denotada por $StonePreord$.

Seja $X \in CHausPreord$, consideremos $(\Gamma(X), \tau)$ o espaço das suas componentes conexas e $\eta_X : (X, \tau_X, \preceq_X) \to (\Gamma(X), \tau, \preceq)$ onde $\preceq$ é a pré-ordem que é o fecho transitivo de $(\eta_X \times \eta_X)(\preceq_X)$, isto é

$$\Gamma_x \preceq \Gamma_y \Leftrightarrow \exists x'_1 \preceq x_1, x'_2 \preceq x_2, ..., x'_n \preceq x_n \text{ em X tais que} \tag{3.2}$$

$\Gamma_x = \eta_X(x'_1)$,
$\eta_X(x_i) = \eta_X(x'_{i+1}),$ para $i = 1, ..., n-1$ e
$\eta_X(x_n) = \Gamma_y$.

Logo $(\Gamma(X), \tau, \preceq) \in StonePreord$, pois $(\Gamma(X), \tau)$ é um espaço de Stone.

Proposição 3.2.1 *Seja X um espaço compacto Hausdorff pré-ordenado, então η_X é a reflexão de X na categoria dos espaços de Stone pré-ordenados.*

Demonstração: Sejam X um espaço pré-ordenado compacto Hausdorff e Y um espaço de Stone com uma pré-ordem. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua preservando a pré-ordem. Provemos que existe um único $g : \Gamma(X) \to Y$ tal que $g \circ \eta_X = f$.

Seja $g : \Gamma(X) \to Y$ tal que $g(\Gamma_x) = f(x)$.

Vamos mostrar que se $\Gamma_x = \Gamma_y$ então $f(x) = f(y)$.

Suponhamos que $f(x) \neq f(y)$, então existe U, subconjunto aberto-fechado de Y, tal que $f(x) \in U$ e $f(y) \notin U$, pois Y é um espaço de Stone.

Como f é uma aplicação contínua, existe $f^{-1}(U)$ subconjunto aberto--fechado de X tal que $x \in f^{-1}(U)$ e $y \notin f^{-1}(U)$. Então $y \notin \Gamma_x$, porque $\Gamma_x = \bigcap\{A \in AF(X) | x \in A\}$, mas $y \in \Gamma_y$, logo $\Gamma_x \neq \Gamma_y$.

É evidente que g é contínua e é o único morfismo tal que $g \circ \eta_X = f$.

Mostremos que g preserva a pré-ordem.

Sejam $\Gamma_x, \Gamma_y \in \Gamma(X)$ tais que $\Gamma_x \preceq \Gamma_y$. Então existe uma sequência finita $x'_1 \preceq x_1, x'_2 \preceq x_2, ..., x'_n \preceq x_n$ em X com $\Gamma_x = \eta_X(x'_1), \eta_X(x_i) = \eta_X(x'_{i+1})$, para $i = 1, ..., n-1$, e $\eta_X(x_n) = \Gamma_y$. Como f preserva a pré-ordem,

$f(x'_1) \preceq f(x_1), f(x'_2) \preceq f(x_2), ..., f(x'_n) \preceq f(x_n)$. Temos que

$\Gamma_x = \Gamma_{x'_1} \Rightarrow f(x) = f(x'_1)$,

$\Gamma_{x_1} = \Gamma_{x'_2} \Rightarrow f(x_1) = f(x'_2)$,

$...$,

$\Gamma_{x_n} = \Gamma_y \Rightarrow f(x_n) = f(y)$.

Então $f(x) \preceq f(x_1) \preceq f(x_2) \preceq ... \preceq f(x_n) = f(y)$.

Como $\preceq$ é transitiva, $f(x) \preceq f(y)$. □

O functor inclusão

$$H_1 : StonePreord \hookrightarrow CHausPreord$$

tem adjunto à esquerda, o functor I_1,

$$I_1 : CHausPreord \rightarrow StonePreord, \tag{3.3}$$

onde:

- $I_1(X, \tau, \preceq_X) = (\Gamma(X), \overline{\tau}, \preceq)$ sendo $\Gamma(X) = \{\Gamma_x | x \in X\}$ e $\overline{\tau}$ a topologia quociente relativamente à projecção;
- $\preceq$ é o fecho transitivo de $\eta_X \times \eta_X(\preceq_X)$ (3.2);
- $I_1(f) : I_1(X) \rightarrow I_1(Y)$ tal que $I(f)(\Gamma_x) = \Gamma_{f(x)}$.

Podemos descrever a reflexão

$$\begin{tikzcd} CHausPreord \arrow[r, shift left, "I_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & StonePreord \arrow[l, shift left, "H_1"] \end{tikzcd} \tag{3.4}$$

da seguinte forma:

- H_1 é o functor inclusão;
- I_1 é o functor definido em (3.3);
- $\eta_X : X \to H_1I_1(X)$, $\eta_X(x) = \Gamma_x$;
- a counidade, ϵ, é a identidade $I_1H_1 = Id$.

Como a categoria $CHausPreord$ tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$ (3.1.6) e η_X, para qualquer $X \in CHausPreord$, é epimorfismo regular (3.1.5), a reflexão é regular epireflectiva e, portanto, o functor inclusão H_1 preserva e reflecte epimorfismos regulares (1.4.2) e

Proposição 3.2.2 *A categoria $StonePreord$ tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$.*

Um morfismo p diz-se *epimorfismo regular estável para produtos fibrados* se o seu produto fibrado ao longo de qualquer morfismo é epimorfismo regular.

Proposição 3.2.3 *Um morfismo $p : E \to B$ em $StonePreord$ sobrejectivo é epimorfismo regular estável para produtos fibrados se e só se $\preceq_B = p \times p(\preceq_E)$.*

Demonstração: Seja $p : E \to B$ um morfismo em $StonePreord$ sobrejectivo.

Se $\preceq_B = p \times p(\preceq_E)$ então p é epimorfismo regular em $StonePreord$, isto é a relação de pré-ordem em B é a pré-ordem obtida através do fecho transitivo de $p \times p(\preceq_E)$.

Vejamos que p é estável para produtos fibrados. Consideremos o diagrama do produto fibrado de p ao longo de um morfismo α,

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

Sejam $a \preceq a'$ em A, então $\alpha(a) \preceq \alpha(a')$ em B e, pela hipótese, existem $e \preceq e'$ em E tais que $p(e) = \alpha(a)$ e $p(e') = \alpha(a')$. Portanto existem $(e, a) \preceq (e', a')$ em

$E \times_B A$ tais que $\pi_2(e,a) = a$ e $\pi_2(e',a') = a'$. Logo π_2 é epimorfismo regular em $StonePreord$.

Seja $p : E \to B$ um epimorfismo regular em $StonePreord$ estável para produtos fibrados. Vejamos que $\preceq_B = p \times p(\preceq_E)$.

Sejam $b \preceq b'$ em B. Consideremos o espaço finito e discreto $A = \{b \preceq b'\}$, que é um espaço de Stone pré-ordenado, e o produto fibrado de p ao longo de α, sendo $\alpha(b) = b$, $\alpha(b') = b'$. Como p é epimorfismo regular estável para produtos fibrados, então π_2 é epimorfismo regular em $StonePreord$ e temos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

Assim, como $b \preceq b'$ em A existem $x_1' \preceq x_1, x_2' \preceq x_2, \ldots, x_n' \preceq x_n$ em $E \times_B A$ tais que $\pi_2(x_1') = b$, $\pi_2(x_i) = \pi_2(x_{i+1}')$, com $i = 1, ..., n-1$ e $\pi_2(x_n) = b'$. Mas $E \times_B A = (p^{-1}(b) \times b) \cup (p^{-1}(b') \times b')$, logo tem-se, para algum $k = 1, ..., n$, $\pi_2(x_k') = b$ e $\pi_2(x_k) = b'$, ou seja existem $e \preceq e'$ em E tais que $p(e) = b$ e $p(e') = b'$, como pretendíamos mostrar. $\square$

Vejamos que a reflexão não é admissível.

A preservação por I_1 de produtos fibrados da forma

$$\begin{tikzcd} P = B \times_{I_1(B)} A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & I_1(B) \end{tikzcd}$$

com $A \in StonePreord$ (que é igual à admissibilidade da reflexão) significa que

$I_1(\pi_2)$ é um isomorfismo. De facto, no diagrama

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[d, "\pi_1"'] & I_1(P) \arrow[r, "I_1(\pi_2)"] \arrow[d, "I_1(\pi_1)"'] \arrow[dr, phantom, "②"] & I_1(A) = A \arrow[d, "I_1(\alpha) = \alpha"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & I_1(B) \arrow[r, "I_1\eta_B = id"'] & I_1(B) \end{tikzcd}$$

o quadrado ② é um produto fibrado se e só se $I_1(\pi_2)$ é um isomorfismo.

Como os morfismos η_B têm fibras conexas, $I_1(\pi_2)$ é um homeomorfismo ([CJKP97], 7.2). Portanto basta exibir um morfismo $\alpha : A \to I_1(B)$ para o qual $I_1(\pi_2)$ não é um isomorfismo de ordem.

Exemplo 3.2.4 Seja $B \in CHausPreord$ tal que $\Gamma_b \preceq \Gamma_{b'}$ e não existem $x \preceq x'$ tal que $\Gamma_x = \Gamma_b$ e $\Gamma_{x'} = \Gamma_{b'}$. Consideramos o subespaço $A = \{\Gamma_b \preceq \Gamma_{b'}\}$ e seja $\alpha : A \to I_1(B)$ a inclusão. Então no produto fibrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"'] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & I_1(B) \end{tikzcd}$$

onde α é o morfismo inclusão, $P = \{(x, \Gamma_b)|x \sim b\} \cup \{(x', \Gamma_{b'}|x' \sim b'\}$ e $I_1(\pi_2) : \{\Gamma_{(x,\Gamma_b)}, \Gamma_{(x',\Gamma_{b'})}\} \to \{\Gamma_b \preceq \Gamma_{b'}\}$ não é um isomorfismo de ordem. De facto se $\Gamma_{(x,\Gamma_b)} \preceq \Gamma_{(x',\Gamma_{b'})}$ existiria $x \preceq x'$ tal que $\Gamma_x = \Gamma_b$ e $\Gamma_{x'} = \Gamma_{b'}$ o que contradiz a hipótese. $\square$

Consideremos a seguinte classe de morfismos sobrejectivos de $StonePreord$:

$$\Theta = \{\varphi : A \to B | a \preceq a', \varphi(a) \preceq \bar{b} \preceq \varphi(a') \Rightarrow \exists \bar{a} \in A : a \preceq \bar{a} \preceq a'\} \tag{3.5}$$

Proposição 3.2.5 *A adjunção (3.4) é admissível para a classe de morfismos* Θ.

Demonstração: Vejamos que o functor I_1 preserva o produto fibrado representado no seguinte diagrama :

$$\begin{tikzcd}
B \times_{I_1(B)} A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\varphi \in \Theta"] \\
B \arrow[r, "\eta_B"'] & I_1(B)
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $I_1(\pi_2) : I_1(B \times_{I_1(B)} A) \to I(A) = A$, é tal que

$$I_1(\pi_2)(\Gamma_{(x,a)}) \preceq I_1(\pi_2)(\Gamma_{(x',a')}) \Rightarrow \Gamma_{(x,a)} \preceq \Gamma_{(x',a')}.$$

Sejam $a, a' \in A$ tais que $a = I_1(\pi_2)(\Gamma_{(x,a)}), a' = I_1(\pi_2)(\Gamma_{(x',a')})$ e $a \preceq a'$.

Se $a \preceq a'$ então $\varphi(a) \preceq \varphi(a')$ em $I_1(B)$, isto é existe uma sequência finita $x'_1 \preceq x_1, x'_2 \preceq x_2, ..., x'_n \preceq x_n$ em X com

$\varphi(a) = \eta_X(x'_1) = \Gamma_{x'_1}$,

$\Gamma_{x_1} = \eta_X(x_i) = \eta_X(x'_{i+1}) = \Gamma_{x'_{i+1}}$, para $i = 1, ..., n-1$, e

$\varphi(a') = \eta_X(x_n) = \Gamma_{x_n}$.

Então temos

$\varphi(a) \preceq \Gamma_{x_1} \preceq \Gamma_{x_2} \preceq \dots \Gamma_{x_{n-1}} \preceq \varphi(a')$ em $I_1(B)$.

Logo, como $\varphi \in \Theta$, existem $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots \overline{a}_{n-1} \in A$ tais que

$a \preceq \overline{a}_1 \preceq \overline{a}_2 \preceq \dots \preceq \overline{a}_{n-1} \preceq a'$.

Logo existe $(x'_1, a) \preceq (x_1, \overline{a}_1), (x'_2, \overline{a}_1) \preceq (x_2, \overline{a}_2), \dots (x'_n, \overline{a}_{n-1}) \preceq (x_n, a')$ em $X \times_{I(B)} A$ tais que

$\Gamma_{(x,a)} = \eta_{B \times_{I_1(B)} A}(x'_1, a)$,

$\eta B \times_{I_1(B)} A(x_1, a_1) = \eta_{B \times_{I_1(B)} A}(x'_2, \overline{a}_1)$,

$\dots$,

$\eta_{B \times_{I_1(B)} A}(x_n, a_n) = \Gamma_{(x',a')}$,

ou seja $\Gamma_{(x,a)} \preceq \Gamma_{(x',a')}$.

Logo $I_1(\pi_2)$ é um isomorfismo em $StonePreord$. $\square$

3.3 A Reflexão de $StonePreord$ em $PPreord$

Consideremos $PPreord$, a subcategoria plena da categoria $StonePreord$ constituída pelos espaços de Stone pré-ordenados totalmente desconexos em relação a essa pré-ordem.

Nesta secção, caracterizamos a reflexão de $StonePreord$ em $PPreord$ utilizando uma relação de pré-ordem que separa os elementos através de subconjuntos abertos-fechados decrescentes.

Seja $(X, \tau, \preceq)$ um espaço de Stone com uma pré-ordem $\preceq$. Em (X, τ) consideremos a seguinte relação binária:

$$x \preceq^1 y \Leftrightarrow (x \preceq y) \text{ } ou \text{ } (\forall U \in AFD(X, \tau, \preceq) : y \in U \Rightarrow x \in U). \tag{3.6}$$

A relação $\preceq^1$ é uma pré-ordem em (X, τ) e $(X, \tau, \preceq^1)$ é um espaço de Stone totalmente desconexo em relação à pré-ordem, portanto pertence a $PPreord$.

Para todo o $X \in StonePreord$, definimos $\eta_X : (X, \tau, \preceq) \to (X, \tau, \preceq^1)$ por $\eta_X(x) = x$.

Proposição 3.3.1 *Seja X um espaço de Stone com uma pré-ordem. Então η_X é a reflexão de X na categoria $PPreord$.*

Demonstração: Sejam $(X, \tau, \preceq)$ um espaço de Stone com uma pré-ordem e $(Y, \tau_Y, \preceq_Y)$ um espaço de Stone pré-ordenado totalmente desconexo em relação à pré-ordem.

Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua que preserva a pré-ordem. Mostremos que existe um único $g : (X, \tau, \preceq^1) \to (Y, \tau_Y, \preceq_Y)$ tal $g \circ \eta_X = f$.

Definamos $g : (X, \tau, \preceq^1) \to (Y, \tau_Y, \preceq_Y)$ por $g(x) = f(x)$.

A aplicação g é contínua, porque f é contínua.

Sejam $x_1, x_2 \in (X, \tau, \preceq^1)$ tais que $x_1 \preceq^1 x_2$. Provemos que $g(x_1) \preceq_Y g(x_2)$, isto é, $f(x_1) \preceq_Y f(x_2)$.

Se $x_1 \preceq^1 x_2$ então $x_1 \preceq x_2$ ou $\forall_{U \in AFD(X,\tau,\preceq)} x_2 \in U \Rightarrow x_1 \in U$.

Se $x_1 \preceq x_2$, então $f(x_1) \preceq_Y f(x_2)$, pois f preserva a pré-ordem.

Consideremos que $x_1 \npreceq x_2$ e $\forall_{U \in AFD(X,\tau,\preceq)} x_2 \in U \Rightarrow x_1 \in U$ e suponhamos que $f(x_1) \not\preceq_Y f(x_2)$. Então existe $U \in AFD(Y)$ tal que $f(x_2) \in U$ e $f(x_1) \notin U$, pois Y é um espaço de Stone totalmente desconexo em relação à pré-ordem.

Mas se $U \in AFD(Y)$, então $f^{-1}(U) \in AFD(X)$, porque f é contínua e preserva a pré-ordem, logo existe $f^{-1}(U) \in AFD(X, \tau, \preceq)$ tal que $x_2 \in f^{-1}(U)$ e $x_1 \notin f^{-1}(U)$, o que é uma contradição.

A aplicação g é o único morfismo tal que $g \circ \eta_X = f$. □

Assim o functor inclusão

$$H_2 : PPreord \to StonePreord$$

tem adjunto esquerdo, o functor I_2 :

$$I_2 : StonePreord \to PPreord \tag{3.7}$$

onde:

- $I_2(X, \tau, \preceq) = (X, \tau, \preceq^1)$ sendo $\preceq^1$ a relação de pré-ordem definida em (3.6);
- $I_2(f) : I_2(X) \to I_2(Y)$ tal que $I_2(f) = f$;

Podemos, então, descrever a reflexão

$$\begin{tikzcd} StonePreord \arrow[r, shift left=1.5ex, "I_2"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & PPreord \arrow[l, shift left=1.5ex, "H_2"] \end{tikzcd} \tag{3.8}$$

da seguinte forma:

- H_2 é o functor inclusão;
- I_2 é o functor definido em (3.7);
- $\eta_X : X \to H_2 I_2(X)$ é o morfismo identidade em $Conj$;
- a counidade, ϵ, é a identidade $I_2 H_2 = Id$.

Como η_X, para todo o $X \in StonePreord$, é um bimorfismo (isto é, um morfismo que é simultaneamente monomorfismo e epimorfismo) a reflexão é bireflectiva.

Dados $(X, \tau, \preceq) \in PPreord$ e $q : X \to Q$ um epimorfismo regular em $StonePreord$ temos que $\eta_Q \circ q$ é epimorfismo regular em $PPreord$ (1.1.3), e, portanto,

Proposição 3.3.2 *Seja $p : X \to B$ um morfismo em $PPreord$, (π_1, π_2) o seu par núcleo e $q = co - ig(\pi_1, \pi_2)$ em $StonePreord$. Então p é um epimorfismo regular se e só se*

(i) p é sobrejectivo ;

(ii) $b \preceq_B b' \Leftrightarrow (b \preceq_Q b'$ ou $\forall U \in AFD(Q), b' \in U \Rightarrow b \in U)$.

Observação 3.3.3 Dado um morfismo $p : X \to B$ em $PPreord$, seja R_{B_1} a pré-ordem definida pelo fecho transitivo de $p \times p(R_X)$ e S_B o conjunto de todos os pares $(b, b') \notin R_{B_1}$ tais que $b \in U$ sempre que $b' \in U$ para todo o aberto-fechado U de B decrescente relativamente a R_{B_1}. Então p é epimorfismo regular se e só se $R_B = R_{B_1} \cup S_B$. Em particular p é epimorfismo regular se $R_B = R_{B_1}$ sendo portanto, nesse caso, $S_B = \emptyset$.

Dado um morfismo $f : X \to Y$ em $PPreord$, consideremos a sua factorização $(EpiReg, Mono)$ $f = m \circ q$ em $StonePreord$.

Sendo $q : X \to Q$ epimorfismo regular em $StonePreord$ então $q' = \eta_Q \circ q$ é epimorfismo regular em $PPreord$ e, portanto, tem-se

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q'"] \arrow[ddr, "q"'] & & Y \\
& H_2I_2Q \arrow[ur, "m'"'] & \\
& Q \arrow[u, "\eta_Q"] \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Ora m' é um morfismo em $PPreord$ injectivo, pois dados $a, a' \in H_2I_2Q$ tais que $m'(a) = m'(a')$ tem-se $m(a) = m(a')$, como m é monomorfismo em $StonePreord$, então $a = a'$, logo m' é monomorfismo em $PPreord$ e $f = m' \circ q'$ é a factorização de f em $PPreord$, o que implica o seguinte resultado.

Proposição 3.3.4 *A categoria* $PPreord$ *tem um sistema de factorização* $(EpiReg, Mono)$.

A reflexão (3.8) não é admissível, como podemos verificar pelo exemplo 3.1.9, e, portanto, não tem unidades estáveis.

3.4 A Reflexão de $PPreord$ em Psp

Dado $(X, \tau, \preceq)$ um espaço de Stone pré-ordenado totalmente desconexo em relação à pré-ordem, consideremos a relação de equivalência em X definida por

$$x \sim y \Leftrightarrow x \preceq y \text{ e } y \preceq x$$

Seja $(\overline{X}, \tau_1, \leq)$ um espaço onde: $\overline{X} = X/\sim$ é o conjunto quociente, τ_1 é a topologia quociente relativamente à projecção canónica $\eta_X : X \to \overline{X}$ e $\leq$ é a ordem induzida.

Para esta relação de equivalência tem-se $[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \preceq y$.

Proposição 3.4.1 *O espaço* $(\overline{X}, \tau_1, \leq)$ *é um espaço de Priestley.*

Demonstração: O espaço é compacto por ser a imagem contínua de um espaço compacto. Vejamos que é totalmente desconexo em relação à ordem.

Seja $[x] \nleq [y]$.

$[x] \nleq [y] \Rightarrow x \npreceq y \Rightarrow \exists U_1 \in AFD(X) : x \notin U_1$ e $y \in U_1$.

Consideremos $U = \{[a] \in \overline{X} | a \in U_1\}$.

U é um subconjunto aberto de $(\overline{X}, \tau_1)$, porque $\eta_X^{-1}(U) = U_1$ é um subconjunto aberto de X. De facto $U_1 \subseteq \eta_X^{-1}(U)$. Seja $a \in \eta_X^{-1}(U)$, então existe $a' \in U_1$ tal que $[a] = [a']$. O que significa que $a \preceq a'$ e $a' \preceq a$.

Então $a \preceq a'$, $a' \in U_1$ e $U_1 \in AFD(X)$ implica que $a \in U_1$. Logo $U_1 = \eta_X^{-1}(U)$.

Como $\eta_X^{-1}(\overline{X} - U) = X - U_1$, U é um subconjunto fechado de $(\overline{X}, \tau_1)$.

Mostremos que U é decrescente .

Sejam $[a] \leq [b]$, $[b] \in U$.

$[a] \leq [b] \Rightarrow a \preceq b$.

$[b] \in U \Rightarrow \forall x \in [b], x \in U_1$.

Seja $y \in [a]$.

$y \in [a] \Rightarrow y \sim a \Rightarrow y \preceq a$ e $a \preceq y$. Como $a \preceq b$, então $y \preceq b$. Mas $b \in [b]$, logo $b \in U_1$, $U_1 \in AFD(X)$, $y \preceq b$, concluímos, então, que $y \in U_1$, isto é $[a] \in U$.

Ora $[y] \in U$, porque $y \in U_1$, e como $x \notin U_1$ e $x \in [x]$, $[x] \notin U$, e segue-se a conclusão. □

Proposição 3.4.2 *Seja $(X, \tau, \preceq)$ um espaço de Stone pré-ordenado totalmente desconexo em relação à pré-ordem, então η_X é a reflexão de X em Psp.*

Demonstração: Sejam $(X, \tau, \preceq)$ um espaço de Stone pré-ordenado totalmente desconexo em relação à pré-ordem e $(Y, \tau_Y, \leq_Y)$ um espaço de Priestley.

Seja $f : (X, \tau, \preceq) \rightarrow (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ uma aplicação contínua e preservando a pré-ordem.

Provemos que existe um único $g : (\overline{X}, \tau_1, \leq) \rightarrow (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ tal que $g \circ \eta_X = f$.

Definamos $g : (\overline{X}, \tau_1, \leq) \rightarrow (Y, \tau_Y, \leq_Y)$ por $g([x]) = f(x)$.

Seja $x_1, x_2 \in X$ tal que $[x_1] = [x_2]$.

Se $[x_1] = [x_2]$ então $x_1 \sim x_2$, isto é $x_1 \preceq x_2$ e $x_2 \preceq x_1$. Mas f preserva a pré-ordem, logo $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$ e $f(x_2) \leq_Y f(x_1)$, então $f(x_1) = f(x_2)$, porque $\leq_Y$ é uma relação de ordem, o que implica que $g([x_1]) = g([x_2])$.

A aplicação g é contínua, pois f é uma aplicação contínua, $g \circ \eta_X = f$ e η_X é a aplicação quociente.

Mostremos que g preserva a ordem.

Sejam $[x_1], [x_2] \in \overline{X}$ tais que $[x_1] \leq [x_2]$.

Se $[x_1] \leq [x_2]$ então $x_1 \preceq x_2$ e $f(x_1) \leq_Y f(x_2)$, porque f preserva a pré-ordem, logo $g([x_1]) \leq_Y g([x_2])$.

Claramente g é o único morfismo tal que $g \circ \eta_X = f$. □

Assim o functor inclusão

$$H_3 : Psp \rightarrow PPreord$$

tem adjunto à esquerda, o functor I_3,

$$I_3 : PPreord \to Psp, \tag{3.9}$$

onde:

- $I_3(X,\tau,\preceq) = (\overline{X},\tau_1,\leq)$ com $[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \preceq y$;
- $I_3(f) = I_3(X) \to I_3(Y)$ tal que $I_3(f)([x]) = [f(x)]$.

E a reflexão

$$\begin{tikzcd} PPreord \arrow[r, shift left, "I_3"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Psp \arrow[l, shift left, "H_3"] \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

é descrita por:

- H_3 é o functor inclusão;
- I_3 é o functor definido em (3.9);
- $\eta_X : X \to H_3I_3(X), \eta_X(x) = [x]$;
- a counidade, ϵ, é a identidade $I_3H_3 = Id$.

Dado um espaço $(X,\tau,\preceq)$ em $PPreord$ e $\eta_X : (X,\tau,\preceq) \to (\overline{X},\tau,\leq)$ a componente da unidade da reflexão associada a X, o morfismo

$$(X,\tau,\preceq) \to X_2 = (\overline{X},\tau,\preceq_{X_2}),$$

com $[x] \preceq_{X_2} [y] \Leftrightarrow ([x] \preceq_{X_1} [y]$ ou $\forall U \in AFD(X_1), [y] \in U \Rightarrow [y] \in U)$ e $(X,\tau,\preceq) \to X_1 = (\overline{X},\tau,\preceq_{X_1})$ epimorfismo regular em $StonePreord$, é um epimorfismo regular em $PPreord$ visto que $(\overline{X},\tau,\leq_{X_1}) = (\overline{X},\tau,\leq_{X_2})$.

Assim, a reflexão é regular epireflectiva e, como a categoria $PPreord$ tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$ (3.3.4), o functor H_3 preserva e reflecte epimorfismos regulares (1.4.2) e

Proposição 3.4.3 *A categoria Psp tem um sistema de factorização $(EpiReg, Mono)$.*

João Xarez em [Xar03] prova que a reflexão da categoria $Preord$ das pré-ordens na categoria Ord das ordens tem unidades estáveis. Utilizando este facto, provamos que a reflexão $PPreorder$ em Psp também tem unidades estáveis. Para isso consideramos o seguinte resultado geral:

Proposição 3.4.4 *Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{X}, \mathcal{X}_1$ categorias com produtos fibrados.*

Sejam $(I_1, H_1, \eta_1, \epsilon_1) : \mathcal{C}_1 \rightharpoonup \mathcal{X}_1$ uma reflexão plena com unidades estáveis e $H : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$ uma imersão plena que tem adjunto esquerdo, $I \dashv H : \mathcal{X} \to \mathcal{C}$.

Se existem functores V e U que preservam produtos fibrados tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, shift left, "I"] \arrow[d, "V"'] & \mathcal{X} \arrow[l, shift left, "H"] \arrow[d, "U"] \\ \mathcal{C}_1 \arrow[r, shift left, "I'"] & \mathcal{X}_1 \arrow[l, shift left, "H'"] \end{tikzcd} \tag{3.11}$$

então a adjunção $< I, H, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X}$ tem unidades estáveis se U reflecte isomorfismos.

Demonstração: Seja

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A \arrow[r, "\alpha"'] & H(X) \end{tikzcd}$$

um produto fibrado em $\mathcal{C}$.

Suponhamos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} \overline{P} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & I(B) \arrow[d, "I(\beta)"] \\ I(A) \arrow[r, "I(\alpha)"'] & IH(X) \end{tikzcd}$$

é o produto fibrado de $I(\beta)$ ao longo de $I(\alpha)$.

Como $I(\beta) \circ I(\pi_2) = I(\alpha) \circ I(\pi_1)$, existe um único morfismo $\varphi : I(P) \to \overline{P}$ tal que $p_2 \circ \varphi = I(\pi_2)$ e $p_1 \circ \varphi = I(\pi_1)$.

Por outro lado, V preserva produtos fibrados, logo o diagrama

$$\begin{tikzcd} V(P) \arrow[r, "V(\pi_2)"] \arrow[d, "V(\pi_1)"'] & V(B) \arrow[d, "V(\beta)"] \\ V(A) \arrow[r, "V(\alpha)"'] & VH(X) \end{tikzcd} \tag{3.12}$$

é um produto fibrado em $\mathcal{C}_1$ e $VH(X) = H_1(U(X))$.

Como $< I_1, H_1, \eta_1, \epsilon_1 >: \mathcal{C}_1 \rightharpoonup \mathcal{X}_1$ tem unidades estáveis e o diagrama (3.11) é comutativo, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} I_1V(P) \arrow[r, "I_1(\pi_2)"] \arrow[d, "I_1V(\pi_1)"'] & I_1V(B) \arrow[d, "I_1V(\beta)"] \\ I_1V(A) \arrow[r, "I_1V(\alpha)"'] & I_1H_1(U(X)) \end{tikzcd}$$

é o produto fibrado de $UI(\beta)$ ao longo de $UI(\alpha)$.

Mas U preserva produtos fibrados, logo o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} U(\overline{P}) \arrow[r, "U(p_2)"] \arrow[d, "U(p_1)"'] & UI(B) \arrow[d, "UI(\beta)"] \\ UI(A) \arrow[r, "UI(\alpha)"'] & I_1H_1(U(X)) \end{tikzcd}$$

é também produto fibrado de $UI(\beta)$ ao longo de $UI(\alpha)$.

Como existe $U\varphi : UI(P) \to U(\overline{P})$ tal que $UI(\alpha) \circ UI(\pi_1) = UI(\beta) \circ UI(\pi_2)$, então $U\varphi$ é um isomorfismo.

Ora U reflecte isomorfismos, logo φ é um isomorfismo, e portanto o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
I(P) \arrow[r, "I(\pi_2)"] \arrow[d, "I(\pi_1)"'] & I(B) \arrow[d, "I(\beta)"] \\
I(P) \arrow[r, "I(\alpha)"'] & IH(X)
\end{tikzcd}
$$

é o produto fibrado de $I(\beta)$ ao longo de $I(\alpha)$, logo a adjunção $< I, H, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X}$ tem unidades estáveis. $\square$

Consideremos o seguinte diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
PPreord \arrow[r, shift left, "I"] \arrow[d, hook] \arrow[dd, bend right=60, "V"'] & Psp \arrow[l, shift left, "H"] \arrow[d, hook] \arrow[dd, bend left=60, "U"] & \\
StonePreord \arrow[d, "V'"] & StoneOrd \arrow[d, "U'"] & Stone \arrow[d, "'"] \\
Preord \arrow[r, shift left, "I'"] & Ord \arrow[l, shift left, "H'"] & Conj
\end{tikzcd}
\tag{3.13}
$$

Proposição 3.4.5 *O functor U reflecte isomorfismos.*

Demonstração: Seja $\varphi : (X, \tau, \leq) \to (Y, \tau, \leq)$ um morfismo na categoria dos espaços de Priestley.

Suponhamos que $U(\varphi) : (X, \leq) \to (Y, \leq)$ é um isomorfismo na categoria dos conjuntos ordenados. Então φ é sobrejectiva, mas X, Y são espaços compactos de Hausdorff, logo φ é um epimorfismo regular. Como φ é monomorfismo, φ é um isomorfismo na categoria dos espaços de Priestley. $\square$

Proposição 3.4.6 *Os functores U e V preservam produtos fibrados.*

Demonstração: Conclui-se vendo como são construídos os limites em Psp (1.8.3 e 1.8.4). $\square$

Teorema 3.4.7 *A reflexão (3.10) tem unidades estáveis.*

Demonstração: O diagrama (3.13) é comutativo, os functores U e V preservam produtos fibrados , o functor U reflecte isomorfismos e a reflexão

$$\begin{tikzcd} Preord \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Ord \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

tem unidades estáveis ([Xar03]), logo podemos concluir que a reflexão (3.10) tem unidades estáveis (3.4.4). $\square$

3.5 A Reflexão de $CHausOrd$ em Psp

Aqui provamos que o functor inclusão $Psp \hookrightarrow CHausOrd$ tem como adjunto esquerdo o functor composição dos functores adjuntos esquerdos das inclusões $Psp \hookrightarrow PPreord \hookrightarrow StonePreord \hookrightarrow CHausPreord$ restrito a $CHausOrd$, utilizando o resultado geral apresentado na proposição 3.5.1.

Proposição 3.5.1 *Dados functores $H : \mathcal{X} \to \mathcal{C}, H' : \mathcal{X} \to \mathcal{C}'$ e a imersão plena $E : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tal que $E \circ H = H'$ então, se H' tem adjunto à esquerda I', o functor $I'E$ é adjunto à esquerda de H.*

Demonstração: Consideremos a adjunção $I' \dashv H'(\eta', \epsilon')$, $\eta'_{E(C)} : E(C) \to H'I'E(C)$ e $f : E(C) \to EH(X)$ um morfismo em $\mathcal{C}'$ (e portanto em $\mathcal{C}$ porque $\mathcal{C}$ é plena). Pela universabilidade de η'

$$\begin{tikzcd} E(C) \arrow[r, "\eta'_{E(C)}"] \arrow[dr, "f"'] & H'I'E(C)= EHI'E(C) \arrow[d, dashed, "H'(f') \;=\; EH(f')"] & I'E(C) \arrow[d, dashed, "f' \in \mathcal{X}"] \\ & H'(X)= EH(X) & X \end{tikzcd}$$

existe um único morfismo $f' \in \mathcal{X}$ tal que $H'(f') \circ \eta'_{E(C)} = f$.

Mas $H'(f') = EH(f')$ e, como E é uma imersão plena, temos a seguinte situação em $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, "f"'] & HI'E(C) \arrow[d, dashed, "H(f)"] & & I'E(C) \arrow[d, dashed, "f \in \mathcal{X}"] \\ & H(X) & & X \end{tikzcd}$$

sendo portanto η_C um morfismo universal de $\mathcal{C}$ para H. □

Corolário 3.5.2 *O functor $H : Psp \to CHausOrd$ tem adjunto à esquerda.*

Demonstração: Estamos nas condições da proposição anterior com

$$\begin{tikzcd} CHausOrd \arrow[d, hook, "E"'] & \\ CHausPreord \arrow[r, shift right, "I'"'] \arrow[r, phantom, "\top"] & Psp \arrow[l, shift right, "H'"'] \arrow[ul, "H"'] \end{tikzcd}$$

onde $I' = I_3 \circ I_2 \circ I_1$. □

Temos, então, a seguinte reflexão:

$$\begin{tikzcd} CHausOrd \arrow[r, shift left, "I"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & Psp \arrow[l, shift left, "H"] \end{tikzcd} \qquad (3.14)$$

onde:

- H é o functor inclusão;
- I é o functor I' restrito a $CHausOrd$.
- $\eta_X : X \to HI(X), \eta_X(x) = [\Gamma_x]$;

- a counidade ϵ é a identidade $IH = Id$.

A reflexão (3.14) não é admissível, e portanto não tem unidades estáveis. O contra exemplo apresentado em 3.1.9 serve também para este caso, uma vez que também $X \in CHausOrd$ e $Y \in Psp$.

4

Morfismos de descida efectiva em Psp

Neste capítulo caracterizamos os morfismos de descida nas categorias $PPreord$ e Psp e provamos que um morfismo em Psp é morfismo de descida efectiva nessa categoria se e só se é morfismo de descida efectiva em $PPreord$.

4.1 Descida e descida efectiva numa categoria

Apresentamos, nesta secção, as definições de morfismos de descida e de descida efectiva numa categoria $\mathcal{C}$ com produtos fibrados através do functor de comparação de Eilenberg-Moore, $\Phi : \mathcal{C}/B \to (\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}}$, atendendo a que, para a fibração em causa, monacidade e descida coincidem [BR70].

Seja B um objecto numa categoria $\mathcal{C}$, consideremos a categoria $(\mathcal{C}/B)$ cujos objectos são os pares (A, α) com A um objecto e $A \xrightarrow{\alpha} B$ um morfismo em $\mathcal{C}$ e os morfismos $(A, \alpha) \xrightarrow{f} (A', \alpha')$ são os morfismos $A \xrightarrow{f} A'$ em $\mathcal{C}$ tais que $\alpha' \circ f = \alpha$.

Observações 4.1.1 Um morfismo $A \xrightarrow{f} C$ em $\mathcal{C}$ para o qual existe um morfismo $C \xrightarrow{\gamma} B$ pode ser visto como um morfismo $(A, \gamma \circ f) \xrightarrow{f} (C, \gamma)$ em $(\mathcal{C}/B)$.

A categoria $(\mathcal{C}/B)$ tem produtos fibrados e o produto fibrado de um morfismo $(A, \alpha) \xrightarrow{f} (C, \gamma)$ ao longo de um morfismo $(D, \delta) \xrightarrow{g} (C, \gamma)$ pode ser construído como um produto fibrado de f ao longo de g em $\mathcal{C}$. Por isso, muitas vezes, um diagrama envolvendo produtos fibrados em $\mathcal{C}$ também pode ser usado como um diagrama em $(\mathcal{C}/B)$.

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos fibrados e seja $p : E \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$, então existe uma adjunção associada a p, $p! \dashv p^* : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}/E$.

O functor p^* é definido por $p^*(A,\alpha) = (E \times_B A, \pi_1)$ e $p^*(f) = 1 \times_B f$

$$\begin{tikzcd}
E \times_B A' \arrow[rrr, "\widehat{\pi}_2"] \arrow[dr, "1 \times_B f"] \arrow[ddr, "\widehat{\pi}_1"'] & & & A' \arrow[dl, "f"] \arrow[dd, "\alpha'"] \\
& E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] & A \arrow[d, "\alpha"] & \\
& E \arrow[r, "p"'] & B &
\end{tikzcd}$$

com π_1, π_2 as projecções.

O functor $p!$ é definido pela composição: $p!(C,\gamma) = (C, p\gamma)$ e $p!(g) = g$. A unidade da adjunção, η, é o único morfismo tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "id"'] \arrow[dr, "\eta_{(c,\gamma)}"] \arrow[dd, "\gamma"] & & C \arrow[dd, "p\gamma"] \\
& E \times_B C \arrow[ur, "\pi_2"] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\
E \arrow[rr, "p"'] & & B
\end{tikzcd}$$

comuta; a counidade ϵ é definida por $\epsilon_{(A,\alpha)} = \pi_2 : (E \times_B A, p\pi_1) \to (A, \alpha)$.

A esta adjunção, pela proposição 1.3.1, associamos a mónada

$$\mathbb{T} = (p^*p!, \eta, \mu = p^*\epsilon p!) \tag{4.1}$$

em $\mathcal{C}/E$, com

- $T(C,\gamma) = (E \times_B C, \pi_1), (C,\gamma) \in \mathcal{C}/E$;

- $T(g:(C,\gamma)\to(C',\gamma'))=\overline{g}:(E\times_B C,\pi_1)\to(E\times_B C',\pi_1')$ com

$$\begin{cases}\pi_1'\circ\overline{g}=\pi_1\\ \pi_2'\circ\overline{g}=g\circ\pi_2\end{cases}$$

- $\eta: Id_{\mathcal{C}/E}\to p*p!$ é tal que, para $(C,\gamma)\in\mathcal{C}/E$, $\begin{cases}\pi_1\circ\eta_{(C,\gamma)}=\gamma\\ \pi_2\circ\eta_{(C,\gamma)}=1_C\end{cases}$

- $\mu: p^*p!p^*p!\to p^*p!$ é tal que, para $(C,\gamma)\in\mathcal{C}/E$, $\mu_{(C,\gamma)}=p^*\epsilon_{p!(C,\gamma)}$.

A categoria das álgebras $(\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}}$ associada à mónada $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ é constituída pelos objectos $(C,\gamma;\xi)$ em que $(C,\gamma)\in\mathcal{C}/E$ e ξ é um morfismo de $(E\times_B C,\pi_1)$ em (C,γ) na categoria $\mathcal{C}/E$ tal que

$$\xi\circ\eta_{(C,\gamma)}=1_C \;\; e \;\; \xi\circ T(\xi)=\xi\circ\mu_{(C,\gamma)}$$

ou seja, tal que os diagramas (onde denotamos $T(\xi)$ por $\overline{\xi}$ e $\mu_{c,\gamma}$ por $\overline{\pi_2}$)

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\eta_{(C,\gamma)}"] \arrow[dr, "1_C"'] & E\times_B C \arrow[d, "\xi"] \\ & C \end{tikzcd} \quad \text{e} \quad \begin{tikzcd} E\times_B(E\times_B C) \arrow[r, "\overline{\xi}"] \arrow[d, "\overline{\pi_2}=\mu_C"'] & E\times_B C \arrow[d, "\xi"] \\ E\times_B C \arrow[r, "\xi"'] & C \end{tikzcd}$$

comutam.

Consideremos o functor de comparação de Eilenberg-Moore

$$\Phi:\mathcal{C}/B\to(\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}}:\begin{cases}\Phi(A,\alpha)=(p^*(A,\alpha),p^*\epsilon_{(A,\alpha)})\\ \Phi(f)=p^*(f)\end{cases}$$

$$
\begin{tikzcd}
E \times_B (E \times_B A) \arrow[rrr, bend left, "\pi_2'"] \arrow[dr, "\overline{\pi}_2 = p^*\epsilon_{(A,\alpha)}"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_1'"'] & & & E \times_B A \arrow[dl, "\pi_2 = \epsilon_{(A,\alpha)}"'] \arrow[ddl, bend left, "p\pi_1"] \\
& E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & A \arrow[d, "\alpha"] & \\
& E \arrow[r, "p"] & B &
\end{tikzcd}
$$

Desta forma obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}/B \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, shift left, "p^*"] & & (\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}} \arrow[dl, shift left, "p^{*\mathbb{T}}"] \\
& \mathcal{C}/E \arrow[ul, shift left, "p!"] \arrow[ur, shift left, "p!^{\mathbb{T}}"] &
\end{tikzcd}
$$

Definição 4.1.2 *Um morfismo $p : E \to B$ diz-se um morfismo de descida se p^* é pré-monádico, isto é, se Φ é fiel e pleno.*

Definição 4.1.3 *Um morfismo $p : E \to B$ diz-se um morfismo de descida efectiva se p^* é monádico, o que significa que Φ é uma equivalência de categorias.*

Proposição 4.1.4 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria com produtos fibrados. O functor de comparação $\Phi : \mathcal{C}/B \to (\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}}$ tem um adjunto à esquerda L se e só se $(\mathcal{C}/B)$ tem co-igualizadores dos pares (ξ, π_2), para $(C, \gamma; \xi) \in (\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}}$, e $L(C, \gamma; \xi) = (Q, \delta)$, em que (Q, δ) é o co-domínio do co-igualizador de (ξ, π_2) em $\mathcal{C}/B$.*

Definição 4.1.5 *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Um morfismo $p : E \to B$ em $\mathcal{C}$ é um epimorfismo regular estável para produtos fibrados se para todo o produto fibrado*

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

π_2 é epimorfismo regular. Em particular, tomando $\alpha = 1_B$, vem que o próprio p é epimorfismo regular.

Uma vez que, para $(A, \alpha) \in \mathcal{C}/B$, $\epsilon_{(A,\alpha)} = \pi_2$ resulta do produto fibrado de p com α, temos numa categoria $\mathcal{C}$ o seguinte resultado que será usado frequentemente nesta tese.

Proposição 4.1.6 *Um morfismo $p : E \to B$ é morfismo de descida se e só se p é um epimorfismo regular estável para produtos fibrados.*

Na proposição seguinte enunciamos factos relativos à mónada induzida pela adjunção $p! \dashv p^* : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}/E$ demonstrados em [ST92] e que utilizaremos para caracterizar os morfismos de descida efectiva em $PPreord$.

Proposição 4.1.7 *Para a mónada $\mathbb{T}$ induzida pela adjunção $p! \dashv p^* : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}/E$ temos que para qualquer $\mathbb{T}$-álgebra $(C, \gamma; \xi)$*

(i) o par (π_2, ξ) é uma relação de equivalência em C que é efectiva se e só se $\alpha_{(C,\gamma,\xi)}$ é um monomorfismo para toda a álgebra (C, γ, ξ);

(ii) se q =co-igualizador(π_2, ξ) então

$$q(c) = q(c') \Leftrightarrow \xi(\gamma(c), c') = c \Leftrightarrow \xi(\gamma(c'), c) = c'.$$

Se $\mathcal{C}/B$ tem co-igualizadores de relações de equivalência então o functor Φ tem adjunto à esquerda, L. A componente da unidade da adjunção $L \dashv \Phi : \mathcal{C} \downarrow B \to (\mathcal{C}/E)^{\mathbb{T}}$ no ponto $(C, \gamma; \xi)$ é o único $\mathbb{T}$-morfismo

$$\alpha_{(C,\gamma;\xi)} : (C, \gamma; \xi) \to \Phi L(C, \gamma; \xi)$$

tal que

$$\alpha_{(C,\gamma;\xi)} \circ \xi = 1 \times_B q(= p^*(q)).$$

Equivalentemente, é o único morfismo de $\mathcal{C}$ para o qual comutam os dois triângulos de cima no diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, dashed] \arrow[dd, "\gamma"'] & & Q \arrow[dd, "\delta"] \\
& E \times_B Q \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"'] & \\
E \arrow[rr, "p"'] & & B
\end{tikzcd}$$

portanto, $\alpha_{(C,\gamma;\xi)}$ é um monomorfismo se e só se (γ, q) é um par conjuntamente monomórfico.

Proposição 4.1.8 *Para uma $\mathbb{T}$-álgebra $(C, \gamma; \xi)$ as seguintes condições são equivalentes:*

(i) (π_2, ξ) *é uma relação de equivalência efectiva;*

(ii) $\alpha_{(C,\gamma;\xi)}$ *é um monomorfismo.*

Com a notação definida nesta secção enunciamos o Teorema 2.3 de [ST92].

Teorema 4.1.9 *Um epimorfismo regular numa categoria $\mathcal{C}$ é um morfismo de descida efectiva se e só se, para qualquer $\mathbb{T}$-álgebra $(C, \gamma; \xi)$, a relação de equivalência (π_2, ξ) é efectiva e o seu co-igualizador é um morfismo de descida em $\mathcal{C}$.*

4.2 Morfismos de descida efectiva em $PPreord$

Vamos estudar os morfismos de descida efectiva em $PPreord$ utilizando a teoria das mónadas tal como a exposta na secção anterior.

Começamos por caracterizar os morfismos de descida em $PPreord$.

Proposição 4.2.1 *Um morfismo $p : E \to B$ em $PPreord$ (Psp) é morfismo de descida se e só se $\preceq_B = p \times p(\preceq_E)$.*

Demonstração: Se $\preceq_B = p \times p(\preceq_E)$ então $\preceq_B$ é o fecho transitivo de $p \times p(\preceq_E)$ e $S_B = \emptyset$ (veja observação 3.3.3). Logo p é epimorfismo regular em $PPreord$ (Psp).

Vejamos que é estável para produtos fibrados. Consideremos o diagrama do produto fibrado de p ao longo de um morfismo α,

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

Sejam $a \preceq a'$ em A, então $\alpha(a) \preceq \alpha(a')$ em B, pela hipótese, existem $e \preceq e'$ em E tais que $p(e) = \alpha(a)$ e $p(e') = \alpha(a')$, portanto existem $(e, a) \preceq (e', a')$ em $E \times_B A$ tais que $\pi_2(e, a) = a$ e $\pi_2(e', a') = a'$. Logo π_2 é epimorfismo regular em $PPreord$ (Psp).

Seja $p : E \to B$ um morfismo de descida em $PPreord$ (Psp), então p é epimorfismo regular estável para produtos fibrados. Vejamos que $\preceq_B = p \times p(\preceq_E)$.

Sejam $b \preceq b'$ em B. Consideremos o espaço finito e discreto $A = \{b \preceq b'\}$ e o produto fibrado de p ao longo de α, sendo $\alpha(b) = b$, $\alpha(b') = b'$. Como p é epimorfismo regular estável para produtos fibrados, então π_2 é epimorfismo regular em $PPreord$ (Psp) e temos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[rr, "\pi_2"] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "\pi_1"'] & & A \arrow[dd, "\alpha"] \\ & A' \arrow[ur, "\eta_{A'}"'] & \\ E \arrow[rr, "p"'] & & B \end{tikzcd}$$

com q epimorfismo regular em $StonePreord$ e $\eta_{A'}$ a reflexão de A' em $PPreord$. Mas $\eta_{A'}$ é a identidade em Top, logo $A' \in PPreord$ (Psp) pois é finito e discreto, portanto $A' = A$. Assim, como $b \preceq b'$ em A, existem $x_1' \preceq x_1, x_2' \preceq x_2, \ldots, x_n' \preceq x_n$ em $E \times_B A$ tais que $\pi_2(x_1') = b$, $\pi_2(x_i) = \pi_2(x_{i+1}')$, com $i = 1, ..., n-1$, e $\pi_2(x_n) = b'$. Mas $E \times_B A = (p^{-1}(b) \times b) \cup (p^{-1}(b') \times b')$, logo tem-se, para algum $k = 1, ..., n$, $\pi_2(x_k') = b$ e $\pi_2(x_k) = b'$, ou seja existem $e \preceq e'$ em E tais que $p(e) = b$ e $p(e') = b'$, como pretendíamos mostrar. $\square$

Proposição 4.2.2 *Sejam $\mathcal{C}'$ uma categoria com produtos fibrados, $\mathcal{C}$ uma subcategoria plena de $\mathcal{C}'$ fechada para produtos fibrados e $p : E \to B$ um morfismo de $\mathcal{C}$.*

(i) Se p é morfismo de descida em $\mathcal{C}'$, então p é morfismo de descida em $\mathcal{C}$.

(ii) Se p é morfismo de descida efectiva em $\mathcal{C}'$, então p é morfismo de descida efectiva em $\mathcal{C}$ se e só se

$$E \times_B A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \in \mathcal{C}$$

para qualquer produto fibrado (4.2) em $\mathcal{C}'$.

Demonstração: Sejam $\Phi : \mathcal{C}'/B \to Des_{\mathcal{C}'}(p)$ o functor de comparação definido em $\mathcal{C}'/B$ e $\Phi_1 : \mathcal{C} \downarrow B \to Des_{\mathcal{C}}(p)$ o definido em $\mathcal{C}/B$.

(i) Consideremos $p : E \to B$ um morfismo de descida em $\mathcal{C}'$, logo Φ é fiel e pleno. Como o functor Φ restringe-se e co-restringe-se a Φ_1 então Φ_1 também é fiel e pleno, isto é, p é um morfismo de descida em $\mathcal{C}$.

(ii) Seja $p : E \to B$ um morfismo de descida efectiva em $\mathcal{C}'$, então Φ é uma equivalência, logo p é de descida em $\mathcal{C}'$, e por (i) é também de descida em $\mathcal{C}$. Suponhamos que p é de descida efectiva em $\mathcal{C}$, isto é Φ_1 é uma equivalência, e consideremos o produto fibrado

$$\begin{tikzcd} E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

em $\mathcal{C}'$ com $E \times_B A$ em $\mathcal{C}$.

Como π_1 está em $\mathcal{C}$, $\Phi(A, \alpha) \in Des_{\mathcal{C}}(p)$, logo existe $(A', \alpha') \in (\mathcal{C}/B)$ tal que $\Phi_1(A', \alpha') \cong \Phi(A, \alpha)$, como Φ restringe-se e co-restringe-se a Φ_1, temos $\Phi(A', \alpha') = \Phi_1(A', \alpha')$ e $\Phi(A', \alpha') \cong \Phi(A, \alpha)$, mas, sendo Φ fiel e pleno reflecte isomorfismos e portanto $(A', \alpha') \cong (A, \alpha)$, logo $A' \cong A$ em $\mathcal{C}'$. Como

$A' \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ é fechada para isomorfismos (por se fechada para produtos fibrados), $A \in \mathcal{C}$.

Reciprocamente, seja $(C, \gamma, \xi) \in Des_{\mathcal{C}}(p)$, como $\mathcal{C}$ é fechada para produtos fibrados, $(C, \gamma, \xi) \in Des_{\mathcal{C}'}(p)$. Como Φ é uma equivalência, existe $(A, \alpha) \in Des_{\mathcal{C}'}(p)$ tal que $\Phi(A, \alpha) = (C, \gamma, \xi)$, em particular, para algum q

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\ E \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

é um produto fibrado. Como $C \in \mathcal{C}$ e por hipótese $A \in \mathcal{C}$, então $(A, \alpha) \in (\mathcal{C}/B)$. Como $\Phi_1(A, \alpha) \cong \Phi(A, \alpha) = (C, \gamma, \xi)$, Φ_1 é isomorficamente denso. Mas Φ_1 é também fiel e pleno, pois p é de descida em $\mathcal{C}$, logo Φ_1 é uma equivalência, isto é, p é um morfismo de descida efectiva em $\mathcal{C}$. $\square$

Para $\mathcal{C}' = PPreord$ e $\mathcal{C} = FinPreord$, a categoria dos espaços pré-ordenados finitos que se pode identificar com a subcategoria plena dos espaços finitos de $PPreord$ (atribuindo a cada $(X, \leq)$ em $\mathcal{C}$ a topologia discreta), $\pi_2 : E \times_B A \to A$ é sobrejectivo e $E \times_B A \in FinPreord$ então $A \in FinPreord$. Logo, $p : E \to B$, em $FinPreord$, é um morfismo de descida efectiva em $FinPreord$ se é morfismo de descida efectiva em $PPreord$.

Morfismos de descida efectiva em $FinPreord$ (em $Preord$) foram caracterizados em [JS02], Proposição 3.4, da seguinte forma:

Proposição 4.2.3 *Um morfismo $p : E \to B$ em $FinPreord$ (em $Preord$) é morfismo de descida efectiva se e só se para toda a cadeia $b_0 \leq b_1 \leq b_2$ em B existe $e_0 \leq e_1 \leq e_2$ em E tal que $p(e_i) = b_i$ para $i = 0, 1$ e 2.*

É agora fácil mostrar que a classe dos morfismos de descida efectiva em $PPreord$ é uma subclasse própria da classe dos morfismos de descida.

Exemplo 4.2.4 Seja $E = \{e_0, e_0', e_1, e_1', e_2, e_2'\}$ com

$$R_E = \{(e_0, e_1), (e_1', e_2), (e_0', e_2')\} \cup \Delta_E$$

e $B = \{b_0, b_1, b_2\}$ com

$$R_B = \{(b_0, b_1), (b_1, b_2), (b_0, b_2)\} \cup \Delta_B.$$

Então $p : E \to B$ com

$$p(e_0) = p(e_0') = b_0,\ p(e_1) = p(e_1') = b_1 \text{ e } p(e_2) = p(e_2') = b_2$$

é um morfismo de descida em $PPreord$ mas não é morfismo de descida efectiva nessa categoria, pois, caso contrário, seria morfismo de descida efectiva em $FinPreord$ o que é falso. □

Para qualquer morfismo $p : E \to B$ em $PPreord$, (π_2, ξ) é uma relação de equivalência efectiva pois $\alpha = \alpha_{(C,\gamma;\xi)}$ é monomorfismo para toda a $\mathbb{T}$-álgebra $(C, \gamma; \xi)$. De facto α é injectiva como vamos provar. Consideremos o diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \times_B C \arrow[r, shift left, "\pi_2"] \arrow[r, shift right, "\xi"'] & C \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[dd, "\gamma"'] & & Q \arrow[dd, "\delta"] \\
& & E \times_B Q \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\
& E \arrow[rr, "p"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Sejam $c, c' \in C$ tais que $\alpha(c) = \alpha(c')$. Como $\alpha_{(C,\gamma;\xi)}(c) = (\gamma(c), q(c))$ temos $\gamma(c) = \gamma(c')$ e $q(c) = q(c')$.

Ora $q(c) = q(c') \Leftrightarrow \xi(\gamma(c'), c) = c' \Leftrightarrow \xi(\gamma(c), c') = c$.

Como $\xi(\gamma(c'), c') = c'$, porque $\xi \circ \eta_{(C,\gamma)} = 1$, temos que

$c = \xi(\gamma(c), c') = \xi(\gamma(c'), c') = c'$, portanto α é injectiva.

Além disso, como $\alpha_{(C,\gamma;\xi)} \circ \xi = 1 \times_B q$ e $1 \times_B q$ é sobrejectivo (porque q é sobrejectivo) então α é sobrejectivo.

Vemos assim (tal como observado em [ST92], depois do corolário 2.8) que α é um bimorfismo em qualquer categoria concreta sobre a categoria dos conjuntos cujo functor de esquecimento preserva produtos fibrados e co-igualizadores. Neste caso, como $PPreord$ é uma subcategoria plena de $CHaus$, $\alpha_{(C,\gamma;\xi)}$ é um homeomorfismo para todo o $(C, \gamma; \xi)$.

Proposição 4.2.5 *Um morfismo de descida $p : E \to B$ em $PPreord$ é de descida efectiva se e só se para toda a $\mathbb{T}$-álgebra $(C, \gamma; \xi)$, se $U \in AFD(C)$ então $\alpha(U) \in AFD(E \times_B Q)$.*

Demonstração: Já vimos que, na adjunção $L \dashv \Phi(\alpha, \beta)$, β é um isomorfismo natural se e só se p é morfismo de descida. Sabemos também que $\alpha(U)$ é aberto-fechado se U é aberto-fechado visto α ser homeomorfismo. Se α é um isomorfismo em $PPreord$ então $\alpha(U)$ é decrescente se U o for.

Reciprocamente, sejam $c, c' \in C$ tais que $\alpha(c) \preceq \alpha(c')$. Vejamos que $c \preceq c'$.

Suponhamos que $c \npreceq c'$, então, como C é totalmente desconexo em relação à pré-ordem, existe U aberto-fechado decrescente em C tal que $c' \in U$ e $c \notin U$. Como α é um homeomorfismo $\alpha(U)$ é também aberto-fechado decrescente de $E \times_B C$ e $\alpha(c') \in \alpha(U)$ e $\alpha(c) \notin \alpha(U)$, o que é um absurdo.

Assim α é um isomorfismo em $PPreord$ para todo o $(C, \gamma; \xi)$, logo p é morfismo de descida efectiva nessa categoria. $\square$

4.3 Morfismos de descida efectiva em Psp

Como $PPreord$ tem produtos fibrados e Psp é uma subcategoria plena e fechada para produtos fibrados, utilizamos a proposição 4.2.2 e o facto da reflexão ter unidades estáveis para mostrar que os morfismos de descida efectiva em Psp são os morfismos desta categoria que são morfismos de descida efectiva em $PPreord$.

Como qualquer espaço finito e discreto com qualquer ordem é um espaço de Priestley e os epimorfismos regulares em Psp são epimorfismos regulares em $PPreord$, (4.2.1) é verdadeira para Psp e podemos afirmar que

Proposição 4.3.1 *Um morfismo em Psp é morfismo de descida nessa categoria se e só se é morfismo de descida em $PPreord$.*

Teorema 4.3.2 *Um morfismo em Psp é morfismo de descida efectiva nessa categoria se e só se é morfismo de descida efectiva em $PPreord$.*

Demonstração: Seja $p : E \to B$ um morfismo em Psp de descida efectiva em $PPreord$.

Dado o produto fibrado

$$
\begin{tikzcd}
E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & A \arrow[d, "\alpha"] \\
E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}
\tag{4.3}
$$

em que $E, B, E \times_B A \in Psp$, vamos provar que A é um espaço de Priestley.

Sabemos que a reflexão

$$
\begin{tikzcd}
PPreord \arrow[r, shift left, "I_3"] & Psp \arrow[l, shift left, "H_3"]
\end{tikzcd}
$$

tem unidades estáveis, logo, como $B \in Psp$, I_3 preserva o produto fibrado (4.3). Portanto, como o rectângulo ① + ② e o quadrado ② são produtos fibrados,

$$
\begin{tikzcd}
E \times_B A \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\eta_{E\times_B A}"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & A \arrow[d, "\eta_A"] \\
I_3(E \times_B A) \arrow[r, "I_3(\pi_2)"'] \arrow[d, "I_3(\pi_1)"'] \arrow[dr, phantom, "②"] & I_3(A) \arrow[d, "\alpha' = I_3(\alpha)"] \\
E \arrow[r, "I_3(p) = p"'] & B
\end{tikzcd}
$$

concluímos que o quadrado ① é um produto fibrado, portanto $p^*(\eta_A) = \eta_{E\times_B A}$. Como $E \times_B A \in Psp$, a reflexão correspondente é um isomorfismo, isto é $p^*(\eta_A)$ é um isomorfismo. Como p é, em particular, um morfismo de descida efectiva em $PPreord$, então o functor p^* é monádico e, portanto, reflecte isomorfismos. Assim η_A é um isomorfismo, logo A é um espaço de Priestley.

Reciprocamente, se $p : E \to B$ em Psp é morfismo de descida efectiva em Psp vamos provar que é também morfismo de descida efectiva em $PPreord$.

Se p é morfismo de descida em Psp ele é também morfismo de descida em $PPreord$ (4.3.1).

Seja $(C, \gamma; \xi)$ uma $\mathbb{T}$-álgebra da mónada induzida em $PPreord/E$ pela adjunção $p! \dashv p^* : PPreord \downarrow B \to PPreord/E$ e $q =$co-igualizador(π_2, ξ). Temos de provar que, no diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \times_B C \arrow[r, shift left, "\pi_2"] \arrow[r, shift right, "\xi"'] & C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\gamma"'] & Q \arrow[d, "\delta"] \\
 & E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

q é morfismo de descida em $PPreord$.

Como a reflexão $I_3 : PPreord \to Psp$ tem unidades estáveis, portanto preserva produtos fibrados de morfismos com codomínio em Psp, temos que $(I_3(C), I_3(\gamma), I_3(\xi))$ é uma $\mathbb{T}$-álgebra para a mónada definida pela adjunção $p! \dashv p^* : Psp/B \to Psp/E$. Além disso, e atendendo a que a reflexão I_3 preserva colimites, $I_3(q) =$co-igualizador$(I_3(\pi_2), I_3(\xi))$ em Psp. Então, no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\eta_C"'] \arrow[dr, phantom, "①"] & Q \arrow[d, "\eta_Q"] \\
I_3(C) \arrow[r, "I_3(q)"'] \arrow[d, "I_3(\gamma)"'] \arrow[dr, phantom, "②"] & I_3(Q) \arrow[d, "I_3(\delta)"] \\
E \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

o quadrado ② é produto fibrado, isto é $I_3(q)$ é morfismo de descida, pois p é morfismo de descida efectiva em Psp.

Como p é morfismo de descida efectiva em $PPreord$ se e só se o rectângulo ① + ② é produto fibrado e o quadrado ② é produto fibrado, vamos provar que o quadrado ① é produto fibrado.

Seja $h : C \to I_3(C) \times_{I_3(Q)} Q$ definido por $h(c) = ([c], q(c))$ para todo o $c \in C$, vejamos que h é homeomorfismo e isomorfismo de ordem.

Considerando o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "h"] \arrow[drrr, "q"] \arrow[dddr, "\eta_C"'] & & & \\
& I_3(C) \times_{I_3(Q)} Q \arrow[rr, "\pi_2"'] \arrow[dd, "\pi_1"] \arrow[dr, "t"] & & Q \arrow[dd, "\eta_Q"] \\
& & E \times_B Q \arrow[ur] \arrow[ddl] & \\
& I_3(C) \arrow[rr, "I_3(q)"'] \arrow[d, "I_3(\gamma)"'] & & I_3(Q) \arrow[d, "I_3(\delta)"] \\
& E \arrow[rr, "p"'] & & B
\end{tikzcd}$$

temos que $E \times_B Q$ é isomorfo a $I_3(C) \times_{I_3(Q)} Q$, e h é, a menos de isomorfismo, $\alpha_{(C,\gamma,\xi)}$, pois $h = t^{-1} \circ \alpha_{(C,\gamma,\xi)}$.

Como o functor de esquecimento de $PPreord$ na categoria dos conjuntos preserva produtos fibrados e epimorfismos regulares, as componentes de α são bimorfismos portanto são homeomorfismos.

Além disso, dados $c, c' \in C$ tais que $h(c) \leq h(c')$, temos que $[c] \leq [c']$ em $I_3(C)$ e portanto $c \preceq c'$ em C, logo h é isomorfismo em $PPreord$. $\square$

5

Um sistema de factorização reflectivo

Neste capítulo vamos descrever o sistema de factorização induzido em $PPreord$ pela reflexão $PPreord \to Psp$.

5.1 Factorizações reflectivas

Dadas uma categoria $\mathcal{C}$ finitamente completa e $\mathcal{X}$ uma subcategoria reflectiva de $\mathcal{C}$, define-se em $\mathcal{C}$ um sistema de pré-factorização $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ tomando $\mathcal{E} = (H(mor\mathcal{X}))^{\uparrow}$, $\mathcal{M} = (H(mor\mathcal{X}))^{\uparrow\downarrow}$.

Proposição 5.1.1 *Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa e*

$$< I, H, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X}$$

uma reflexão da categoria $\mathcal{C}$ na subcategoria $\mathcal{X}$. Tem-se

(i) $f \in \mathcal{E}$ *se e só se* $I(f)$ *é um isomorfismo;*

(ii) *se* $e \in \mathcal{E}$ *e* $e \circ f \in \mathcal{E}$ *então* $f \in \mathcal{E}$*;*

(iii) $\eta_A : A \to HI(A)$ *está em* $\mathcal{E}$.

Se a categoria $\mathcal{C}$ é finitamente bem completa, isto é, além de admitir limites finitos admite intersecções arbitrárias de subojectos, este sistema de pré-factorização $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ é um sistema de factorização, como demonstrado em [CHK85] (3.5).

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria finitamente completa. Consideremos a adjunção

$$< I, H, \eta, \epsilon >: \mathcal{C} \rightharpoonup \mathcal{X} \tag{5.1}$$

Para cada objecto B em $\mathcal{C}$ esta adjunção induz a adjunção

$$< I^B, H^B, \eta^B, \epsilon^B >: \mathcal{C}/B \rightharpoonup \mathcal{X}/I(B), \tag{5.2}$$

da categoria dos objectos sobre B em $\mathcal{C}$ na categoria dos objectos sobre $I(B)$ em $\mathcal{X}$, tal que H^B a cada (X,φ) faz corresponder o produto fibrado de $(H(X), H(\varphi))$ ao longo do morfismo η_B, e I^B a cada (A,α) faz corresponder $(I(A), I(\alpha))$.

Proposição 5.1.2 *Se a adjunção (5.1) é admissível e a co-unidade $\epsilon : IH \to Id$ é um isomorfismo então o morfismo $f : A \to B$ pertence a $\mathcal{M}$ se e só se o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & IA \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle If} \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & IB \end{array}$$

é um produto fibrado. Por outras palavras, o morfismo f pertence a $\mathcal{M}$ se e só se o morfismo unidade $\eta^B_{(A,f)}$ da adjunção induzida (5.2) é um isomorfismo.

Proposição 5.1.3 *Se a adjunção (5.1) é admissível e a co-unidade $\epsilon : IH \to Id$ é um isomorfismo então $(\mathcal{E},\mathcal{M})$ é um sistema de factorização.*

5.2 Factorização reflectiva definida por $I \dashv H : Psp \to PPreord$

Como a reflexão $< I, H, \eta, \epsilon >: PPreord \rightharpoonup Psp$ tem unidades estáveis (3.4.7), ela é admissível. Portanto, por 5.1.3, $PPreord$ tem um sistema de factorização reflectivo $(\mathcal{E},\mathcal{M})$.

Adoptando a terminologia usada em [Xar03], damos descrições explicitas da classe $\mathcal{M}$ das coberturas triviais e da classe $\mathcal{E}$ dos morfismos verticais.

Proposição 5.2.1 *Um morfismo $f : A \to B$ em $PPreord$ é vertical se e só se verifica as duas condições seguintes:*

(i) para quaisquer dois objectos a e a' em A, se $f(a) \preceq f(a')$ em B então $a \preceq a'$ em A;

(ii) para qualquer objecto b em B, existe um objecto a em A tal que $b \preceq f(a)$ e $f(a) \preceq b$ em B.

Demonstração: Seja $f : A \to B$ um morfismo em $PPreord$ vertical, então $I(f)$ é um isomorfismo em Psp (5.1.1 (i)). Logo f verifica as condições (i) e (ii). De facto, sejam $a, a' \in A$ tais que $f(a) \preceq f(a')$ em B. Temos:

$$\begin{aligned} f(a) \preceq f(a') \ em \ B &\Rightarrow [f(a)] \leq [f(a')] \ em \ I(B) \\ &\Rightarrow I(f)([a]) \leq I(f)([a']) \\ &\Rightarrow [a] \leq [a'] \ em \ I(A) \\ &\Rightarrow a \preceq a' \ em \ A. \end{aligned}$$

Seja $b \in B$, então $[b] \in I(B)$. Logo existe $[a] \in I(A)$ tal que $I(f)([a]) = [b]$, isto é, existe $a \in A$ tal que $b \preceq f(a)$ e $f(a) \preceq b$.

Reciprocamente, seja $f : A \to B$ um morfismo em $PPreord$ satisfazendo as condições (i) e (ii). O morfismo $I(f)$ é contínuo.

Vejamos que é sobrejectivo. Seja $[b] \in I(B)$, então $b \in B$, logo pela condição (ii) existe $a \in A$ tal que $b \preceq f(a)$ e $f(a) \preceq b$. Assim, existe $[a] \in I(A)$ tal que $I(f)([a]) = [f(a)] = [b]$.

Sejam $[a], [a'] \in I(A)$ tais que $I(f)([a]) = I(f)([a'])$. Temos,

$$\begin{aligned} I(f)([a]) = I(f)([a']) &\Rightarrow [f(a)] = [f(a')] \\ &\Rightarrow f(a) \sim f(a') \\ &\Rightarrow f(a) \preceq f(a') \ e \ f(a') \preceq f(a) \\ &\Rightarrow (por\ (i)) a \preceq a' \ e \ a' \preceq a \\ &\Rightarrow [a] = [a']. \end{aligned}$$

Logo $I(f)$ é injectiva.

Assim $I(f)$ é um isomorfismo de ordem, pois I é um functor e f verifica a condição (i), portanto $I(f)$ é um isomorfismo em Psp, ou seja f pertence à classe $\mathcal{E}$. $\square$

Proposição 5.2.2 *Um morfismo $f : A \to B$ em $PPreord$ pertence a $\mathcal{M}$ se e só se as aplicações $[a] \to [f(a)]$, induzidas por f para qualquer objecto $a \in A$, são bijecções.*

Demonstração: Seja $f : A \to B$ um morfismo em $PPreord$ tal que as aplicações $[a] \to [f(a)]$, induzidas por f para qualquer objecto $a \in A$, são bijecções.

Seja $< I^B, H^B, \eta^B, \epsilon^B >: PPreord \downarrow B \rightharpoonup Psp \downarrow I(B)$ a adjunção induzida pela adjunção $< I, H, \eta, \epsilon >: PPreord \rightharpoonup Psp$.

Consideremos o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "\eta^B_{(A,f)}"] \arrow[drr, bend left, "\eta_A"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& P \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & I(A) \arrow[d, "I(f)"] \\
& B \arrow[r, "\eta_B"'] & I(B)
\end{tikzcd}$$

Mostremos que $\eta^B_{(A,f)}$ é um isomorfismo.

Os objectos de P são todos os pares $(b, [a]) \in B \times I(A)$ tais que $[b] = [f(a)]$. Seja $(b, [a]) \in P$. Como $[b] = [f(a)]$, $b \in [f(a)]$, então, pela hipótese, existe $a' \in [a]$ tal que $f(a') = b$. Logo existe $a' \in A$ tal que $\eta^B_{(A,f)}(a') = (b, [a])$, ou seja $\eta^B_{(A,f)}$ é sobrejectiva.

Sejam $a, a' \in A$ tais que $\eta^B_{(A,f)}(a) = \eta^B_{(A,f)}(a')$. Temos,

$$\begin{aligned}
\eta^B_{(A,f)}(a) = \eta^B_{(A,f)}(a') &\Rightarrow (f(a), [a]) = (f(a'), [a']) \\
&\Rightarrow f(a) = f(a') \; e \; [a] = [a'] \\
&\Rightarrow a, a' \in [a] \; e \; f(a) = f(a') \\
&\Rightarrow (por hipótese) \; a = a'.
\end{aligned}$$

Como $\eta^B_{(A,f)}(a) \preceq \eta^B_{(A,f)}(a') \Leftrightarrow a \preceq a'$, quaisquer que sejam $a, a' \in A$, $\eta^B_{(A,f)}$ é um isomorfismo.

Reciprocamente, seja $f : A \to B$ um morfismo em $PPreord$ tal que $\eta^B_{(A,f)}$ é um isomorfismo. Seja $a \in A$. Mostremos que a aplicação $[a] \to [f(a)]$ induzida por f é uma bijecção.

Seja $b \in [f(a)]$. Como $[b] = [f(a)]$, $(b, [a]) \in P$, então, como $\eta^B_{(A,f)}$ é um isomorfismo, existe $a' \in A$ tal que $\eta^B_{(A,f)}(a') = (b, [a])$, isto é existe $a' \in [a]$ tal que $f(a') = b$.

Sejam $a_1, a_2 \in [a]$ tais que $f(a_1) = f(a_2)$. Logo $(f(a_1), [a_1]) = (f(a_2), [a_2])$, ou seja $\eta^B_{(A,f)}(a_1) = \eta^B_{(A,f)}(a_2)$ o que implica $a_1 = a_2$, pois $\eta^B_{(A,f)}$ é injectiva. $\square$

6

Uma terceira forma de obter espaços de Priestley

A categoria dos espaços de Priestley surge na equivalência induzida por uma adjunção dual entre $TopOrd$ e $Ret_{0,1}$ (2.2.10), tal como $Stone$ aparece na equivalência induzida pela adjunção análoga para as ordens triviais (3.1.4). Ela é também uma subcategoria de $TopPreord$ cujos objectos são limite de determinados espaços pré-ordenados, finitos e discretos (1.8.8). Neste capítulo vamos provar que Psp substitui mais uma vez $Stone$ na versão ordenada de um certo tipo de compactificação.

6.1 Compactificações de espaços topológicos

Uma compactificação do espaço topológico E é um espaço compacto E_1 e uma imersão $i : E \to E_1$ tal que $i(E)$ é denso em E_1, isto é, $\overline{i(E)} = E_1$. Se todo o morfismo f de E num espaço compacto E_2 se factoriza através de i,

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & E_1 \arrow[d, "\overline{f}"] \\ & E_2 \end{tikzcd}$$

daí resulta, em vários casos, a universabilidade de i relativamente a um functor inclusão e a definição da reflexão correspondente.

Dado um espaço topológico E, usamos a notação $\prod_S E$ para o produto de S cópias de E. Chamaremos a esse tipo de espaços *espaços potência de* E.

Um espaço topológico X diz-se *completamente regular* se para todo o subconjunto fechado A de X e $x \notin A$, existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ e $f(A) = 1$.

Um espaço *Tychonoff* é um espaço Hausdorff completamente regular.

Todo o espaço topológico X em que cada um dos seus pontos tem uma base de vizinhanças constituída por abertos-fechados diz-se *zero-dimensional*.

Seja E um espaço topológico Hausdorff. Consideremos a subcategoria plena de Top dos subespaços de espaços potência de E, denotada por *E-completamente regular*, e a subcategoria plena de *E-completamente regular* dos subespaços fechados de espaços potência de E, denotada por *E-compacto*.

Sejam E um espaço topológico Hausdorff e X um espaço *E-completamente regular*, ou seja, X é subespaço de um espaço potência de E, isto é, existe uma imersão $X \hookrightarrow \prod_S E$ para algum S. Suponhamos, sem perda de generalidade, que S é o conjunto das aplicações contínuas de X em E, $S = Top(X, E)$. Temos,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "s"'] & \prod_S E \arrow[d, "p_s"] \\ & E \end{tikzcd}$$

sendo s uma aplicação contínua, p_s a projecção e $\varphi = av_{X,s}$ a aplicação avaliação, isto é $\varphi(x) = (s(x))_{s\in S}$.

Assim o espaço X é, por hipótese, isomorfo ao subespaço de $\prod_S E$ definido por $\varphi(X) = \{(s(x))_{s\in S} | x \in X\}$.

Define-se $R(X)$ como o fecho de $\varphi(X)$ em $\prod_S E$, $\overline{\varphi(X)}$ (portanto $R(X) \in E$-compacto) e $\eta_X = i \circ \varphi$ sendo i a imersão de $\varphi(X)$ em $\overline{\varphi(X)}$.

Proposição 6.1.1 *Dado X um subespaço de um espaço potência de um espaço Hausdorff E, então $\eta_X : X \to R(X)$ é a unidade da reflexão*

$$R : \textbf{\textit{E-completamente regular}} \to \textbf{\textit{E-compacto}}.$$

Demonstração: Sejam Y um subespaço fechado do espaço potência de E e $f : X \to Y$ um morfismo em ***E-completamente regular***.

Para o espaço Y temos o seguinte diagrama,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "\eta_Y"] \arrow[drr, "q"] & R(Y) \arrow[r, hook] & \prod_{S'} E \arrow[d, "p_q"] \\ & & & E \end{tikzcd}$$

sendo $S' = Top(Y, E)$. Como $q \in S'$ então $q \circ f \in S$, logo pela definição de produto existe um único morfismo $h : \prod_S E \to \prod_{S'} E$ tal que $p_q \circ h = p_{q \circ f}$,

$$\begin{tikzcd} \prod_S E \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "p_{q\circ f}"] & \\ \prod_{S'} E \arrow[r, "p_q"] & E \end{tikzcd}$$

O morfismo h é definido por $h((e_s)_{s \in S}) = (\hat{e}_{s'})_{s' \in S'}$, onde $\hat{e}_{s'} = e_{s' \circ f}$. Portanto, $h(\varphi(X)) \subseteq \varphi(Y)$, porque $h((s(x))_{s \in S}) = (s'(f(x)))_{s' \in S'}$, e $h(\overline{\varphi(X)}) \subseteq \overline{h(\varphi(X))} \subseteq \overline{\varphi(Y)}$, isto é $h(R(X)) \subseteq R(Y)$, portanto a restrição h' de h a $R(X)$ é uma função contínua de $R(X)$ em $R(Y)$ tal que $h' \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend left, "\eta_X"] \arrow[d, "f"] & \varphi(X) \arrow[r, hook] & R(X) \arrow[r, hook] \arrow[d, "h'"] & \prod_S E \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "\cong"] \arrow[rr, bend left, "\eta_Y"] & \varphi(Y) \arrow[r, hook] & R(Y) \arrow[r, hook] & \prod_{S'} E \end{tikzcd}$$

mas, Y é subespaço fechado de $\prod_{S'} E$, portanto $Y \cong \varphi(Y) \cong \overline{\varphi(Y)} = R(Y)$ e η_Y é um isomorfismo. Fazendo $\overline{f} = \eta_Y^{-1} \circ h'$ tem-se $\overline{f} : R(X) \to Y$ com $\overline{f} \circ \eta_X = f$.

O morfismo $\overline{f}$ é o único morfismo de *E-compacto* tal que $\overline{f} \circ \eta_X = f$, porque, em $Haus$, η_X é um epimorfismo pois é uma aplicação contínua com imagem densa. Logo η_X é a unidade da reflexão. □

Se E é espaço de Hausdorff, os espaços *E-completamente regulares* são exactamente aqueles que podem ser imersos de forma universal na sua "compactificação do tipo E".

Vejamos alguns exemplos,

Exemplo 6.1.2 Tomando $E = I = [0, 1]$,

I-completamente regular= Tych,

a categoria dos espaços de Tychonoff, e

I-compacto= $CHaus$

□

Exemplo 6.1.3 Tomando $E = 2 = \{0, 1\}$

2-completamente regular= *zero-dimensional* $+T_2$,

a categoria dos espaços Hausdorff e zero-dimensional, e

2-compacto=Stone

como demonstrado por Banaschewski em [Ban55], que denota por ζ a reflexão

$$\text{\textit{2-completamente regular}} \xrightarrow{\quad \zeta \quad} \text{\textit{2-compacto}}$$

Supondo X um espaço discreto então X é Hausdorff e zero-dimensional, portanto pertence à categoria *I-completamente regular* e à categoria *2-completamente regular*.

Considerando a compactificação de Stone-Čech de X, $\beta(X)$, e a reflexão de $\beta(X)$ em $Stone$, bem como a reflexão de X, $\zeta(X)$, em $Stone$, existe um único morfismo $h : \beta(X) \to \zeta(X)$ tal que $h \circ \eta_X = \sigma_X$, porque $\zeta(X)$ é um espaço compacto Hausdorff e existe um único morfismo $h' : \beta(X)/\sim\to \zeta(X)$ tal que $h' \circ r_{\beta(X)} = h$, porque $\zeta(X)$ é espaço de Stone,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "\sigma_X"'] & \beta(X) \arrow[r, "r_{\beta(X)}"] \arrow[d, "h"] & \beta(X)/\sim \arrow[dl, "h'"] \\
& \zeta(X) &
\end{tikzcd}$$

com $x \sim y$ se e só se $\Gamma_x = \Gamma_y$. Como $r_{\beta(X)} \circ \eta_X$ e σ_X são reflexões de X em $Stone$, então h' é um isomorfismo. Assim $\beta(X) \cong \zeta(X)$ se e só se as componentes conexas de $\beta(X)$ são conjuntos singulares, são os chamados espaços fortemente zero-dimensionais.

Como X é um espaço topológico discreto, as componentes conexas de $\beta(X)$ são os pontos e temos $\beta(X) \cong (\beta(X)/\sim) \cong \zeta(X)$, subespaço fechado de uma potência de 2, logo $\beta(X)$ é um espaço de Stone. □

6.2 Compactificação de espaços topológicos ordenados

Dado um espaço topológico Hausdorff ordenado E, consideremos as subcategorias plenas de $TopOrd$ dos subespaços de espaços potência de E com a ordem induzida, denotada por *E-completamente regular ordenado* e a categoria *E-compacto ordenado* dos subespaços fechados de espaços potência de E. Temos a versão ordenada de 6.1.1 e dois exemplos importantes.

Tomando $E = I = [0, 1]$ com a topologia e a ordem de subespaço de $\mathbb{R}$ (com a topologia e ordem usuais) a categoria *I-completamente regular ordenado* é a categoria dos espaços completamente regulares ordenados, *I-compacto ordenado* a categoria dos espaços compactos ordenados e a reflexão

$$\textit{I-completamente regular ordenado} \xrightarrow{\beta} \textit{I-compacto ordenado}$$

é a compactificação de Nachbin-Stone Čech, ([Nac65], página 104).

Consideremos o espaço discreto ordenado $2 = \{0 < 1\}$ e as categorias *2-completamente regular ordenado* e *2-compacto ordenado*. Existe uma reflexão

$$\textit{2-completamente regular ordenado} \xrightarrow{\zeta} \textit{2-compacto ordenado}$$

que nos dá uma nova forma de obter espaços de Priestley:

tal como *2-compacto=Stone* temos que *2-compacto ordenado=Psp*.

Teorema 6.2.1 *A categoria 2-compacto ordenado é a categoria dos espaços de Priestley.*

Demonstração: Toda a potência de 2 é um espaço de Priestley, porque, para qualquer conjunto S, $\prod_S 2$ é compacto e totalmente desconexo em relação à ordem (1.8.4). Como todo o subespaço fechado de um espaço de Priestley é um espaço de Priestley, por 1.8.3 e atendendo a que todo o subconjunto fechado de um compacto é compacto, então todo o subespaço fechado de uma potência de 2 é um espaço de Priestley.

Reciprocamente, vejamos que se X é um espaço de Priestley então é um subespaço fechado de alguma potência de 2.

Seja X um espaço de Priestley e $S = TopOrd(X, 2)$ o conjunto dos morfismos de X para 2 em $TopOrd$. Consideremos a aplicação avaliação $\varphi : X \to \prod_S 2$, isto é $\varphi(x) = (s(x))_{s \in S}$, e temos

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "s"'] & \prod_S 2 \arrow[d, "p_s"] \\ & 2 \end{tikzcd}$$

O morfismo $X \to \varphi(X)$ é sobrejectivo e contínuo. Vejamos que ele é injectivo.

Sejam $x, x' \in X$ tais que $x \neq x'$, então $x \not\leq x'$ ou $x' \not\leq x$. Suponhamos que $x \not\leq x'$. Então, como X é totalmente desconexo em relação à ordem, existe um subconjunto aberto-fechado decrescente U de X tal que $x' \in U$ e $x \notin U$. Assim

$x' \in U$, com U aberto-fechado decrescente, e $x \in (X - U)$, com $(X - U)$ aberto-fechado crescente, logo existe um morfismo $s_0 : X \to 2$ em S tal que $s_0(U) = 0$ e $s_0(X - U) = 1$. Portanto, $\varphi(x) = (s(x))_{s \in S} \neq \varphi(x') = (s(x'))_{s \in S}$, logo $X \to \varphi(X)$ é uma bijecção contínua e consequentemente é homeomorfismo.

Mas $X \to \varphi(X)$ é também isomorfismo de ordem, pois, como provámos, se $x \not\leq x'$ então $\varphi(x) \not\leq \varphi(x')$.

Assim o espaço de Priestley X é isomorfo ao espaço $\varphi(X)$ que é um subespaço fechado de um espaço de potências de 2, por ser subespaço compacto de um espaço de Hausdorff. $\square$

Considerações finais

O estudo da reflexão da categoria dos espaços compactos Hausdorff ordenados na categoria dos espaços de Priestley levou-nos a uma generalização, crucial para o desenvolvimento dos nossos trabalhos, que consistiu na substituição de ordem por pré-ordem. As novas categorias, a categoria dos espaços compactos Hausdorff pré-ordenados $CHausPreord$ e a categoria dos espaços de Stone pré-ordenados totalmente desconexos em relação à pré-ordem $PPreord$, permitiram-nos analisar semelhanças e diferenças entre esta reflexão e a reflexão correspondente para o caso das ordens triviais, $CHaus \to Stone$. Também provámos que um morfismo na categoria dos espaços de Priestley é morfismo de descida efectiva nessa categoria se e só se é morfismo de descida efectiva em $PPreord$.

A adjunção entre a categoria Top dos espaços topológicos e a categoria dual da dos reticulados limitados $Ret_{0,1}$ e a equivalência por ela induzida determinam a reflexão da categoria $CHaus$ dos espaços compactos Hausdorff na categoria $Stone$ dos espaços de Stone. Pelo mesmo processo obtém-se a reflexão de $CHausOrd$ na categoria Psp dos espaços de Priestley. Tal como $Stone$ é a subcategoria plena de Top dos espaços limite de espaços finitos e discretos, $PPreord$ é a subcategoria de $TopPreord$ dos espaços limite de espaços finitos discretos e pré-ordenados, sendo os objectos de Psp limite de determinados espaços desse tipo.

Se E é espaço de Hausdorff os espaços E-completamente regulares são exactamente aqueles que podem ser imersos de forma universal na sua "compactificação do tipo E". Da mesma forma que, tomando $E = 2 = \{0, 1\}$, a "compactificação do tipo E" é a categoria dos espaços de Stone, a "compactificação do tipo E" quando consideramos o caso ordenado e $E = 2 = \{0 < 1\}$ é a categoria dos espaços de Priestley. Assim, uma vez mais, os espaços de Priestley substituem os espaços de Stone quando é considerado o caso ordenado. Temos então três formas diferentes de se obter espaços de Priestley.

Bibliografia

[Ban55] B. Banaschewski. Über nulldimensionale Räume. *Math. Nachr.*, (13):129–140, 1955.

[BJ01] F. Borceux e G. Janelidze. *Galois theories*. Cambridge University Press, 2001.

[Bor94a] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 1*. Cambridge University Press, 1994.

[Bor94b] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2*. Cambridge University Press, 1994.

[Bou66] N. Bourbaki. *General Topology*. Hermann, Paris, 1966.

[BR70] J. Bénabou e J. Roubaud. Monades et descente. *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, (270 A):96–98, 1970.

[CD98] David M. Clark e Brian A. Davey. *Natural Dualities for the Working Algebraist*. Cambridge University Press, 1998.

[CHK85] C. Cassidy, M. Hérbert e G. M. Kelly. Reflective subcategories, localizations and factorization systems. *J. of Australian Mathematical Society*, (38 A):287–329, 1985.

[CJKP97] A. Carboni, G. Janelidze, G. M. Kelly e R. Paré. On localization and stabilization for factorization systems. *Appl. Categorical Stuctures*, (5):1–58, 1997.

[DP90] B. A. Davey e H. A. Priestley. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge Mathematical Textbooks, 1990.

[DS] M. Dias e M. Sobral. Priestley spaces: the threefold way. *(em preparação)*.

[DS05] M. Dias e M. Sobral. Descent for Priestley spaces. *Pré-publicação do Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra*, (05-04), 2005.

[EM58] R. Engelking e S. Mrówka. On E-compact spaces. *Bull Sér, Sci. Math. Astronom. Phys.*, (6):429–436, 1958.

[Hof02] Dirk Hofmann. On a generalization of the Stone-Weierstrass theorem. *Appl. Categ. Struct. 10*, páginas 569–592, 2002.

[Jan90] George Janelidze. Pure Galois theory in categories. *J. of Algebra*, (132):270–286, 1990.

[JK94] G. Janelidze e G.M. Kelly. Galois theory and a general notion of central extensions. *J. Pure Appl. Algebra*, (97):135–161, 1994.

[Jon92] P. Jonhstone. *Stone Spaces*. Cambridge University Press, 1992.

[JS02] G. Janelidze e M. Sobral. Finite preorders and topological descent I. *J. Pure Appl. Algebra*, (175):187–205, 2002.

[Mac97] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1997.

[Nac65] Leopoldo Nachbin. *Topology and Order*. Van Nostrand, Princeton, Toronto, New York, London, 1965.

[ST92] M. Sobral e W. Tholen. Effective descent morphisms and effective equivalence relations. *Conference Proceedings of the Canadian Mathematical Society*, (13):421–433, 1992.

[Wal74] Russel C. Walter. *The Stone-Čech Compactification*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1974.

[Wil70] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1970.

[Xar03] João Xarez. *The monotone-ligth factorization for categories via preordered and ordered sets*. Tese de Doutoramento, Universidade de Aveiro, 2003.

Índice de categorias