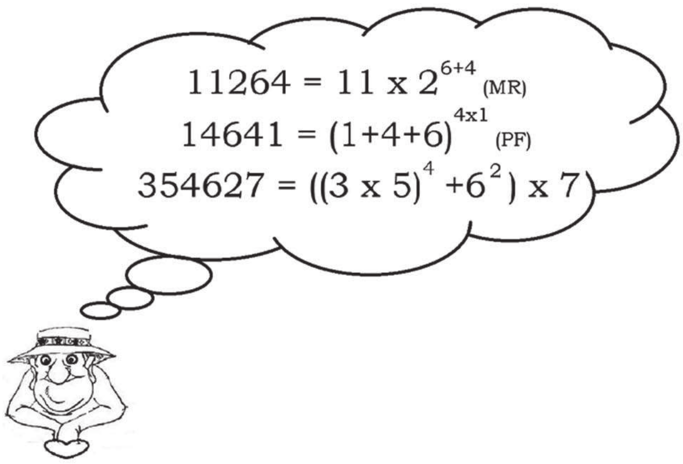
Era uma vez… uns números

Por: Helena Sousa Melo
hmelo@uac.pt
Professora Auxiliar
CMATI / Departamento de Matemática
Universidade dos Açores



Estamos em meados do mês de agosto e para alguns é tempo de férias, para outros, ainda há trabalho a concluir. Em qualquer uma dessas situações, podemos encontrar um espaço para um passatempo, para contar história, ir ao cinema, usufruindo de momentos agradáveis, quer em família, quer entre amigos.

Há pelo menos duas áreas da matemática, na minha opinião, que conseguem nos proporcionar, de imediato, momentos interessantes e agradáveis: a história da matemática e a matemática recreativa. Quem não gosta de ouvir uma boa história? Quem não gosta de passar o tempo a se divertir?

A história da matemática, bem como a matemática recreativa, é uma mais-valia no ensino-aprendizagem da matemática pois, auxiliam na construção do conhecimento, na evolução de conceitos, na sua aplicação, uma vez que para contar uma boa história, ou criar um *puzzle* eficaz, temos que ter um bom domínio dos conceitos a serem utilizados.

Há vários encontros, *workshops*, congressos sobre estas temáticas. Nesses encontros podemos constatar a multiplicidade de temas que cada uma abrange e as suas interligações. No ano passado, em abril, realizou-se na Universidade dos Açores o 3.º Colóquio de Matemática Recreativa. Esse colóquio internacional, que ocorre a cada dois anos, contou com a presença de diversos matemáticos de vários países que desenvolvem trabalhos nessa área. Esse ano, também na Universidade dos Açores, nos dias 21 e 22 de outubro, irá realizar-se o 3.º Encontro de História da Matemática e das Ciências, com várias personalidades, interligando as áreas de História, Matemática e de outras Ciências, entre elas a Biologia.

Para dar um pequeno gozo sobre essas temáticas, vamos iniciar nossa digressão pela matemática recreativa, que, de entre outras áreas da matemática, tem conexões com a teoria dos números. A teoria dos números é um dos ramos da considerada matemática pura e que estuda as propriedades dos números em geral, mas, em particular as dos números inteiros. Nesse seguimento, trataremos dos números de Friedman. Assim, era uma vez uns números cativantes e curiosos que, decerto, despertarão o calculista adormecido que há em nós e fará com que passemos o tempo sem nos aperceber.

Mas o que é um número de Friedman?

Os números de Fiedman têm essa denominação em homenagem ao matemático americano que os estudou Erich Friedman (1965 -). Erich Friedman, professor associado de Matemática na Universidade de Stetson, Florida, é considerado um especialista em puzzles matemáticos. As suas áreas de interesse são a Geometria, a Teoria dos Grafos, a Teoria dos Jogos e a Computação. Os números de Friedman são números inteiros positivos que podem ser expressos, numa determinada base de um sistema de numeração, como uma combinação dos seus algarismos e dos símbolos das quatro operações aritméticas básicas de adição (+), subtração (-), divisão (/), multiplicação (x), bem como da operação de potenciação (^), para além do uso de parêntesis. Por exemplo, 126 é um número de Friedman na base 10 (nossa base), pois, 126 = 21x6. Outro número de Friedman na nossa base é 81648 = (8x8–1)x6^4, ou seja, o resultado de 63x6x6x6x6. O primeiro número de Friedaman e o único que possui apenas dois algarismos é o número 25 = 5^2. Um exemplo de um número de Friedman não na base 10, é 24132 = 31x422 expressos na base 5.

Lembramos que a operação de potenciação deve ser efetuada antes das operações de multiplicação e divisão, e essas, por sua vez, devem ser efetuadas antes das operações de adição e subtração, essa ordem de execução das operações pode ser alterada através da utilização de parêntesis, que devem ser resolvidos, em primeiro lugar, de dentro para fora. Assim, se tivermos 2+4^3x5-6, devemos fazer inicialmente 4 elevado a 3, 64, multiplicar o resultado dessa operação por 5, 320, e ao produto obtido, adicionar 2 e subtrair 6, ou seja, 316. Mas, se tivermos ((2+4)^(3x1)-6)x4, devemos obter primeiramente a soma de 2 e 4, depois o produto de 3 por 1, e só depois fazer a potência de base 6 e expoente 3, ou seja, 216, obtendo de seguida a diferença entre a potência encontrada e 6, e só então multiplicar por 4, encontrando assim 840. Se resolvermos essa última expressão sem os parêntesis, obtemos 42. Quando não há indicação de prioridade entre as operações, ou estas possuem a mesma preferência, devemos resolvê-las da esquerda para a direita. Por exemplo, 2+3–4+7–6 = 2.

Quando os algarismos utilizados para expressar os números de Friedman seguem a mesma disposição que a do número original, os números de Friedman recebem o nome de *números de Friedman agradáveis,* ou *números de Friedman ordenados*, ou *números de Friedman fortes*. O número 127 que pode ser expresso como -1+2^7 é o primeiro com essa propriedade. Um outro exemplo é o número 32785 = 3+2x7+8^5, no qual verificamos a mesma ordenação.

Há muitos números de Friedman e em várias bases. Como passatempo proporcionamos os números de Friedman, na base 10, com três algarismos: 121, 125, 126, 127, 128, 153, 216, 289, 343, 347, 625, 688, 736. Seria capaz de expressá-los de acordo com o conceito apresentado? Quais desses números são números de Friedman ordenados? Experimente! (Resposta mais adiante.)

Também podemos nos divertir comprovando que 123456789 e 987654321 são ambos número de Friedman. Apresentamos a solução descoberta por Michael Reid (MR) e Philippe Fondanaiche (PF), colegas de Erich Friedman, 123456789 = ((86+2x7)^5-91)/3^4 e 987654321 = (8x(97+6/2)^5+1)/3^4.

Números com o mesmo algarismo também podem ser números de Friedman. O menor deles é 99999999 = (9+9/9)^(9-9/9)–9/9 e o maior encontrado até ao momento é 6666666666666666 = (6(((66-6)/6)^(6+(66-6)/6))-6)/(6+(6+6+6)/6).

Quando os números de Friedman possuem um número par de algarismos e são expressos pela multiplicação de dois números cuja quantidade de algarismos é igual à metade do número inicial, então esse são denominados números vampiros e cada um dos fatores é designado de “presas”. Os fatores são formados a partir do número original em qualquer ordem, não sendo permitidos zeros no início do número. Por exemplo, 1260, 1395, 125460 são todos números vampiros. E como 1260 = 21x60, 21 e 60 são as presas. O número 125460 admite dois pares de presas pois, 125460 = 204x615 = 246x510. Há outros números com essa condição e com muitos mais presas, como o caso de 24959017348650 que admite cinco pares de presas, ou seja, 24959017348650 = 2947050x8469153 = 2949705x8461530 = 4125870x6049395 = 4129587x6043950 = 4230765x5899410. (Resp.: 11^2, 5^(1+2), 6x21, 1+2^7, 2^(8-1), 3x51, 6^(2+1), (8+9)^2, (3+4)^3, 7^3+4, 5^(6-2), 8x86, 7+3^6)

Com tantas contas, vamos contar mais. Mas, agora, vamos contar uma história. Os personagens principais são os números inteiros. Com a necessidade de contar e relacionar quantidades, o homem desenvolveu símbolos no intuito de expressar tais situações. Desde os temos mais primitivos, por várias civilizações, o homem busca algo mais concreto, que interpretasse de uma forma mais simples essas situações. Com o aparecimento dos números naturais, temos um modo de contar que relaciona símbolos (algarismos) a determinadas quantidades (números). Assim, era uma vez… os números.

Com o Renascimento apareceu a expansão comercial que obrigou os comerciantes a indicarem casos de lucro e prejuízo. E para resolverem esse problema usaram os símbolos + e –. Assim, com o uso dessa nova simbologia, os matemáticos da altura puderam desenvolver técnicas de operação adequadas a expressar qualquer condição compreendendo números positivos e negativos. Aparece um novo conjunto numérico representado pela letra Z (abreviatura de Zahlen que significa “número” na língua alemã), constituído pelos números positivos (conjunto do números naturais) e seus respetivos opostos, podendo ser escrito na forma: Z = {...,–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3,...}. Os gregos eram grandes apreciadores dos números naturais e como tal atribuíam-lhes características humanas, tornando-os fascinantes e misteriosos. Hoje tratamos dos números de Friedman e dos números vampiros e, demos um cheirinho da história dos números em geral, mas, há muito mais para contar…