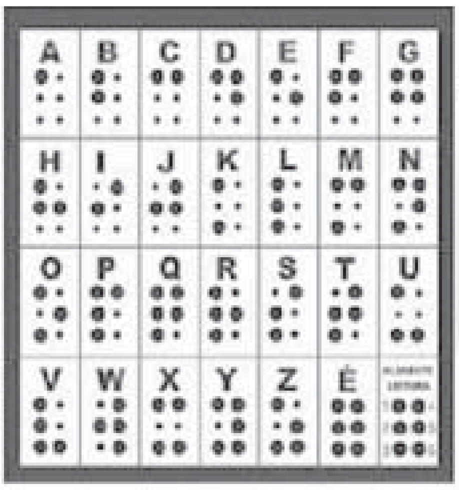
O princípio da multiplicação (das férias!)

Por: Maria do Carmo Martins
mika@uac.pt
Professora do Departamento de Matemática
da Universidade dos Açores



Agora que a maioria de nós está de férias, haja sol, praia, passeios e muita animação. É altura para os mais indisciplinados (à mesa ou em qualquer outra perdição; sim, porque todos temos uma!) multiplicarem os exageros. Assim, por exemplo, em vez de se degustar um gelado que sejam dois, pelo que numa semana podem marchar sete ou catorze! O lema, nesse tempo de lazer, é que os bons momentos sejam multiplicados, pelo que hoje falarei do *princípio da multiplicação.*

Mother Goose (narradora imaginária dos contos de Charles Perrault) coloca um problema nos versos sobre St. Ives: "quando ia para St. Ives, cruzei-me com um homem acompanhado por sete mulheres. Cada mulher tinha sete sacos e cada saco tinha sete gatas. Cada gata tinha sete gatinhos. Gatinhos, gatas, sacos e mulheres, quantos iam para St. Ives?". Este problema aparece de forma quase idêntica no antigo papiro egípcio Rhind, datado de 1650 a.C. A resposta é um, dado que todos os outros estavam a afastar-se de St. Ives! Contudo, determinar o tamanho deste grupo passa pela compreensão do princípio da multiplicação, o qual é um princípio básico de contagem e faz parte de um ramo da matemática designado por Análise Combinatória.

Apesar deste princípio ser muito simples na sua essência é, todavia, abrangente: se conseguimos realizar alguma ação (ou fazer alguma escolha) de M possíveis e se depois, de forma independente, conseguimos realizar outra (ou fazer outra escolha) de N ações possíveis, então temos M x N maneiras de realizar estas ações (ou fazer escolhas) sequencialmente. De modo mais rigoroso, suponhamos que um procedimento é executado em k fases, independentes entre si. A fase 1 tem n_1 maneiras de ser executada; a fase 2 possui n_2 maneiras de ser executada; e assim sucessivamente até à fase k que tem n_k modos de ser executada. Então existem n_1 x n_2 x ... x n_k maneiras de executar o procedimento. O leitor deve estar certamente a pensar: Complicado!? Não... é só a aparência. Intuitivamente, quer gostemos ou não de matemática, aplicamos esse princípio nas nossas decisões do quotidiano. Vejamos alguns exemplos.

Em férias, apetece-nos viajar, certo? Suponhamos que estamos em S. Miguel e que precisamos desesperadamente de chegar ao Sul de Espanha, para iniciar uma idílica aventura de cruzeiro. Hipoteticamente, ao consultar a informação das linhas aéreas, descobrimos que não há voos diretos, mas existem voos por Lisboa e pelo Porto, de onde saem diretos voos para Barcelona e Madrid. Deste modo temos 2 x 2 = 4 maneiras de chegar à soalheira, quente e sedutora Espanha e depois, possivelmente, apanhar o comboio para o sul: ou vamos por Lisboa-Barcelona; Lisboa-Madrid; Porto-Barcelona ou Porto-Madrid. Neste caso, aplicamos empiricamente o princípio da multiplicação para decidirmos a nossa vida!

Vejamos outro exemplo. Quantos números naturais pares de dois algarismos distintos podemos formar? Começamos por observar que não podemos colocar o zero como primeiro algarismo do número, pelo que teremos 9 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9) para o primeiro dígito. Como os números devem ser pares, existem apenas 5 possibilidades de escrever o segundo e último dígito (0, 2, 4, 6 e 8). Assim, no total há 9 x 5 = 45 números nas condições exigidas.

Tomemos outro exemplo: os símbolos Braille. Reza a história que Louis Braille perdeu a visão aos 3 anos de idade e aos 7 anos ingressou no Instituto de Cegos de Paris. Com 18 anos tornou-se professor desse Instituto. Ao ter conhecimento de um sistema de pontos em relevo inventado por Charles Barbier, um oficial da forças armadas francesas, com o intuito de permitir a leitura táctil de mensagens durante a noite em lugares onde seria perigoso acender uma luz, Braille procedeu a algumas adaptações ao sistema e apresentou o seu método em 1819, tinha ele 20 anos. Estes símbolos de Braille consistem em duas colunas verticais de três pontos em cada coluna (ver figura). As diferentes letras e símbolos são representados neste sistema através de diferentes conjugações dos seis pontos em relevo. Por exemplo, a letra "a" é indicada apenas pelo ponto superior esquerdo em relevo, enquanto a letra "r" é representada pelos três pontos na coluna da esquerda e pelo ponto do meio na coluna da direita, todos em relevo (ver figura). Quantos símbolos se poderão formar ao todo com este sistema? Ora, para cada ponto temos duas possibilidades: em relevo ou não. Dado que existem seis pontos (três em cada coluna), então existem (2 x 2 x 2) x (2 x 2 x 2), ou seja, 64 possibilidades diferentes. No entanto, uma destas hipóteses é impercetível por não ter pontos elevados, pelo que no total o sistema Braille permite representar 63 símbolos distintos (letras, números, combinações de letras, palavras comuns e símbolos de pontuação).

No mundo da espionagem, do romance (clandestino ou sério), dos negócios e não só, há certamente medidas de segurança a tomar relativamente à troca de informação. Não sendo especialista na matéria, posso adiantar que uma maneira eficaz de trocar informação é usar mensagens codificadas. Existem muitas formas de o fazer, mas vamos optar por uma sistema simples em que duas partes acordam previamente mensagens com conteúdo fixo; por exemplo, "o inimigo está a movimentar-se para oeste", "encontramo-nos logo à noite no nosso restaurante preferido" ou "transfira-se o saldo da conta 1234 para a Suíça". O sistema consiste em atribuir um código a cada mensagem e comunicar o código em vez da mensagem em si. As regras para a formação do código são as seguintes: os dois primeiros símbolos são consoantes, os dois seguintes vogais, o quinto uma letra qualquer e o último um número entre 1 e 9. Um exemplo de um código nas condições exigidas é: RQAAT8. Quantos códigos possíveis podemos ter? Bem, tendo em conta que o nosso alfabeto tem 21 vogais e 5 consoantes, podemos ter: 21 x 21 x 5 x 5 x 26 x 9, o que perfaz um total de 2 579 850 códigos de mensagem possíveis. No caso se imporem restrições à formação dos códigos, tais como, os símbolos do código da mensagem serem diferentes, então teremos: 21 x 20 x 5 x 4 x 22 x 9, ou 1 663 200 possíveis códigos de mensagem para usar e abusar! Porquê?

Outro exemplo é o número de identificação de veículos em Portugal. Todos os veículos que circulem na via pública têm que ter um desses números, o qual é afixado no seu exterior, numa chapa de matrícula, normalmente colocado à frente e na traseira. O sistema de numeração de matrículas dos automóveis portugueses foi implementado em 1 de janeiro de 1937, o qual consistia em três grupos de dois caracteres, separados por dois traços. A sequência inicialmente usada era AA-00-00. Em 1992 passou-se para 00-00-AA

No mundo da espionagem, do romance (clandestino ou sério), dos negócios e não só, há certamente medidas de segurança a tomar relativamente à troca de informação. Não sendo especialista na matéria, posso adiantar que uma maneira eficaz de trocar informação é usar mensagens codificadas.

e, em 2005, para 00-AA-00 que ainda está em vigor. Quantas novas matrículas foram introduzidas com a alteração de 2005 (que é idêntica à de 1992 e à de 1937)? O leitor chegará ao número 6 760 000 de possíveis matrículas. Porquê? É claro, que não estamos a ter em conta as restrições às matrículas vigentes, como sejam a do carro do Presidente da República, das reservadas às forças armadas portuguesas, etc.

Finalmente, abordo outra realidade. Não havendo muitas possibilidades económicas para destinos paradisíacos, todo (ou quase todo) o açoriano gosta de dar um "pulinho" até ao *continente* (português). Lembro-me que nas minhas primeiras viagens a Lisboa, o metro fazia-me confusão... Estreante dos costumes cosmopolitas e ignorante das zonas da capital, levava um papel e fazia o meu próprio mapa para me orientar. O meu truque era fazer um troço e depois o inverso. Nunca tive espírito aventureiro! Enfim, desabafos de "gente da terra". E depois desse rodeio de confissões e tormentos, imagine o leitor que está em Telheiras e só pode usar o metro para chegar ao Centro Comercial da estação Colégio Militar/Luz. De quantas maneiras pode lá chegar, usando somente o metro? Para ajudar na tarefa, veja a imagem. Oh vida complicada, é que não havendo a exigência (e curiosidade) de ser de metro, de Telheiras ao Colombo vão poucos minutos a pé.

Experimente!