

Amigos na Matemática



Helena Sousa Melo*

Hoje é o Dia de Amigos. Cada um de nós tenciona comemorá-lo das mais diversas formas. Combinam-se almoços, lanche, jantares, todos os convívios que nos possam proporcionar momentos agradáveis e na companhia das pessoas por quem temos apreço.

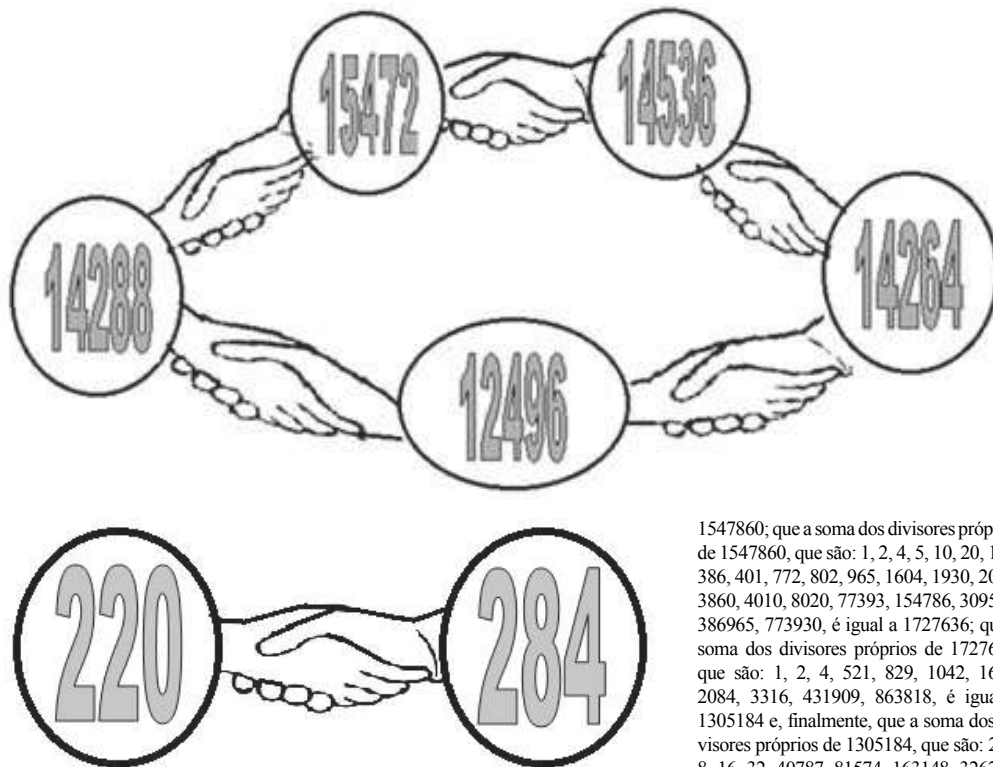
Na matemática também comemoramos, de certa forma, os amigos, uma vez que esta também é social, possuindo grupos, amigos e famílias. Há tempos falamos sobre a grande família dos Primos, hoje, em especial, trataremos dos números amigos e dos números sociáveis.

Os números amigos são definidos como pares de números naturais cuja soma dos divisores próprios de um, resulta o outro. O divisor próprio de um número natural é todo número natural que o divide, sem ser ele mesmo. Apesar de todo número ser divisível por si, este divisor não é considerado um divisor próprio.

Vamos experimentar este conceito considerando os números 36 e 54. Será que esses números são amigos? Inicialmente temos que encontrar os todos os divisores próprios de 36 e depois os de 54. Os divisores próprios de 36 são o número 1, que divide qualquer número, e os números 2, 3, 4, 6, 9, 12 e 18. Os divisores próprios de 54 são os números 1, 2, 3, 6, 9, 18 e 27. A soma dos divisores próprios de 36 é igual a 55 e a soma dos divisores próprios de 54 é igual a 66. Como as somas obtidas são diferentes de 54 e 36, respetivamente, os números, 36 e 54, não são números amigos. Constatamos que nem todos os pares de números podem ser considerados amigos.

A busca por pares de números amigos atravessou séculos. Estes existem desde a antiguidade e provavelmente o seu conceito originou-se no tempo de Pitágoras de Samos, século V a.C., visto que os pitagóricos os estudaram e acreditavam que tais números possuíam propriedades místicas.

O primeiro par de números amigos, registado nessa altura, é 220 e 284, que deram muito que falar. Observamos que a soma de 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110, que são os divisores próprios de 220, é igual a 228 e que a soma de 1, 2, 4, 71 e 142, os divisores próprios de 284, é igual a 220. Várias lendas e histórias surgiram à volta deste par de números. Contam as lendas que os amigos trocavam amuletos com estes números para perpetuar a amizade. Uma lenda relata a história de uma princesa, cujo nome, pela numerologia (sistema que atribui valor numéricos às letras), era 220, andava à procura de um príncipe



em que seu nome, pela numerologia, fosse igual a 284, para poderem viver felizes para sempre.

Por volta do ano de 850, o médico, astrónomo e matemático mesopotâmico Tabit ibn Qurra (826 – 901) descobriu uma fórmula para encontrar números amigos. Consistia em considerar um termo de números primos (p, q, r) que pudessem ser expressos na forma $3 \times 2^{n-1} - 1$; $3 \times 2^n - 1$ e $9 \times 2^{2n-1} - 1$, respetivamente, onde n é um número natural superior a 1 - o símbolo (^) indica o expoente da potência, por exemplo $2^3 = 2 \times 2 \times 2$. Os números resultantes de $p \cdot q \cdot 2^n$ e $r \cdot 2^n$ poderiam então constituir um par de números amigos.

Vamos ver como podemos obter alguns pares de números amigos através destas relações numéricas. Consideremos $n = 2$, assim temos para $p(n) = 3 \times 2^{2-1} - 1 = 3 \times 2^1 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$, para $q(n) = 3 \times 2^2 - 1 = 3 \times 2^2 - 1 = 3 \times 4 - 1 = 12 - 1 = 11$ e para $r(n) = 9 \times 2^{2 \times 2 - 1} - 1 = 9 \times 2^{4-1} - 1 = 9 \times 2^3 - 1 = 9 \times 8 - 1 = 72 - 1 = 71$. Com os valores de p, q e r , para $n = 2$, aplicamos a fórmula final obtendo de $p \cdot q \cdot 2^2$, o valor $5 \times 11 \times 4 = 220$ e de $r \cdot 2^2$, o valor de $71 \times 4 = 284$. Ou seja, neste caso, o primeiro par de números amigos.

A fórmula de Tabit produz os pares (220, 284) para $n = 2$, (2014, 2296) para $n = 3$, (17296, 18416) para $n = 4$, (142880, 147424) para $n = 5$, (1161280, 1179584) para $n = 6$, (9363584, 9437056) para $n = 7$, e assim por diante. Mas, a fórmula de Tabit não produz apenas pares de números amigos, pois para $n=5$ e $n=6$ não temos números amigos. Obtemos os pares de números amigos para $n = 2, 4$ e 7 , ou seja, (220, 284),

(17296, 18416), (9363584, 9437056). Esta fórmula foi posteriormente melhorada e generalizada pelo matemático suíço Leonard Euler (1707 – 1783) que também estudou os números amigos, descobrindo, inicialmente em 1747, uma lista de trinta pares que posteriormente ampliou para mais de sessenta pares.

Um século antes, em 1636, o matemático francês Pierre Fermat (1601 – 1665) apresentou um novo par de números amigos 17296 e 18416. No entanto, tratava-se de uma redescoberta do matemático marroquino al-Marrakushi ibn al-Banna (1256 – 1321) que os tinha encontrado em finais do século XII. René Descartes (1596 – 1650), em 1638, encontrou o par de números amigos 9363584 e 9437056, também uma redescoberta.

Os números amigos são muito interessantes, mas neste Dia de Amigos não são apenas duas pessoas que os comemoram, mais sim, um grupo de pessoas com uma determinada ligação. Assim, vamos referir os números sociáveis.

O conceito de números sociáveis é uma generalização dos números amigos. Um conjunto de números sociáveis é uma sequência cíclica de números naturais em que cada termo é igual a soma dos divisores próprios do termo anterior. O período desta sequência, ou ordem, é o número de termos que a sequência possui. Por exemplo, na sequência de ordem 4, temos os números sociáveis 1264460, 1547860, 1727636 e 1305184. Observamos que a soma dos divisores próprios de 1264460, que são: 1, 2, 4, 5, 10, 17, 20, 34, 68, 85, 170, 340, 3719, 7438, 14876, 18595, 37190, 63223, 74380, 126446, 252892, 316115, 632230, é igual a

1547860; que a soma dos divisores próprios de 1547860, que são: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 193, 386, 401, 772, 802, 965, 1604, 1930, 2005, 3860, 4010, 8020, 77393, 154786, 309572, 386965, 773930, é igual a 1727636; que a soma dos divisores próprios de 1727636, que são: 1, 2, 4, 521, 829, 1042, 1658, 2084, 3316, 431909, 863818, é igual a 1305184 e, finalmente, que a soma dos divisores próprios de 1305184, que são: 2, 4, 8, 16, 32, 40787, 81574, 163148, 326296, 652592, é igual ao primeiro termo dessa sequência, ou seja, 1264460.

Se o período de uma sequência é igual a 1, estamos perante um número perfeito. O número 6, por exemplo, é um número perfeito, pois é a soma dos seus divisores próprios, 1, 2 e 3. Um par de números amigos possui ordem 2. Até ao momento, não temos conhecimento de números sociáveis de ordem 3.

Outra sequência de números sociáveis de ordem 4 é composta por 1264460, 1547860, 1727636 e 1305184. Como exemplo de uma sequência de números sociáveis de ordem 5 temos 12496, 14288, 15472, 14536, 14264. Uma das mais longas sequências de números sociáveis é 14316, 19116, 31704, 47616, 83328, 177792, 295488, 629072, 589786, 294896, 358336, 418904, 366556, 274924, 275444, 243760, 376736, 381028, 285778, 152990, 122410, 97946, 48976, 45946, 22976, 22744, 19916 e 17716.

Será que o seu grupo de amigos é também sociável segundo a matemática? Será que o seu melhor amigo também satisfaz as condições matemáticas de amizade? Aplique a numerologia e veja o que consegue descobrir! Tenha um ótimo Dia de AMIGOS!

*hmelo@uac.pt