A prova dos 9 – "valores sigma"

Por: Helena Sousa Melo
hmelo@uac.pt
Professora Auxiliar
CMATI / Departamento de Matemática
Universidade dos Açores

A "prova dos nove", ou "noves fora", é um método para a verificação dos erros que ocorrem nas quatro operações aritméticas elementares – adição, subtração, multiplicação e divisão. Esse método é, matematicamente, a obtenção do resto de divisões por nove, dos elementos envolvidos, em que, com esses restos, as operações aritméticas são averiguadas.

Por exemplo, na adição das parcelas 245 e 467, obtemos como soma 712. Para verificar se a conta está correta, calculamos os restos das divisões de 245, 467 e 712 por 9, que são, respetivamente, 2, 8 e 1. Ao fazermos a adição dos restos das parcelas obtemos a soma 10 = 2+8, efetuando novamente a divisão por 9, obtemos como resto 1, que corresponde ao resto da soma, 712, por 9. Por palavras mais simples, "tiramos os noves" aos números que se encontram na operação, aplicamos algumas regras de acordo com a operação e comparamos resultados.

Como o nosso sistema de numeração é decimal posicional, observamos que a obtenção dos restos das divisões de qualquer número inteiro positivo por 9 pode ser obtido adicionando-se os seus respetivos algarismos. Se a soma resultante for superior a 9, então efetuamos novamente a adição dos algarismos dessa soma, até obter um valor inferior a 9. Repetimos sempre o processo, da adição dos algarismos, porque os restos de uma divisão por 9 estão compreendidos entre 0 e 8. No exemplo dado, podemos notar que 2+4+5 = 11 e que 1+1 = 2, onde 2 é o resto da divisão de 245 por 9.

Rigorosamente, o método da "prova dos nove" está associado à Aritmética Modular, cujo padrão é 9. Por exemplo, os números da sequência, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77, etc., em que a diferença entre dois termos é nove, possuem o mesmo resto na divisão por 9, ou seja, 5. Observamos que 1+4 = 2+3 = 3+2 = 4+1 = 5+0 = 5 e 5+9 = 6+8 = 7+7 = 14, que por sua vez, 1+4 = 5.

Vejamos como funciona a "prova dos nove" para as operações aritméticas:

Prova da adição: Calculamos a soma de todos os algarismos das parcelas e tiramos os noves. Calculamos depois a soma dos algarismos da sua soma e tiramos os noves. Se a operação estiver correta, os resultados são iguais. (fig. 1a)

Prova da subtração: Calculamos a soma de todos os algarismos do aditivo e tiramos os noves. Calculamos depois a soma de todos os algarismos do subtrativo e da diferença e tiramos os noves. Se a operação estiver correta, os resultados são iguais. (fig. 1b)

Prova da multiplicação: Calculamos, separadamente, a soma dos algarismos do multiplicando, do multiplicador e do produto, e tiramos os noves. Multiplicamos os resultados obtidos do multiplicando e do multiplicador, tirando os noves, e comparamos com o resultado obtido do produto. Se iguais, a operação está certa. (fig. 1c)

Prova da divisão: Calculamos, separadamente, a soma dos algarismos do dividendo, do divisor, do quociente e do resto, e tiramos os noves. Com esses valores, multiplicamos o referente ao divisor pelo quociente e adicionamos o resto, tirando os noves. Comparamos então o valor obtido com o do dividendo. Se iguais, a operação está certa. (fig. 1d)

A prova dos nove proporciona, pela sua característica, a exploração de algumas propriedades interessantes de certos tópicos da matemática. Para apresentar alguns desses resultados, utilizaremos a nomenclatura usada por matemáticos que estudam tal vertente. Nesse seguimento, vamos adotar a terminologia de "código sigma", ou simplesmente "valor sigma", para denominar o valor obtido da soma dos algarismos de um numeral retirado os noves. Assim, para obtermos o valor sigma podemos recorrer ao processo da adição dos algarismos e do cálculo do resto da divisão dessa soma por nove, ou, simplesmente, ir retirando todos os algarismos cujas somas resultam 9. Por exemplo, o valor sigma de 5342726485 é 1, uma vez que retiramos os algarismos 5, 4, 3, 6, 3, 7, pois 5+4 = 9, 3+6 = 9, 2+7 = 9, ficando apenas com os algarismo 2 e 8, onde 2 + 8 = 10, e consequentemente obtemos 1.

Como primeira exploração, vamos observar as potências de base 2 até as de base 19 em relação ao seu valor sigma.

Iniciemos com as potências de base 2 e de base 11 para uma primeira comparação, viso que 1+1 = 1. Observamos que todas as potências de base 2, ou seja, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536, 121072, e assim por diante, admitem uma mesma sequência numérica em relação ao valor sigma, que é 1, 2, 4, 8, 7, 5, em ciclo. Para as potências de base 11, que são 1, 11, 121, 1331, 14641, 161051, 1771561, 19487171, …, observamos que os seus valores sigma também seguem a mesma sequência, em ciclo, das potências de base 2.

Para as potências de base 3, base 6, base 9, base 12, base 15 e base 18, todas múltiplas de 3, obtemos 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, 59049, 177147, …; 1, 6, 36, 216, 1296, 7776, 46656, …; 1, 9, 18, 27, 36, …; 1, 12, 144, 1728, 20736, …; 1, 15, 225, 3375, 50625, …; 1, 18, 324, 5832, 104976, respetivamente, observamos que os valores sigma, com exceção dos dois primeiros, são todos iguais a 9. Salientamos que o valor sigma de 12, 15 e 18 é igual a 3, 6 e 9, respetivamente, justificando o sucedido.

Para as potências de base 4 e de base 13 obtemos as potências 1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096, 16384, …, e 1, 13, 169, 2197, 28561, 371293, 4826809, respetivamente, em que os valores sigma, obedecem a sequência, em ciclo, 1, 4 e 7 de modo cíclico. Curiosamente as potências de base 7, e de base 16, que são 1, 7, 49, 343, 2401, 16807, 117649, …, e 1, 16, 256, 4096, 65536, 1048576, …, seguem a sequência, em ciclo, 1, 7 e 4 nos seus valores sigma. Invertendo os algarismos 4 e 7 da anterior.

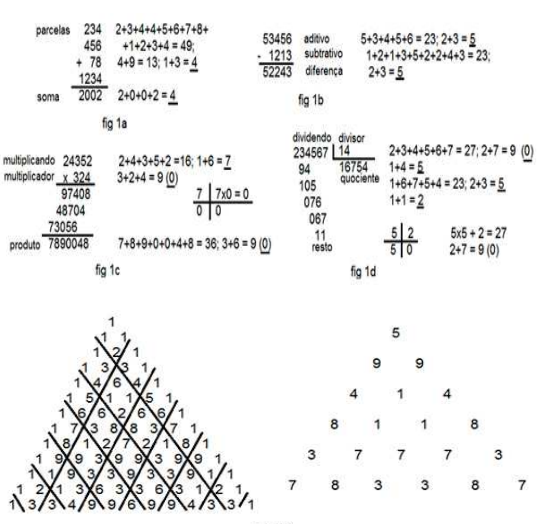
Para as potências de base 5 e de base 14, ou seja, 1, 5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625, 1953125, 9765625, …, e 1, 14, 196, 2744, 38416, 537824, 7529536, …, temos a sequência, em ciclo, de valores sigma 1, 5, 7, 8, 4 e 2. As potências de base 8 e de base 17, isto é, 1, 8, 64, 512, 4096, 32768, 262144, …, e 1, 17, 289, 4913, 83521, …, respetivamente, seguem a sequência de valores sigmas 1 e 8, alternadamente.

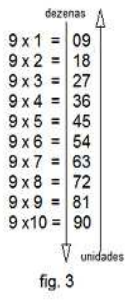
Com toda essa informação podemos formular uma regra geral, baseada nas potências das primeiras nove bases, visto que as outras bases têm como valor sigma uma base já calculada, como o caso de 2 e 11, 3 e 12, etc. Assim, para as potências de base 19, podemos afirmar que os respetivos valores sigma são todos iguais a 1, pois 1+9 = 10 (1).

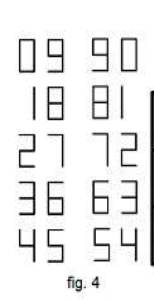
Exploremos agora o Triângulo de Pascal. Na figura 2 apresentamos um primeiro triângulo com aos correspondentes valores sigmas e ao lado a soma dos valores que se encontram nos losangos assinalados. Observamos que no segundo triângulo a soma de cada linha, com exceção da primeira, tem por valor sigma 9, pois 9 + 9 = 18 (9); 4+1+4 = 9; 8+1+1+8 = 18 (9); 3+7+7+7+3 = 27 (9); 7+8+3+3+8+7 = 36 (9).

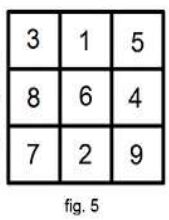
A tabuada do 9 é outro exemplo de onde obtemos o valor nove como valor sigma, para além da forma interessante de como podemos obtê-la, em que os algarismos das dezenas estão em ordem crescente e os algarismos das unidades em ordem decrescente. A figura 3 mostra esse facto. Nessa sequência, apresentamos na figura 4, por curiosidade, uma simetria entre as dezenas e as unidades dos dez primeiros múltiplos de nove.

Para finalizar esta digressão ao redor do valor sigma, que se iniciou com a "prova dos nove", apresentamos o quadrado mágico sigma (fig. 5), que ao contrário de um quadrado mágico tradicional, não apresenta a soma das linhas, colunas e diagonais, todas iguais, mas sim relacionadas com o valor sigma 9. Como podemos observar, a soma da primeira linha é igual a 9, a da segunda linha é igual a 18, ou seja, valor sigma igual a 9, e a da terceira é igual a 27, novamente o valor sigma igual a 9. Nas colunas temos, a primeira com a soma igual a 18, a segunda com a soma igual a 9 e a terceira com a soma igual a 18. Em relação às diagonais, temos ambas com a soma igual a 18. Os ciclos e padrões com os números são muito interessantes de se procurar, e por vezes estão escondidos em relações simples e curiosas.









BE provoca debate sobre fim das quotas leiteiras na União Europeia

Foto: flickr

O Bloco de Esquerda não se conforma com o fim das quotas leiteiras e já entregou no Parlamento Europeu, a semana passada, um documento com perguntas dirigidas ao Comissário Europeu da Agricultura, Phil Hogan, que serão respondidas oralmente em plenário – em Abril ou Maio – gerando debate sobre este assunto tão importante para os Açores.

Assim, a eurodeputada do BE, Marisa Matias, – em conjunto com outros deputados – quer saber se a Comissão Europeia está disponível para recentrar a política do leite na resposta ao mercado europeu, com medidas de regulação do mercado que ajustem a oferta à procura, ou se, por outro lado, irá deixar o sector totalmente vulnerável, dependente do exterior, e sujeito a enormes variações de preço?

Isto, porque o modelo que entra agora em vigor vai, por exemplo, fazer com que sejam necessários apenas 15 mil produtores, com mil vacas cada, para produzir um volume de leite igual ao que estava a ser produzido no regime de quotas, o que irá provocar muito desemprego – especialmente nos países do sul e com explorações mais pequenas.

"Está a comissão disponível para realizar uma discussão profunda que leve à implementação de medidas estruturantes para a prevenção da crise do sector do leite na Europa?" É outra das perguntas a que o Comissário da Agricultura terá que responder em plenário do Parlamento Europeu.

Recorde-se que a própria Comissão Europeia – no relatório de 2014 sobre o mercado do leite – assume dúvidas sobre a capacidade de – com as regulamentações actuais – dar resposta à extrema volatilidade do mercado após o fim do sistema de quotas.

"É preciso não esquecer também que o aumento de produção dos Estados Unidos da América, da Austrália e da Nova Zelândia, assim como a diminuição das exportações para a China e Rússia vêm complicar ainda mais as possibilidades de escoar a produção da União Europeia".