

## Oficina sobre projectos de digitalização

A Biblioteca Pública e Arquivo Regional de Ponta Delgada promove, entre 14 e 16 de Setembro, a realização de uma oficina intitulada “Transfêrência de Suportes: Projetos de Digitalização”, que será ministrada por Luís Corujo.

Esta iniciativa, que decorre das 09h30 às 17h00, dá continuidade a uma série de atividades semelhantes, que a instituição tem promovido para formação interna das suas equipas e atualização de conhecimentos dos profissionais das áreas da informação, informática e gestão na Região.

A oficina pretende identificar os princípios teóricos e metodológicos para o planeamento, produção e gestão de projetos de digitalização, inferir dos diferentes domínios de aplicação dos projetos de digitalização, procedimentos para manutenção e tratamento da informação e dar a conhecer as soluções e mecanismos de software e hardware utilizados no desenvolvimento de projetos de digitalização.

A compreensão das necessidades de auditoria e certificação decorrentes da especificidade tecnológica dos projetos de digitalização, o desenvolvimento de competências de utilização dos equipamentos e aplicações no âmbito de projetos de digitalização e o alerta para as necessidades específicas relacionadas com a gestão das imagens digitais, o seu acesso e preservação, são outros dos objetivos desta iniciativa.

Luís Miguel Nunes Corujo é assistente convidado no Programa de Mestrado em Ciências da Documentação e Informação da Faculdade de Letras da Universidade de Lisboa e Arquivista na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, além de formador da Direção-Geral da Qualificação dos Trabalhadores em Funções Públicas (INA) e outras entidades públicas e privadas nas temáticas da gestão documental, arquivos eletrónicos e preservação digital.

Colabora com a Direção-Geral do Livro, dos Arquivos e das Bibliotecas na área da preservação digital e está envolvido em projetos relativos a repositórios digitais e avaliação arquivística.

A frequência desta oficina está limitada a 15 participantes, devendo as inscrições ser feitas até 7 de setembro para o endereço de correio eletrónico socioeducativo.bparpd@azores.gov.pt.

A Direção Regional da Cultura informa que este e outros eventos estão disponíveis para consulta na Agenda Cultural do Portal CulturAçores, no endereço eletrónico www.culturacores.azores.gov.pt.

Foto:DR



## Raízes quadradas sem calculadora



**Por: Helena Sousa Melo**  
 helena.fs.melo@uaac.pt  
 Professora do Departamento de Matemática e Estatística Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores

Com as máquinas de calcular, o cálculo da raiz quadrada de um número real não negativo tornou-se muito fácil. Hoje em dia, quase todas as calculadoras estão dotadas de uma tecla para o efeito. Assim, para calcular a raiz quadrada de um número real não negativo, basta escrevê-lo numa calculadora e carregar a tecla que possui um símbolo semelhante a  $\sqrt{\quad}$ .

A raiz quadrada de um número real não negativo  $a$  é um número real que multiplicado por si mesmo resulta no número  $a$ . A expressão que vemos na imagem 1 apresenta a raiz quadrada de um número real não negativo  $a$ , em que o número real  $b$  verifica tal condição, isto é,  $b \times b = a$ . Assim,  $b$  denota a raiz quadrada de  $a$ , onde o número  $a$  é o radicando, o número  $b$ , a raiz e o símbolo, o radical que expressa a operação da raiz quadrada.

Não sabemos ao certo a origem deste símbolo do radical. Alguns historiadores especulam que o símbolo tenha sido usado pela primeira vez pelos árabes, sendo o matemático Al-Qalasady (1412 – 1486) quem primeiro o usou. Esse símbolo é também utilizado para a raiz cúbica, a raiz quarta, etc, e nesses casos é munido de um índice colocado na parte superior esquerda do radical e que indica qual a respetiva raiz, sendo o índice 3 para a raiz cúbica, o índice 4 para a raiz quarta e assim por diante.

Segundo Samsó J., no seu livro *Las ciencias de los antiguos en al-Andalus* de 1992, Al-Qalasady é referido como um especialista na introdução de símbolos algébricos, em que utilizava palavras curtas em árabe, ou apenas as letras iniciais, como símbolos matemáticos. No caso da radiciação, utilizou “j” a inicial da palavra “jadhr” que significa “raiz”.

Alguns matemáticos, como o matemático suíço Leonard Euler (1707 – 1783), acreditavam que o símbolo tivesse origem na primeira letra da palavra em latim “radix”, que se refere a operação de radiciação, escrita em minúscula.

O símbolo do radical, segundo o historiador Howard Eves, foi visto pela primeira vez impresso no livro de álgebra, datado de 1525, do matemático alemão Christoff Rudolf (1499 – 1543) intitulado *Die Coss* (a palavra Coss foi utilizada como o significado de “desconhecido”). Nessa altura, o símbolo foi impresso sem a linha horizontal que fica sobre o radicando.

O comando  $\sqrt{\quad}$  também é adotado para referenciar a operação de raiz quadrada.  $\sqrt{\quad}$  é a abreviação de “square root”, expressão que significa “raiz quadrada”.

Quer com o símbolo do radical, quer com o comando  $\sqrt{\quad}$ , a raiz quadrada de um número real não negativo é uma forma de representar a potenciação com o expoente igual a fração  $1/2$ . Por exemplo, 9 elevado ao expoente  $1/2$  equivale a raiz quadrada de 9 que é igual a 3.

Conhecemos algumas raízes quadradas, principalmente as raízes quadradas associadas com as tabuadas de multiplicação do 2 até ao 10, ou seja, sabemos que 2 é a raiz quadrada de 4, pois  $2 \times 2 = 4$ ; que 3 é a raiz quadrada de 9; 4 é a raiz quadrada de 16; 5, a de 25; 6, a de 36; 7, a de 49; 8, a de 64; 9, a de 81 e 10, a de 100.

Mas sem calculadora, sem computador, e com números decimais ou superiores a 100, como poderíamos encontrar a raiz quadrada de um número real não negativo?

Há muitos processos para encontrarmos a raiz quadrada de um número real não negativo, entre eles, a decomposição de um número em fatores primos, a utilização das tábuas de logaritmos, o método das frações contínuas, o uso das réguas de cálculo, o enquadramento de raízes quadradas, a aplicação do seu algoritmo.

Antigamente, cerca de 1700 antes de Cristo, ou um pouco menos, o povo babilónio desenvolveram um processo para extração da raiz quadrada. Esse processo é frequentemente atribuído, segundo o historiador Carl Boyer, ao sábio grego Arquitas (428 – 365 a.C.) ou a Heron de Alexandria (cerca de 100 d.C.), e por vezes é também denominado de algoritmo de Newton.

O processo babilónio é simples. Parte do princípio que a raiz quadrada de um número é igual ao quociente desse número dividido pela própria raiz quadrada. Por outras palavras, se o número real não negativo  $a$  for o radicando e o número real  $b$  for a sua raiz, então quando dividimos o número  $a$  pelo número  $b$ , a divisão é exata e o seu quociente é igual a  $b$ . O processo babilónio inicia-se com a atribuição de um valor aproximado para a raiz que vamos denotá-lo por  $a_1$ , depois calculamos uma segunda aproximação,  $b_1$ ,

como quociente da divisão do radicando,  $a$ , pela primeira aproximação da raiz,  $a_1$ , isto é, através da igualdade  $b_1 = a/a_1$ . Agora, comparamos os resultados. Se a segunda aproximação,  $b_1$ , for igual a primeira aproximação,  $a_1$ , então encontramos a raiz. Caso contrário, calculamos a média aritmética das duas aproximações, ou seja,  $(a_1 + b_1)/2$ , obtendo uma nova aproximação,  $a_2$ , que será testada calculando-se novamente  $b_2$ , o quociente de  $a$  por  $a_2$ . Se  $b_2$  for igual a  $a_2$ , temos a raiz, caso contrário, continuamos o processo até que  $a_n$  e  $b_n$  sejam aproximadamente iguais, obtendo assim a raiz quadrada desejada.

Um exemplo desse processo pode ser visto na imagem 2, onde calculamos a raiz quadrada de 21. Consideremos  $a_1 = 4$ , pois  $4 \times 4 = 16$ , o menor quadrado perfeito mais próximo do número dado, nesse caso 16. De seguida, dividimos o número original por  $a_1$  e temos  $b_1 = 5,25$ . Como os valores obtidos, 4 e 5,25, são diferentes, calculamos a sua média aritmética encontrando  $a_2 = 4,625$ , e consequentemente  $b_2 = 4,541$ . Como ainda não são iguais, continuamos o procedimento onde observamos que  $a_3$  e  $b_3$  possuem os mesmos algarismos até a ordem das centésimas. Assim, a raiz quadrada de 21 aproximada às centésimas é igual a 4,58.

Se um número for um quadrado perfeito, então através da sua decomposição em fatores primos conseguimos encontrar a sua raiz quadrada. Por exemplo, a raiz quadrada de 225 é igual a 15, pois, decompondo 225 em fatores primos temos que  $225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$ , onde os fatores 3 e 5 aparecem duas vezes, logo a sua raiz quadrada que é  $3 \times 5$ .

Mas infelizmente, nem todos os números são quadrados perfeitos. Um método curioso para encontrar a parte inteira da raiz quadrada de um número é o método da “equação de Pell”, em homenagem ao matemático inglês John Pell (1611 – 1685), em que ao número do qual queremos encontrar a raiz quadrada subtraímos sucessivamente números inteiros ímpares, por ordem crescente, e contamos a quantidade de subtrações efetuadas. Por exemplo, a parte inteira da raiz de 95 é 9, pois  $95 - 1 = 94$ ;  $94 - 3 = 91$ ;  $91 - 5 = 86$ ;  $86 - 7 = 79$ ;  $79 - 9 = 70$ ;  $70 - 11 = 59$ ;  $59 - 13 = 46$ ;  $46 - 15 = 31$ ;  $31 - 17 = 14$ . Como não podemos subtrair 19 de 14, paramos as subtrações e fazemos a contagem das subtrações efetuadas. Assim, a parte inteira da raiz de 95 é igual a 9 e de resto temos 14. Isto é,  $95 = 9 \times 9 + 14$ . A justificação desse método está no facto que todo quadrado perfeito é igual à soma de números primos em ordem crescente, e que o número de parcelas corresponde à sua raiz. Por exemplo,  $16 = 1 + 3 + 5 + 7$  e possui quatro parcelas.

Inspirados nesse método, podemos efetuar a extração da raiz quadrada também calculando a sua parte decimal. Por exemplo, consideremos o número 18. Sabemos que o quadrado perfeito mais próximo e inferior a 18 é 16, logo, a parte inteira é igual a 4 e de resto temos 2 = 18 - 16. Para obter o primeiro número decimal, multiplicamos o resto obtido, 2, por 100 e consideramos o sucessor do produto de 4 por 20, ou seja, 81. Com esses valores efetuamos o mesmo processo de subtrações sucessivas por números ímpares mas iniciado com 81. Isto é,  $200 - 81 = 119$ ;  $119 - 83 = 36$ , onde efetuamos apenas duas subtrações. Logo, o primeiro algarismo da parte decimal é 2. Para continuar, consideramos o produto do resto do último passo, 36, por 100 e o sucessor do produto do número até agora obtido para raiz por 200, isto é,  $4,2 \times 200 + 1$ . Então fazemos,  $3600 - 841 = 2759$ ;  $2759 - 843 = 1916$ ;  $1916 - 845 = 1071$ ;  $1071 - 847 = 224$ , efetuando apenas quatro subtrações. Assim, o segundo algarismo da parte decimal é 4. Continuamos, consideramos agora o produto do último resto, 224, por 100 e o sucessor do produto da raiz quadrada até agora obtida por 2000, ou seja,  $4,24 \times 2000 + 1$ , fazemos as subtrações e obtemos o algarismo 2. De seguida, consideramos os valores  $5436 \times 100$  e  $4,242 \times 20000 + 1$  onde obtemos o algarismo 6. Assim, o valor aproximado da raiz quadrada de 18 é igual a 4,2426.

Outro método curioso é baseado no cálculo diferencial, e utiliza a fórmula apresentada na imagem 3, em que a raiz

quadrada de um número real não negativo  $n$  é igual ao quociente de  $(n + q)$  pelo dobro da raiz quadrada de  $q$ , onde  $q$  é um número quadrado perfeito.

Este método parte da definição de derivada, onde a derivada  $f'(q)$  é igual ao limite de  $n$  tendendo a  $q$ , do quociente de  $(f(n) - f(q))$  por  $(n - q)$ , e considerando a função  $f(n)$  a raiz quadrada de  $n$ . Evidentemente a igualdade não é verdadeira para valores cuja diferença seja grande em relação a um quadrado perfeito, mas a sua aproximação é razoável. Por exemplo, a raiz quadrada de 10 é aproximadamente igual ao quociente de  $(10 + 3 \times 3)$  por  $(2 \times 3)$ .

Finalizamos com a apresentação do algoritmo para a extração da raiz quadrada de um número real não negativo qualquer. Para tal, apresentamos os seus passos através de um exemplo, o cálculo da raiz quadrada de 183645, como podemos ver na imagem 4.

I) decomponemos o número em grupos de dois algarismos, a partir da direita, podendo o último grupo ter apenas um algarismo. A cada grupo separado corresponde um algarismo na parte inteira da raiz. Nesse exemplo, a parte inteira da raiz possuirá três algarismos.

II) extraímos a raiz quadrada aproximada, por falta, do último grupo. Nesse exemplo será 4, pois  $4 \times 4 = 16$  menor que 18.

III) subtraímos do primeiro grupo à esquerda o quadrado do número encontrado e à direita do resto obtido “baixamos”, como no algoritmo da divisão, o segundo grupo à esquerda, separando com um apóstrofo o último algarismo da direita, isto é, 23'6.

IV) calculamos o dobro do número da raiz, escrevendo-o na linha logo abaixo da raiz e dividimos, por esse número, o número que ficou à esquerda do apóstrofo, ou seja, 23/8. O quociente aproximado obtido é escrito à direita do dobro calculado e depois multiplicamos o número assim formado por esse quociente, isto é,  $82 \times 2$ . Observamos que se o quociente obtido for igual ou maior do que 10, consideramos o número 9.

V) se for possível subtrair o produto obtido, 164, do número anteriormente formado abaixo do radicando, 236, o quociente encontrado será o segundo algarismo da raiz, caso contrário, vamos diminuindo o quociente de uma unidade até que se encontre um produto que torne possível tal subtração. No exemplo, como é possível efetuar a subtração  $236 - 82 \times 2 = 72$ , então 2 é o segundo algarismo da raiz quadrada.

VI) repetimos os passos III, IV e V. Assim, após a obtenção da diferença, “baixamos” o grupo seguinte e separamos com um apóstrofo o último algarismo da direita,  $724'5$ , calculamos o quociente aproximado de  $724/84$ , onde 84 é o dobro do número que está na raiz, e verificamos se é possível efetuar a subtração  $7245 - 848 \times 8$ .

Assim, a raiz quadrada de 183645 é aproximadamente igual a 428 e resto 461, pois,  $428 \times 428 + 461 = 183645$ .

Podemos ainda continuar o processo colocando dois zeros no radicando e uma vírgula na raiz. Cada grupo de dois zeros colocados no radicando corresponde a um algarismo na parte decimal. Se o número no radicando for um número decimal podemos fazer a extração da raiz pelo processo anterior de dois modos: ou considerar o radicando como uma fração decimal, por exemplo,  $234,543 = 234543/1000$ , calcular a raiz do numerador e do denominador e efetuar a divisão para expressar novamente como número decimal; ou calcular diretamente separando em grupos de dois algarismos a partir da vírgula, ou seja, se tivermos 234,543 considerar 2'34,54'30, e proceder normalmente com o algoritmo da extração da raiz quadrada.

Agora, munidos de um lápis e de uma folha de papel, somos capazes de extrair a raiz quadrada de qualquer número real não negativo, é só escolher o método. Boas contas!

Foto:DR

$\sqrt{21} \approx 4,58$

$a_1 = 4$

$a_2 = \frac{4 + 5,25}{2} = 4,625$

$a_3 = \frac{4,625 + 4,541}{2} = 4,583$

quando  $a \geq 0$ ,  
 $\sqrt{a} = b$ ,  
 $b \times b = b^2 = a$

imagem 1

$b_1 = \frac{21}{4} = 5,25$

$b_2 = \frac{21}{4,625} \approx 4,541$

$b_3 = \frac{21}{4,583} \approx 4,582$

imagem 2

$\sqrt{18'36'45}$	428
$\underline{-16}$	23 : 8 $\approx$ 2
$\underline{23'6}$	82 x 2 = 164
$\underline{-164}$	724 : 84 $\approx$ 8
$\underline{724'5}$	848 x 8 = 6724
$\underline{-6724}$	461

imagem 4

$\sqrt{n} \approx \frac{n + q}{2 \times \sqrt{q}}$

imagem 3