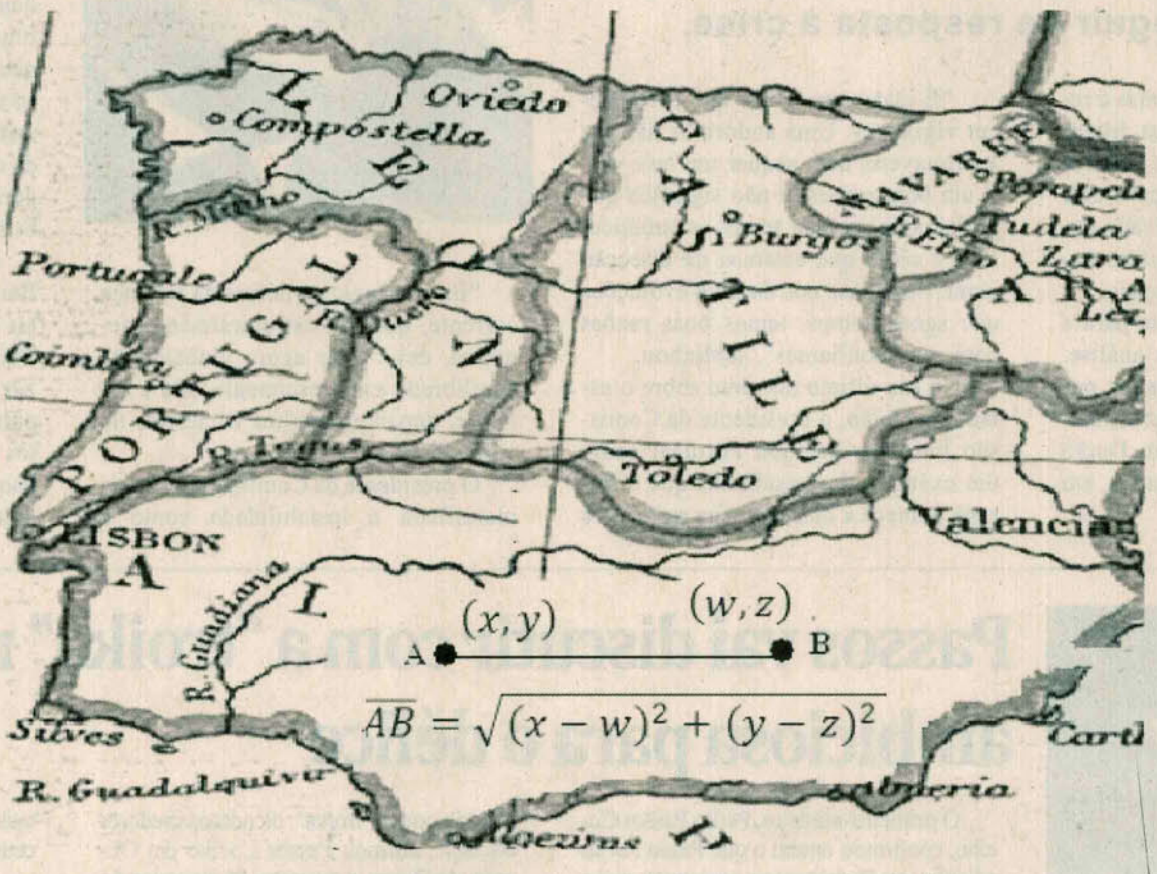
Calcular a distância entre dois pontos e a fronteira portuguesa

João Cabral*

Hoje estava a navegar pela internet, procurando algumas efemérides relacionadas com a matemática e ligadas ao dia 12 de setembro, sobre a qual pudesse escrever e partilhar com o leitor. Encontrei algumas, mas a que mais me prendeu a atenção foi uma efeméride relacionada com a história de Portugal. Foi exatamente a 12 de setembro de 1297, no tratado de Alcanizes, que a fronteira entre Portugal e Castela ficou definida. Comecei logo a imaginar-me no século XIII a tentar marcar no terreno os pontos geodésicos, as linhas de fronteira, sem a possibilidade de recorrer às mais recentes tecnologias na área da matemática ou geodesia. Foi de certeza uma tarefa hercúlea e fiquei logo a admirar, mesmo remotamente no tempo, quem a realizou. Para quem olha para o mapa de Portugal pode constatar que os responsáveis por este trabalho usaram, sem dúvida, as formações morfológicas existentes como pontos de referência, caso de cadeias montanhosas, rios, vales, etc. De norte a sul de Portugal a fronteira contém uma extensão muito grande limitada por cursos de água, em que é muito fácil de definir, de um lado do rio fica Portugal, do outro lado fica Castela. Agora imaginemos que queríamos determinar a extensão total da fronteira portuguesa, usando apenas os instrumentos existentes em 1297. A fronteira atual tem uma extensão de 1214 km, aproximadamente. Esta tarefa teria de ser realizada ponto a ponto, atravessando planícies, subindo e descendo montanhas, sempre feita sob uma perspectiva linear. Isto é, após o cálculo de todas as distâncias parcelares, reúnem-se todas as medidas e imaginamos uma grande linha assente numa superfície plana, e assim obtemos os 1214 km de fronteira. Mas a fronteira não é plana, nem entre os dois pontos de cada distância parcelar temos apenas um segmento de reta, linear e puramente horizontal. Neste momento agradecemos o facto de que a matemática evoluiu até aos nossos dias e que já existem satélites que nos ajudam a marcar estas distâncias com uma margem de erro irrelevante!

Calcular uma distância pode ser visto como algo muito fácil quando estamos a lidar com superfícies planas, quase perfeitas, com um nivelamento perfeito. Existem vários tipos de ferramentas que auxiliam o ser humano a concretizar esta tarefa, que variam desde a velhinha fita métrica, até à marcação por laser em equipamentos mais modernos, ou até mesmo com o uso dos satélites. Então como determinar uma distância entre dois pontos, não estando estes assentes nesta superfície perfeita?



Os alunos quando aprendem a determinar uma distância pela primeira vez fazem-no sob a superfície de uma mesa, uma área plana regular, e sem usar muito tempo de raciocínio utilizam uma régua graduada ou uma fita métrica. Ao longo do tempo vão adquirindo conhecimentos na disciplina de matemática que lhes permite determinar, sem grande esforço, uma distância entre dois pontos, usando as coordenadas dos mesmos, relativas a um sistema de referenciação cartesiana. Aprendem rapidamente na escola que um ponto A que tenha coordenadas (x,y) e um ponto B que tenha coordenadas (w,z), que a distância entre os mesmos é o resultado da raiz quadrada da soma dos quadrados das diferenças respetivas entre as abcissas e as ordenadas. Depois, quando avançam no nível de ensino, é-lhes dito que basta acrescentar a terceira coordenada caso a distância seja determinada no espaço. Enquanto o aluno está a realizar cálculos com base no plano, com mais ou menos dificuldade, lá vai conseguindo ver a aplicação de um dos mais velhinhos teoremas da matemática, que é o Teorema de Pitágoras, de onde se retira a fórmula de cálculo usual da distância entre dois pontos. Mas quando se transita para o espaço as coisas complicam-se para o aluno, pois a sua noção intuitiva de distância começa a colidir com a visão linear da fórmula de cálculo. Afinal, a nossa forma de compreender a realidade está mais próxima da visão espacial do que a forma plana. A geometria Euclidiana, a que o aluno aprende na sala de aula durante 12 anos de escolaridade, que tem toda a sua construção axiomática assente num plano perfeito começa a falhar… Vejamos: Se uma pessoa estiver numa das encostas do pico da Barrosa, em São Miguel, virada para a cidade da Lagoa, e tivermos outra pessoa na encosta oposta, virada para a cidade da Ribeira Grande, sem possibilidade de se verem mutuamente, como podemos determinar a distância entre estas duas pessoas? Tendo as coordenadas geográficas da latitude e longitude de cada uma facilmente teríamos uma distância, calculada usando a fórmula usual da distância entre dois pontos no espaço. Mas o problema é que a fórmula das distâncias dá-nos um valor como se as duas pessoas estivessem num nível plano, mas não estão! O mesmo seria dizer que as duas pessoas poderiam visualizar-se mutuamente, usando uma visão raio X através da montanha. Qualquer aluno, intuitivamente, saberia que para determinar esta distância teríamos de contabilizar um comprimento que contasse com o desnível da montanha, e que esta distância, a real, seria sempre maior do que a distância calculada pela fórmula matemática baseada na geometria Euclidiana! Aqui os alunos começam-se a questionar porque não aprendem a ferramenta certa, que lhes dê a resposta certa, a uma situação tão real como essa.

"A métrica que é a base do cálculo de distâncias na geometria hiperbólica já não tem uma base linear (...). Mas a exigência matemática do nível de conhecimento, em termos de formalismo de escrita, tem sido um obstáculo que impede a sua utilização regular no ensino de nível secundário, por enquanto"

A noção de distância, sob um ponto de vista matemático, está intimamente ligada à construção do que se entende por espaços métricos. As leis de formação de um espaço métrico são muito simples de entender. No geral é um conjunto X abstrato munido de uma métrica d, ou distância, que se representa por (X,d), em que prevalece quatro leis: 1- A distância entre dois elementos do conjunto X é um número real não negativo e finito; 2- Se a distância entre dois elementos deste conjunto X for nula então eles só podem ser o mesmo elemento; 3- Medir a distância entre dois elementos do conjunto não depende do sentido em que esta é medida; 4- Respeita a "desigualdade triangular", isto é, se considerarmos três elementos x, y e z quaisquer do conjunto X, com uma certa distância entre si, a distância que vai do elemento "x" ao elemento "z" é sempre inferior ou igual à soma das distâncias de "x" a "z" e de "x" a "y". Os espaços métricos variam entre si apenas pela forma de calcular a distância. A mais usual é a métrica euclidiana, mas existem outras igualmente famosas, como a métrica do máximo, a métrica do maior elemento ou até a métrica da soma. Mas as que se adaptam ao cálculo de distâncias, próximas da realidade que nos rodeia, são as que são usadas em geometrias como a hiperbólica e a esférica. A métrica que é a base do cálculo de distâncias na geometria hiperbólica já não tem uma base linear, e já pode ser aplicada a superfícies tridimensionais de uma forma direta. Mas a exigência matemática do nível de conhecimento, em termos de formalismo de escrita, tem sido um obstáculo que impede a sua utilização regular no ensino de nível secundário, por enquanto.

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
Diretor do Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação
jcabral@uac.pt.