

FICHA TÉCNICA

Título CÁLCULO INTEGRAL E APLICAÇÕES
Autor PAULO MEDEIROS
Edição UNIVERSIDADE DOS AÇORES
Depósito Legal #####/21
ISBN ###-###-####-#
Data de Saída #####
Tiragem 300 exemplares
Execução Gráfica Nova Gráfica, Lda.

CÁLCULO INTEGRAL E APLICAÇÕES

Paulo Medeiros

7 de Outubro de 2021

Universidade dos Açores

Dedicado à memória de meu pai

Conteúdo

1	Introdução	1
I	Primitivas	3
2	Primitivas imediatas	5
2.1	Regra para potências de x	6
2.2	Regras do logaritmo	9
2.3	Regras para potências de funções	12
2.4	Regras para a função exponencial	15
2.5	Regras para funções trigonométricas	19
2.6	Regras para potências de $\operatorname{sen}x$ e $\operatorname{cos}x$	20
2.7	Regras para inversas de funções trigonométricas	23
3	Primitivação por partes	27
4	Primitivas de funções racionais	33
4.1	Raízes reais simples	36
4.2	Raízes reais múltiplas	39
4.3	Raízes complexas	41
5	Primitivação por substituição	45
6	Exercícios propostos	53
II	Integral definido e aplicações	59
7	Integral definido	61
7.1	Função integrável à Riemann. Interpretação geométrica.	62
7.2	Integral definido. Fórmula de Barrow	66
7.3	Exemplos	68

8	Cálculo de áreas planas	71
8.1	Exemplos	74
9	Comprimento de arcos de curvas	79
9.1	Exemplos	79
10	Volumes de sólidos de revolução	83
10.1	Exemplos	84
11	Área de um corpo de revolução	89
11.1	Exemplos	89
12	Exercícios propostos	93

Capítulo 1

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente Cálculo, é um ramo fundamental da Matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área abaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Onde há movimento ou crescimento e onde forças variáveis agem produzindo aceleração, o Cálculo é a ferramenta da Matemática a ser usada.

Desenvolvido por Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes, o Cálculo auxilia em vários conceitos e definições a Matemática, Química, Física clássica, Física moderna e Economia. O estudante de Cálculo deve ter conhecimentos em certas áreas da Matemática, como Funções, Geometria e Trigonometria, pois são a base de todo o Cálculo.

Com o advento do "Teorema Fundamental do Cálculo" estabeleceu-se uma conexão entre os dois ramos do Cálculo: o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. O Cálculo Diferencial surgiu devido ao problema da tangente, enquanto o Cálculo Integral nasceu de um problema aparentemente não relacionado, o problema do cálculo de áreas de regiões do plano. O professor de Isaac Newton em Cambridge, Barrow, descobriu que esses dois problemas estão de fato estritamente relacionados, ao perceber que a derivação e a integração são processos inversos. Foram Leibniz e Newton que exploraram essa relação e a utilizaram para transformar o Cálculo num método matemático sistemático. Particularmente ambos concluíram que o Teorema Fundamental permitia calcular áreas muito mais facilmente, sem que fosse necessário calculá-las como limites de somas (método descrito pelo matemático Riemann, pupilo de Gauss).

Parte I

Primitivas

Capítulo 2

Primitivas imediatas

O conceito de primitiva é o conceito inverso da derivada, por isso muitas vezes é designada por anti-derivada. Pretende-se determinar, dada uma função $f(x)$, qual é a função cuja derivada é $f(x)$. O cálculo integral, assim como o cálculo diferencial, baseia-se num conjunto de regras que são aplicadas dependendo do tipo de função que pretendemos integrar. Ao longo desse livro, e para uma mais fácil compreensão, as regras estão separadas, sendo apresentados alguns exemplos para cada dos casos.

Suponhamos que pretendemos calcular a primitiva de $2x$. É sabido que uma função cuja derivada é $2x$ é, por exemplo, x^2 . Mas também pode ser $x^2 + 3$, ou $x^2 - 7$, ou genericamente $x^2 + c$. Assim não existe uma primitiva de $2x$, mas sim uma infinidade de primitivas que diferem de uma constante, isto é, existe uma família de funções que, graficamente, diferem umas das outras por uma translação associada ao vetor $(0, c)$.

Simbolicamente

$$P(2x) = x^2 + c \quad \text{ou} \quad \int 2x dx = x^2 + c.$$

Qualquer uma das duas representações é válida. Nesse livro iremos optar pela segunda. Também, ao longo do texto, iremos utilizar o termo integral indefinido, ou apenas integral, para designar a primitiva de uma função. Esta função designa-se por função integranda.

Embora nesse exemplo inicial seja bastante simples de verificar qual a primitiva da função dada, isto nem sempre se verifica e como tal existem regras. Começemos pelas duas regras fundamentais para o cálculo de qualquer primitiva, seja ela imediata ou não.

Regra 1

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Regra 2

$$\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx, \text{ sendo } k \text{ uma constante}$$

Normalmente é bastante útil separar um integral no qual a função integranda é uma adição (ou subtração) de duas ou mais funções, numa adição (ou subtração) de integrais. Mais, as constantes podem passar para fora do integral sempre que estejam a multiplicar pela respetiva função integranda. Como é óbvio, esse processo também funciona em sentido contrário.

É importante salientar que o integral do produto não é igual ao produto dos integrais:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

2.1 Regra para potências de x

Antes de iniciarmos o cálculo de primitivas envolvendo potências de x , é conveniente relembrar algumas regras básicas das potências.

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= a^{n+m}; & a^n \cdot b^n &= (ab)^n \\ \frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m}; & \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m}; & \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}} \end{aligned}$$

Suponhamos que se pretende calcular o integral de uma potência de x , por exemplo $x^{-\frac{1}{2}}$. Atendendo a que a regra de derivação de uma potência de x é $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$, facilmente se deduz que, efetuando o raciocínio inverso, obtemos:

Regra 3

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

Exemplo 1 $\int x^7 dx$.

Por aplicação imediata da Regra 3, obtemos que

$$\int x^7 dx = \frac{x^{7+1}}{7+1} + c = \frac{x^8}{8} + c.$$

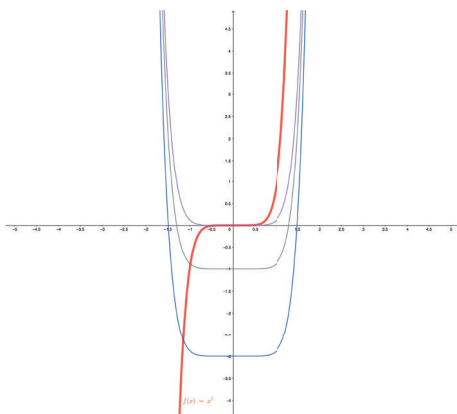


Figura 2.1: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 2 $\int x^{-\frac{1}{2}} dx$.

$$\int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x^{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c.$$

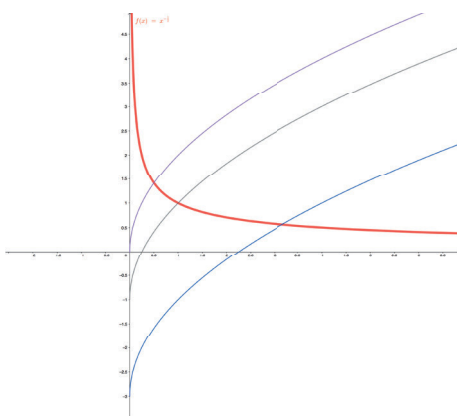


Figura 2.2: Família de primitivas de $f(x)$

Nem sempre a função integranda está na forma ideal para uma aplicação direta da regra, sendo normalmente necessário simplificá-la primeiro, para que seja possível calcular o integral. É o caso dos exemplos seguintes:

Exemplo 3 $\int(2x^3 - \frac{3}{x^4} + 5\sqrt{x})dx$.

Vamos começar por separar o integral anterior em três integrais, passando as respetivas constantes para fora, através da aplicação das Regras 1 e 2.

$$\int(2x^3 - \frac{3}{x^4} + 5\sqrt{x})dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int \frac{1}{x^4} dx + 5 \int \sqrt{x} dx.$$

Em seguida transformamos cada uma das funções integrandas numa potência de x :

$$\int(2x^3 - \frac{3}{x^4} + 5\sqrt{x})dx = 2 \int x^3 dx - 3 \int x^{-4} dx + 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx.$$

Por fim aplicamos a Regra 3 a cada um dos respetivos integrais

$$\begin{aligned} \int(2x^3 - \frac{3}{x^4} + 5\sqrt{x})dx &= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{1}{2}x^4 + x^{-3} + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{x^3} + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + c. \end{aligned}$$

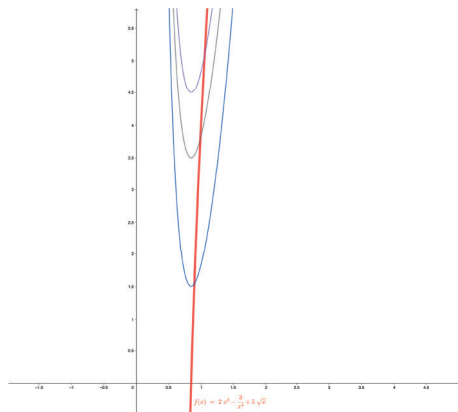


Figura 2.3: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 4 $\int(\frac{2}{x^2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x})dx$.

De forma análoga ao que foi feito no exemplo anterior, vamos em primeiro lugar separar o integral em dois integrais, em seguida transformar cada uma das funções integrandas numa potência de x (por aplicação das regras das potências) e aplicar a Regra 3 para calcular cada um dos integrais. Ora

$$\begin{aligned}
 \int \left(\frac{2}{x^2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x} \right) dx &= \int \frac{2}{x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} dx + \int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^1} dx \\
 &= 2 \int \frac{1}{x^{2+\frac{1}{2}}} dx + \int x^{\frac{1}{3}-1} dx \\
 &= 2 \int \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2 \int x^{-\frac{5}{2}} dx + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \\
 &= 2 \frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + c \\
 &= 2 \frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + 3\sqrt[3]{x} + c \\
 &= -\frac{4}{3x^{\frac{3}{2}}} + 3\sqrt[3]{x} + c \\
 &= -\frac{4}{3x\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x} + c.
 \end{aligned}$$

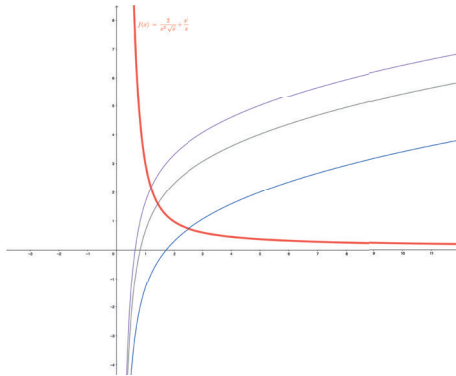


Figura 2.4: Família de primitivas de $f(x)$

2.2 Regras do logaritmo

Frequentemente quando a função integranda é um quociente entre duas funções, é possível obter no numerador a derivada do denominador. É sabido que a derivada do logaritmo de uma função é $(\log_a(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)}$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Assim:

Regra 4

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\ln(a)} dx = \log_a |f(x)| + c, a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

em que a função $f(x)$ está em módulo devido ao domínio do logaritmo.

Recordando o gráfico da função logaritmo, estamos no caso em que $a > 1$ e consequentemente a função é crescente em todo o seu domínio,

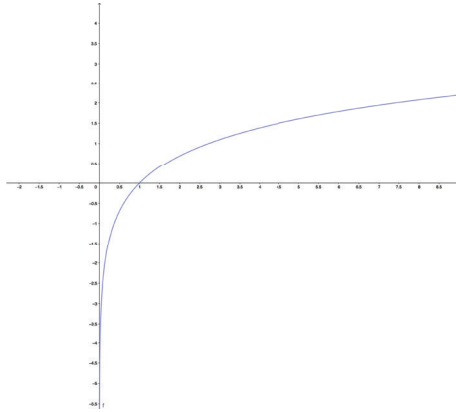


Figura 2.5: Gráfico da função $f(x) = \log_a(x)$ com $a > 1$

e o caso em que $0 < a < 1$, sendo a função decrescente em todo o seu domínio.

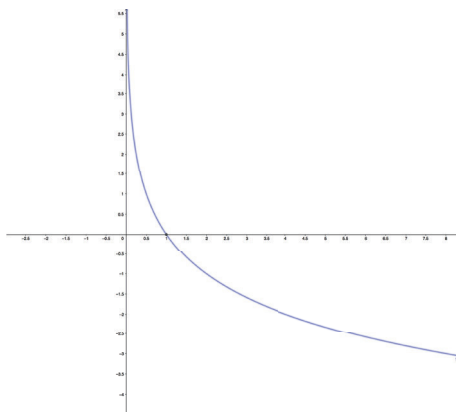


Figura 2.6: Gráfico da função $f(x) = \log_a(x)$ com $0 < a < 1$

É importante sublinhar que no caso particular da função $f(x) = \ln(x)$ (logaritmo neperiano de x), a Regra 4 fica com a forma:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

Exemplo 5 $\int \frac{1}{2x-1} dx$.

De forma a obtermos em numerador a derivada do denominador, é suficiente multiplicar e dividir o integral por dois. Aplicando a Regra 4, obtemos:

$$\int \frac{1}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x-1} dx = \frac{1}{2} \ln |2x-1| + c.$$

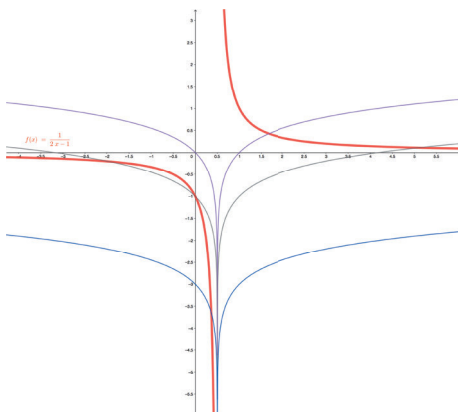


Figura 2.7: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 6 $\int \operatorname{tg} x dx$.

Como a tangente de x não é mais do que o quociente entre o seno de x e o cosseno de x , é possível aplicar a Regra 4, desde que se multiplique e divida por -1 , dado que $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$. Isto é,

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} dx = - \ln |\cos x| + c.$$

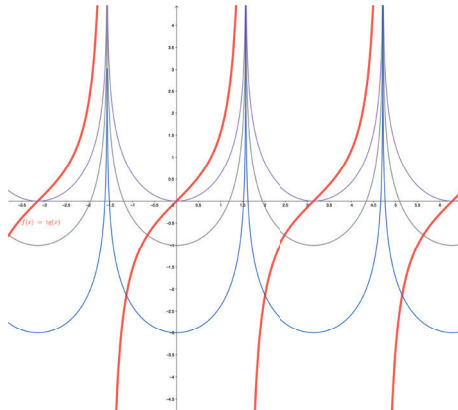


Figura 2.8: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 7 $\int \frac{3}{x \ln x} dx$.

Facilmente se pode observar que mudando a posição dos elementos na função integranda e passando a constante para fora, podemos aplicar a Regra 4. Isto é,

$$\int \frac{3}{x \ln x} dx = 3 \int \frac{1}{x \ln x} dx = 3 \ln |\ln x| + c.$$

2.3 Regras para potências de funções

Assim como a derivada da potência de uma função envolve a derivada da base, $[(f(x))^{n+1}]' = (n+1) \cdot (f(x))^n \cdot f'(x)$, a regra que permite calcular a primitiva de uma potência, necessariamente tem que contemplar esta mesma derivada, isto é,

Regra 5

$$\int f'(x) \cdot [f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

Exemplo 8 $\int x^2(x^3 - 2)^4 dx$.

Atendendo a que a derivada da base é $3x^2$, basta multiplicar e dividir por 3 para obtermos a função integranda na forma da Regra 5. Assim $f(x) = (x^3 - 2)$, $n = 4$ e $f'(x) = 3x^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \int x^2(x^3 - 2)^4 dx &= \frac{1}{3} \int 3x^2(x^3 - 2)^4 dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{(x^3 - 2)^{4+1}}{4+1} + c \\ &= \frac{(x^3 - 2)^5}{15} + c. \end{aligned}$$

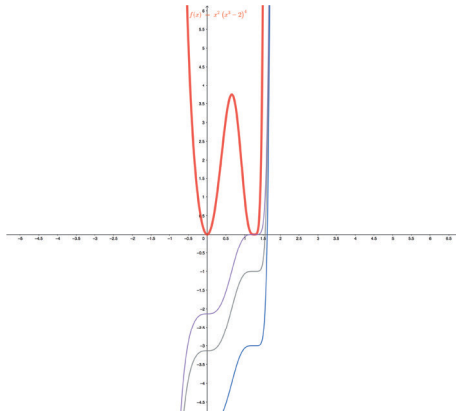


Figura 2.9: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 9 $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$.

Embora a função integranda seja um quociente, não é possível obter a derivada do denominador em numerador, como tal não podemos aplicar a Regra 4. Vamos sim transformar a raiz quadrada numa potência, multiplicar e dividir por dois (para obtermos a derivada da base), e aplicar a Regra 5. Isto é,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx &= \int \frac{x}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}} dx \\
 &= \int x(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int 2x(x^2+2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(x^2+2)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
 &= \sqrt{x^2+2} + c.
 \end{aligned}$$

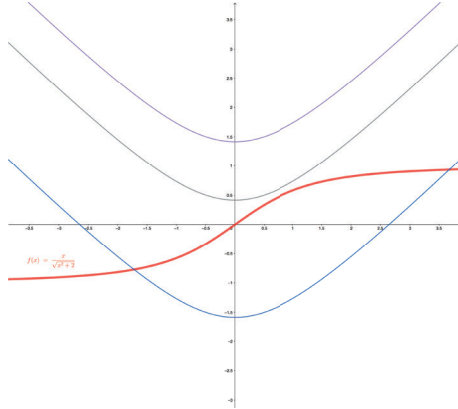


Figura 2.10: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 10 $\int \frac{\ln^2 x}{3x} dx$.

Começemos por passar a constante para fora do integral e em seguida vamos aplicar a Regra 5 dado que a derivada de $\ln x$ é $\frac{1}{x}$. Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^2 x}{3x} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{x} \ln^2 x dx \\ &= \frac{1}{3} \frac{\ln^{2+1} x}{2+1} + c \\ &= \frac{1}{9} \ln^3 x + c. \end{aligned}$$

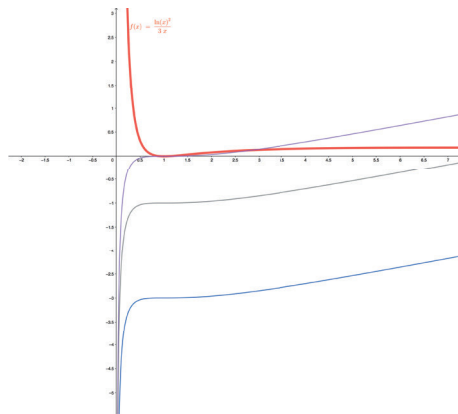


Figura 2.11: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 11 $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt[3]{2+tgx}} dx$.

Atendendo a que a derivada de $2 + tgx$ é $\frac{1}{\cos^2 x}$, vamos transformar a raiz cúbica numa potência e aplicar a Regra 5.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt[3]{2+tgx}} dx &= \int \frac{1}{\cos^2 x (2+tgx)^{\frac{1}{3}}} dx \\
 &= \int \frac{1}{\cos^2 x} (2 + tgx)^{-\frac{1}{3}} dx \\
 &= \frac{(2+tgx)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c \\
 &= \frac{(2+tgx)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c \\
 &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(2 + tgx)^2} + c.
 \end{aligned}$$

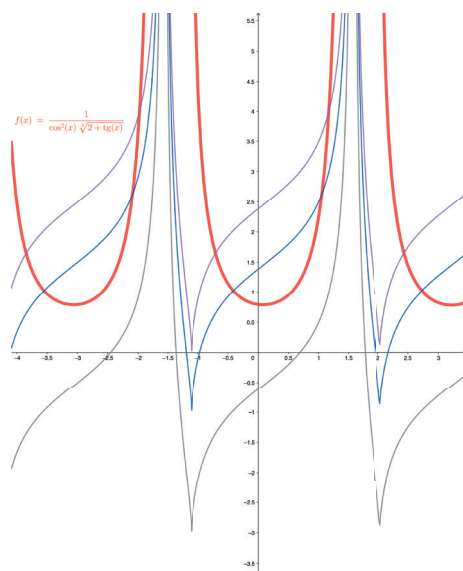


Figura 2.12: Família de primitivas de $f(x)$

2.4 Regras para a função exponencial

Uma função exponencial é uma função do tipo $y = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Esse tipo de funções tem um comportamento diferente no caso $0 < a < 1$ e no caso $a > 1$. No segundo caso ($a > 1$) a função é crescente (em particular acontece com a função $y = e^x$):

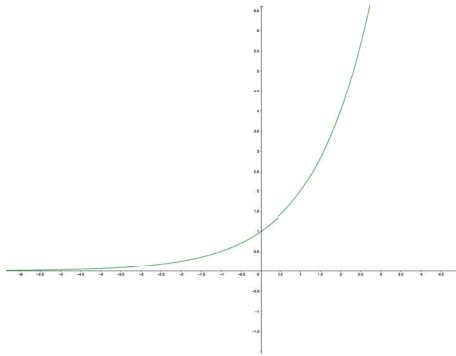


Figura 2.13: Gráfico da função $f(x) = a^x$, com $a > 1$

No caso em que $0 < a < 1$, a função é decrescente:

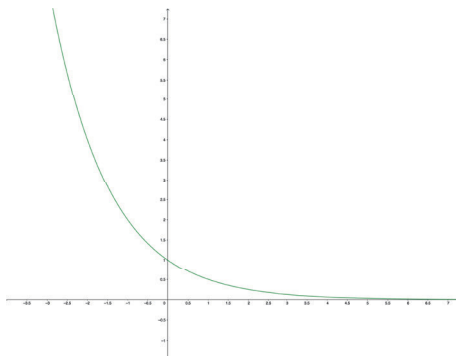


Figura 2.14: Gráfico da função $f(x) = a^x$, com $0 < a < 1$

Atendendo a derivada da função exponencial, facilmente se conclui que:

Regra 6

$$\int f'(x) \cdot a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + c, \text{ com } a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

No caso particular em que $a = e$:

Regra 7

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + c$$

Exemplo 12 $\int (x - 1)e^{x^2 - 2x} dx$.

Estamos perante uma primitiva de uma exponencial em que a base é e . Como a derivada do expoente é $2x - 2$, podemos multiplicar e dividir o integral por 2 e aplicar diretamente a Regra 6. Isto é,

$$\begin{aligned}\int (x - 1)e^{x^2 - 2x} dx &= \frac{1}{2} \int 2(x - 1)e^{x^2 - 2x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int (2x - 2)e^{x^2 - 2x} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2 - 2x} + c.\end{aligned}$$

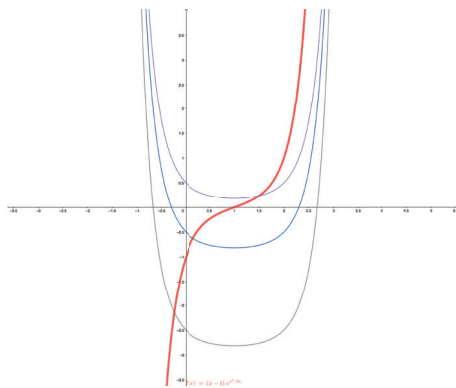


Figura 2.15: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 13 $\int \operatorname{sen}(2x) 5^{\cos^2 x} dx$.

A derivada do expoente é $(\cos^2 x)' = -2 \cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2x)$. Assim basta-nos multiplicar e dividir por -1 e aplicar a Regra 7, dado que a base não é e :

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(2x) 5^{\cos^2 x} dx &= - \int -\operatorname{sen}(2x) 5^{\cos^2 x} dx \\ &= \frac{5^{\cos^2 x}}{\ln 5} + c.\end{aligned}$$

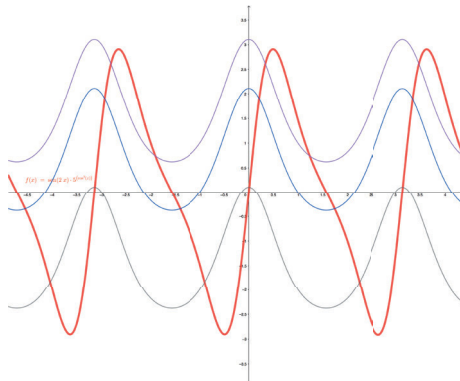


Figura 2.16: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 14 $\int x \cdot 3^{x^2} \cdot e^{x^2} dx$.

Nesse caso estamos perante o produto de duas exponenciais de bases diferentes e com o mesmo expoente. Aplicando a regra das potências podemos reescrever o integral da seguinte forma: $\int x \cdot (3e)^{x^2} dx$. Assim passamos a ter um integral de uma exponencial em que a base é diferente de e e cuja derivada do expoente é $2x$. Podemos aplicar a Regra 7 após multiplicarmos e dividirmos por 2:

$$\begin{aligned} \int x \cdot 3^{x^2} \cdot e^{x^2} dx &= \int x(3e)^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int 2x(3e)^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{(3e)^{x^2}}{\ln(3e)} + c. \end{aligned}$$

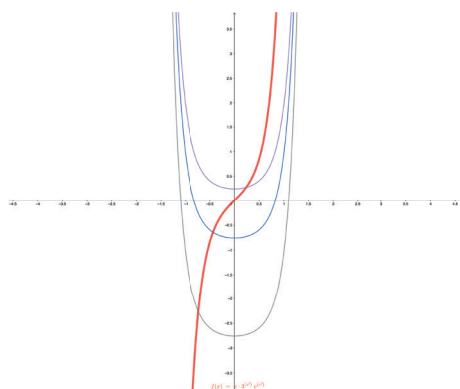


Figura 2.17: Família de primitivas de $f(x)$

2.5 Regras para funções trigonométricas

Das regras de derivação das funções trigonométricas não é difícil deduzir que:

Regra 8

$$\int f'(x) \cdot \text{sen}(f(x)) dx = -\cos(f(x)) + c$$

Regra 9

$$\int f'(x) \cdot \cos(f(x)) dx = \text{sen}(f(x)) + c$$

Regra 10

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} dx = \text{tg}(f(x)) + c$$

Regra 11

$$\int \frac{f'(x)}{\text{sen}^2(f(x))} dx = -\cot g(f(x)) + c$$

Exemplo 15 $\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx$.

Atendendo a que a derivada do logaritmo neperiano de x é $\frac{1}{x}$, reescrevendo a função integranda estamos em condições de aplicar a Regra 8.

$$\int \frac{\text{sen}(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \text{sen}(\ln x) dx = -\cos(\ln x) + c.$$

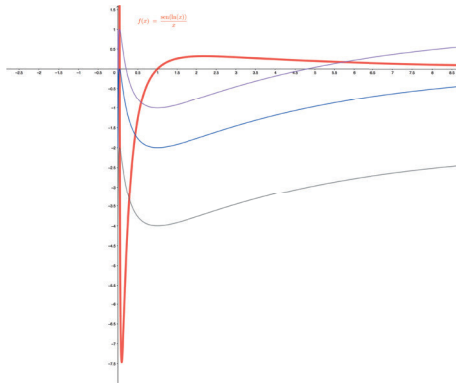


Figura 2.18: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 16 $\int x \cos(x^2 - 3) dx$.

Podemos aplicar a Regra 9 diretamente, desde que se multiplique e divida por dois, de modo a obtermos a derivada do argumento do cosseno. Isto é,

$$\int x \cos(x^2 - 3) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cos(x^2 - 3) dx = \frac{1}{2} \text{sen}(x^2 - 3) + c.$$

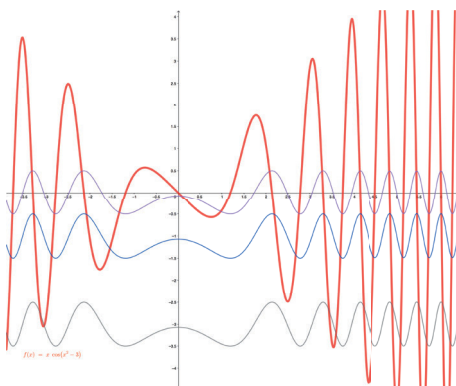


Figura 2.19: Família de primitivas de $f(x)$

2.6 Regras para potências de $\text{sen}x$ e $\text{cos}x$

Nesta secção vamos estudar os integrais de potências de $\text{sen}x$ e de $\text{cos}x$, isto é, integrais do tipo $\int \text{sen}^n(x) dx$ e $\int \text{cos}^n(x) dx$.

Nesse sentido vamos separar em dois casos distintos - o caso em que n é par e o caso em que n é ímpar.

Começemos pelo caso em que n é ímpar.

Suponhamos que pretendemos calcular o integral $\int \text{sen}^5(x)dx$. Ora no caso de uma potência ímpar podemos sempre isolar um dos fatores, nesse caso $\text{sen}x$, sobrando uma potência par:

$$\text{sen}^5 x = \text{sen}x.\text{sen}^4 x = \text{sen}x.(\text{sen}^2 x)^2.$$

Em seguida aplica-se a fórmula fundamental da trigonometria a $\text{sen}^2 x$.

$$\text{sen}^5 x = \text{sen}x.(1 - \cos^2 x)^2$$

Desenvolvendo o caso notável e aplicando distributivas, obtemos a expressão

$$\text{sen}^5 x = \text{sen}x - 2\text{sen}x.\cos^2 x + \text{sen}x.\cos^4 x.$$

Assim

$$\int \text{sen}^5(x)dx = \int \text{sen}x dx - 2 \int \text{sen}x.\cos^2 x dx + \int \text{sen}x.\cos^4 x dx,$$

sendo todos esses integrais imediatos. No segundo e no terceiro integral, e atendendo a que a derivada de $\cos x$ é $-\text{sen}x$, podemos aplicar a regra da potência e finalmente obtemos:

$$\int \text{sen}^5(x)dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c,$$

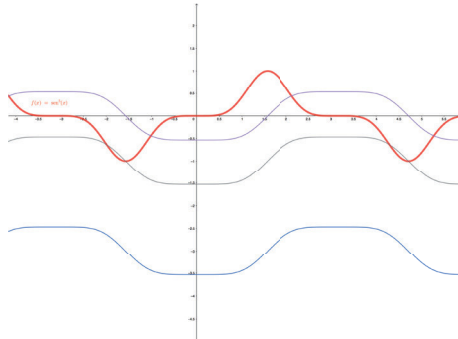


Figura 2.20: Família de primitivas de $f(x)$

Genericamente, sendo n ímpar podemos concluir, aplicando o binómio de Newton, que:

$$\begin{aligned} \text{sen}^n x &= \text{sen}x.\text{sen}^{n-1}x \\ &= \text{sen}x(\text{sen}^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= \text{sen}x(1 - \cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \\ &= \text{sen}x(1 + \dots - \frac{n-1}{2}\cos^{n-3}x + \cos^{n-1}x) \end{aligned}$$

que separando a expressão numa soma de integrais, e aplicando a regra da potência, obtemos o integral desejado, isto é:

$$\int \operatorname{sen}^n(x) dx = -\operatorname{cos} x + \dots + \frac{n-1}{2(n-2)} \operatorname{cos}^{n-2} x - \frac{1}{n} \operatorname{cos}^n x + c$$

No caso de uma potência ímpar de $\operatorname{cos} x$ os cálculos são análogos.

Consideremos agora o caso em que n é par. O processo de cálculo do integral é diferente. Começemos por deduzir fórmulas para $\operatorname{sen}^2 x$ e $\operatorname{cos}^2 x$.

Ora

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(2x) &= \operatorname{cos}^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= \operatorname{cos}^2 x - (1 - \operatorname{cos}^2 x) \\ &= 2\operatorname{cos}^2 x - 1. \end{aligned}$$

Logo

$$\operatorname{cos}^2 x = \frac{1 + \operatorname{cos}(2x)}{2} \quad (i).$$

Analogamente pode-se concluir que:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \operatorname{cos}(2x)}{2}.$$

Suponhamos agora que pretendemos calcular o integral $\int \operatorname{cos}^4(x) dx$.

$$\operatorname{cos}^4 x = (\operatorname{cos}^2 x)^2 = \left(\frac{1 + \operatorname{cos}(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\operatorname{cos}(2x) + \operatorname{cos}^2(2x)}{4}.$$

Atendendo a que, por (i)

$$\operatorname{cos}^2(2x) = \frac{1 + \operatorname{cos}(4x)}{2},$$

obtemos

$$\operatorname{cos}^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \operatorname{cos}(2x) + \frac{1}{8} \operatorname{cos}(4x).$$

Substituindo no integral inicial, obtemos apenas primitivas imediatas. Assim:

$$\int \operatorname{cos}^4(x) dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + c$$

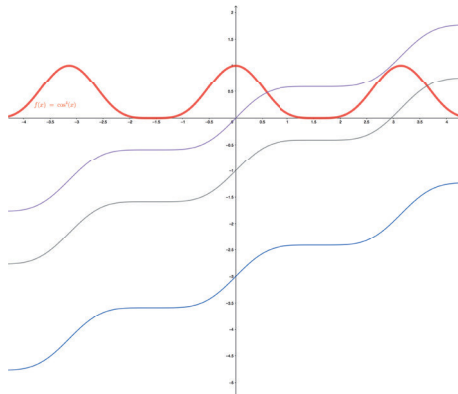


Figura 2.21: Família de primitivas de $f(x)$

Genericamente, para n par:

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \left[1 + \frac{n}{2} \cos(2x) + \frac{n(n-2)}{8} \cos^2(2x) + \dots + \cos^{\frac{n}{2}}(2x) \right]$$

Para calcular o integral de $\cos^n(x)$ em primeiro lugar transformamos numa soma de integrais, os que têm potências ímpares de $\cos(2x)$ são resolvidos pelo método anterior, e para os que têm potências pares, usa-se a fórmula (i) tantas vezes quantas as necessárias. No caso $\sin^n(x)$ procede-se de forma análoga.

2.7 Regras para inversas de funções trigonométricas

Recordemos os gráficos das funções $\arcsen x$ e $\arctg x$:

$$\begin{array}{lcl} \arcsen : & [-1, 1] & \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ & x & \rightarrow \arcsen x \end{array}$$

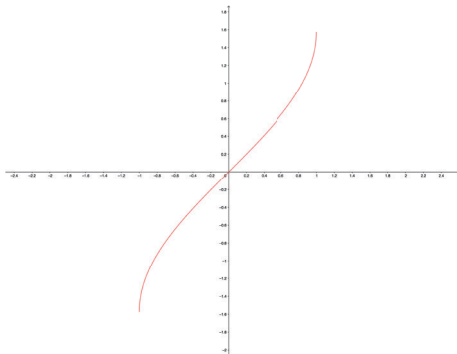


Figura 2.22: Gráfico da função $f(x) = \arcsen x$

$$\begin{array}{lcl} \arctg : & \mathbb{R} & \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ & x & \rightarrow \arctg x \end{array}$$

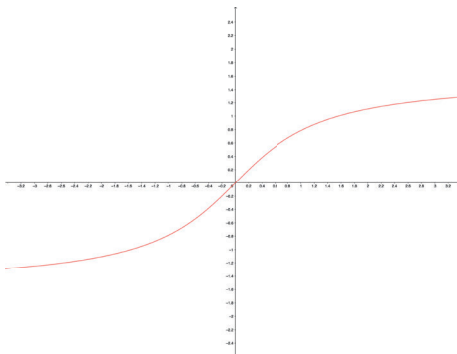


Figura 2.23: Gráfico da função $f(x) = \arctg x$

Das regras de derivação destas funções podemos deduzir que:

Regra 12

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}} dx = \arcsen(f(x)) + c$$

Regra 13

$$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \operatorname{arctg}(f(x)) + c$$

Exemplo 17 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-7x^2}}$.

Para aplicarmos a Regra 12 é necessário, em primeiro lugar, escrever $7x^2$ como $(\sqrt{7}x)^2$, e em seguida multiplicar e dividir pela derivada de $\sqrt{7}x$. Isto é,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-7x^2}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{7}x)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{1-(\sqrt{7}x)^2}} dx \\ &= \frac{\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg}(\sqrt{7}x) + c. \end{aligned}$$

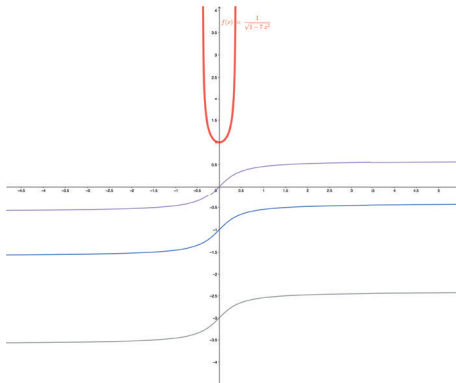


Figura 2.24: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 18 $\int \frac{dx}{4+9x^2}$.

Vamos colocar quatro em evidência em denominador, reescrever a expressão obtida, multiplicar e dividir pela derivada da função e aplicar a Regra 13:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4+9x^2} &= \int \frac{dx}{4(1+\frac{9}{4}x^2)} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{1+(\frac{3}{2}x)^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \int \frac{\frac{3}{2}}{1+(\frac{3}{2}x)^2} dx \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg}(\frac{3}{2}x) + c \end{aligned}$$

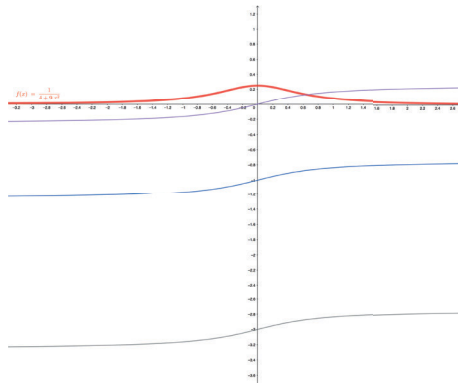


Figura 2.25: Família de primitivas de $f(x)$

Capítulo 3

Primitivação por partes

Como foi referido anteriormente, o integral do produto não é igual ao produto dos integrais das funções integrandas. Existe uma regra prática que permite, em muitos casos, calcular o integral do produto de funções. Esta regra denomina-se por **Primitivação por partes** (PPP):

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g, \text{ com } f \text{ e } g \text{ funções.}$$

A escolha de f e g' deve ser feita de forma a que o integral resultante no 2º membro da igualdade seja mais simples do que o inicial. Para uma escolha eficiente, é importante ter em atenção as seguintes regras:

- 1 - g' é a função que se conhece uma primitiva.
- 2 - No caso de serem conhecidas as primitivas das duas funções, f é a função que fica "mais simples" quando se calcula a sua derivada.

Observemos os seguintes exemplos:

Exemplo 19 $\int x e^x dx$.

Ora são conhecidas primitivas para as duas funções, pois $\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$ e $\int e^x dx = e^x + c$. Assim f terá de ser a função que fica "mais simples" quando se deriva. Como a derivada de e^x é na mesma e^x , a escolha terá que ser necessariamente a seguinte:

$$\begin{aligned} g' &= e^x & g &= \int e^x dx = e^x \\ f &= x & f' &= 1 \end{aligned}$$

Aplicando a regra:

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c.\end{aligned}$$

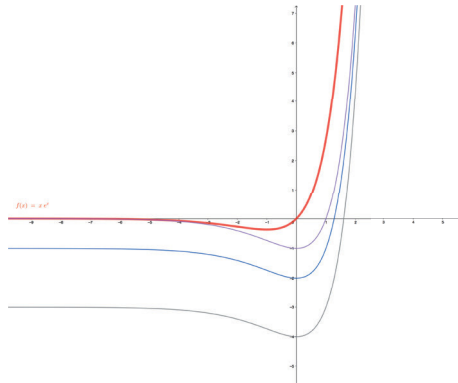


Figura 3.1: Família de primitivas de $f(x)$

É importante ter em atenção que esta regra pode ser utilizada diversas vezes num mesmo integral. Senão vejamos:

Exemplo 20 $\int x^3 e^{-x} dx$.

Pelos motivos apresentados no exemplo anterior, a escolha é necessariamente a seguinte:

$$\begin{aligned}g' &= e^{-x} & g &= \int e^{-x} dx = -e^{-x} \\ f &= x^3 & f' &= 3x^2\end{aligned}$$

Obtemos então

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x} dx &= -x^3 e^{-x} - \int -3x^2 \cdot e^{-x} dx \\ &= x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 \cdot e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Aplicando novamente a regra consideramos:

$$\begin{aligned}g' &= e^{-x} & g &= \int e^{-x} dx = -e^{-x} \\ f &= x^2 & f' &= 2x\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x} dx &= -x^3 e^{-x} + 3 \int x^2 \cdot e^{-x} dx \\ &= -x^3 e^{-x} + 3(-x^2 e^{-x} - \int -2x \cdot e^{-x} dx) \\ &= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6 \int x \cdot e^{-x} dx\end{aligned}$$

Aplicando ainda mais uma vez a regra da primitivação por partes para:

$$\begin{aligned}g' &= e^{-x} & g &= \int e^{-x} dx = -e^{-x} \\ f &= x & f' &= 1\end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{-x} dx &= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6 \int x \cdot e^{-x} dx \\ &= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} + 6(-x e^{-x} - \int -e^{-x} dx) \\ &= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6x e^{-x} + 6e^{-x} + c.\end{aligned}$$

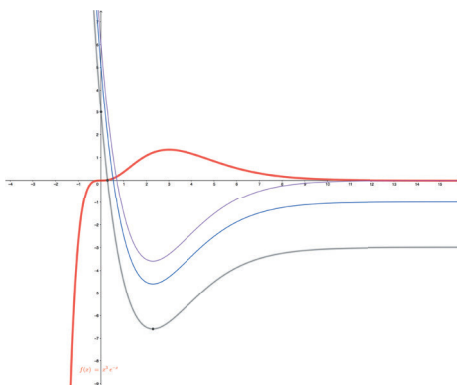


Figura 3.2: Família de primitivas de $f(x)$

Existem determinadas primitivas que é aconselhável calcular por esse método, mesmo quando não obtemos um produto na função integranda. é o caso de $\ln x$ ou de $\arctg x$ por exemplo.

Exemplo 21 $\int \ln x dx$.

Atendendo a que $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$, podemos usar a primitivação por partes desde que se considere $g' = 1$. Assim

$$\begin{aligned}
 g' &= 1 & g &= \int 1 dx = x \\
 f &= \ln x & f' &= \frac{1}{x}
 \end{aligned}$$

Desta forma obtemos

$$\begin{aligned}
 \int 1 \cdot \ln x dx &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= x \ln x - x + c.
 \end{aligned}$$

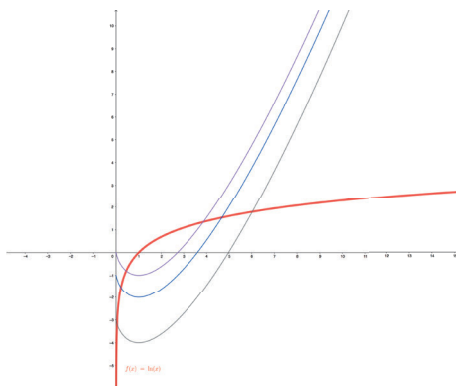


Figura 3.3: Família de primitivas de $f(x)$

Existe ainda outro caso importante de destacar:

Exemplo 22 $\int e^x \operatorname{sen} x dx$.

Nesse exemplo conhecemos a primitiva de ambas as funções e nenhuma delas fica "mais simples" quando se deriva, como tal a função f pode ser qualquer uma das duas funções. Podemos considerar, por exemplo

$$\begin{aligned}
 g' &= e^x & g &= \int e^x dx = e^x \\
 f &= \operatorname{sen} x & f' &= \cos x
 \end{aligned}$$

Aplicando o método,

$$\int e^x \operatorname{sen} x dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x dx.$$

Vamos aplicar novamente a primitivação por partes, considerando

$$g' = e^x \quad g = \int e^x dx = e^x$$

$$f = \cos x \quad f' = -\operatorname{sen}x$$

Assim

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen}x dx &= e^x \operatorname{sen}x - \int e^x \cos x dx \\ &= e^x \operatorname{sen}x - (e^x \cos x - \int -e^x \operatorname{sen}x dx) \\ &= e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen}x dx \end{aligned}$$

que, como se pode observar, é exatamente a mesma expressão do integral inicial. Para resolver esse problema, basta resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int e^x \operatorname{sen}x dx &= e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen}x dx \\ \Leftrightarrow 2 \int e^x \operatorname{sen}x dx &= e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x \\ \Leftrightarrow \int e^x \operatorname{sen}x dx &= \frac{e^x \operatorname{sen}x - e^x \cos x}{2} + c \end{aligned}$$

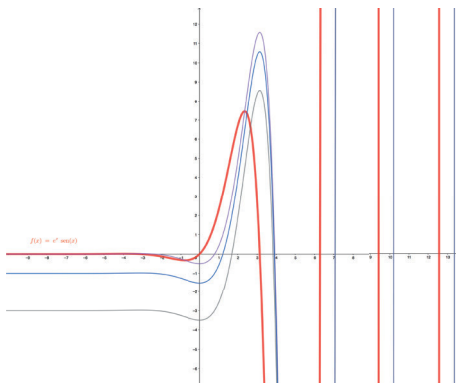


Figura 3.4: Família de primitivas de $f(x)$

Por último consideremos o exemplo seguinte:

Exemplo 23 $\int x^3 e^{x^2} dx$.

A primitiva de e^{x^2} não é conhecida, assim a escolha deveria ser

$$g' = x^3 \quad g = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$$

$$f = e^{x^2} \quad f' = 2xe^{x^2}$$

o que, aplicando o método, nos conduz a

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{x^4}{4} e^{x^2} - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2x e^{x^2} dx \\ &= \frac{x^4}{4} e^{x^2} - \frac{1}{2} \int x^5 e^{x^2} dx.\end{aligned}$$

Como se pode observar, o grau do polinómio da função integranda aumentou (quando devia diminuir), dificultando a resolução do mesmo. Isto significa que fizemos a escolha errada das funções. Mas e^{x^2} não pode ser g' porque a sua primitiva não é conhecida. Então como resolver esse problema?

Embora tenhamos um produto de funções no integral, não é obrigatório que uma delas seja f e a outra g' , pois podemos alterar a função integranda por forma a conseguirmos funções que nos sejam úteis para a aplicação do método.

Assim

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2} dx &= \int x^2 \cdot x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot 2x e^{x^2} dx\end{aligned}$$

Consideremos

$$\begin{aligned}g' &= 2x e^{x^2} & g &= \int 2x e^{x^2} dx = e^{x^2} \\ f &= x^2 & f' &= 2x\end{aligned}$$

Aplicando o método de primitivação por partes, obtemos

$$\begin{aligned}\int x^3 e^{x^2} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \cdot 2x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2 e^{x^2} - \int 2x e^{x^2} dx) \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c.\end{aligned}$$

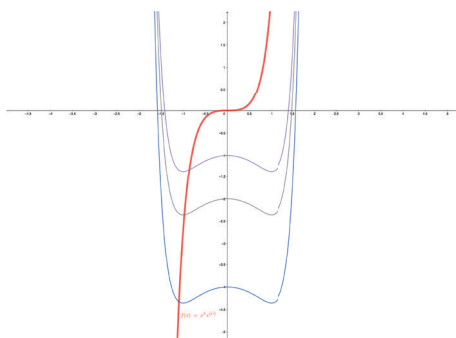


Figura 3.5: Família de primitivas de $f(x)$

Capítulo 4

Primitivas de funções racionais

Uma função racional é uma função do tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ em que $p(x)$ e $q(x)$ são polinómios. Para calcular a primitiva de funções desse tipo vamos dividir em vários casos que têm a ver com o facto do denominador possuir raízes reais (simples ou múltiplas) ou não.

Vamos começar por explorar o caso particular em que o numerador é 1 e o denominador é um polinómio do segundo grau sem raízes reais, isto é , primitivas do tipo $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$, com $b^2 - 4ac < 0$.

Exemplo 24 $\int \frac{1}{x^2+3x+5} dx$.

De facto, aplicando a fórmula resolvente, constatamos que o polinómio do denominador não admite raízes reais. Nesse caso transforma-se o integral na forma $\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2} dx = \text{arctg}(f(x)) + c$. (Regra 13)

Começemos por efetuar uns cálculos auxiliares considerando apenas o denominador:

$$\begin{aligned}x^2 + 3x + 5 &= (x^2 + 3x) + 5 \\&= [x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2] + 5 \\&= [x^2 + 3x + (\frac{3}{2})^2] - (\frac{3}{2})^2 + 5 \\&= (x + \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 5 \\&= (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{11}{4} \\&= \frac{11}{4} [\frac{(x+\frac{3}{2})^2}{\frac{11}{4}} + 1] \\&= \frac{11}{4} [\frac{4}{11} (x + \frac{3}{2})^2 + 1] \\&= \frac{11}{4} [(\frac{2x}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}})^2 + 1].\end{aligned}$$

Isto é, considerando apenas as parcelas que contêm x , adiciona-se e subtrai-se o quadrado da metade do coeficiente do termo em x . Associando a parte positiva desse elemento aos termos em x obtém-se um caso notável. Em seguida coloca-se em evidência o elemento que sobra (nesse caso $\frac{11}{4}$).

Substituindo esse denominador no integral inicial, multiplicando e dividindo pela derivada da função e aplicando a Regra 13, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2+3x+5} dx &= \int \frac{1}{\frac{11}{4}[(\frac{2x}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}})^2+1]} dx \\ &= \frac{4}{11} \int \frac{1}{(\frac{2x}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}})^2+1} dx \\ &= \frac{4}{11} \frac{\sqrt{11}}{2} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{(\frac{2x}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}})^2+1} dx \\ &= \frac{2\sqrt{11}}{11} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{11}}}{(\frac{2x}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}})^2+1} dx \\ &= \frac{2\sqrt{11}}{11} \operatorname{arctg}(\frac{2x}{\sqrt{11}} + \frac{3}{\sqrt{11}}) + c. \end{aligned}$$

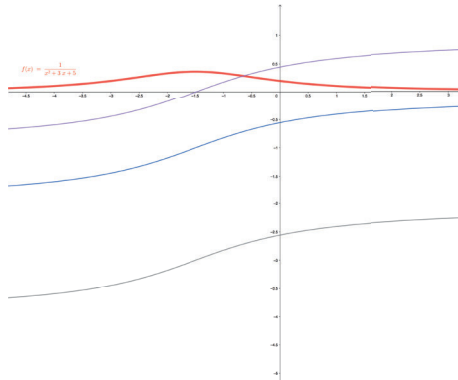


Figura 4.1: Família de primitivas de $f(x)$

No caso do coeficiente de x^2 não ser 1, embora o processo de resolução seja análogo, é necessário ter atenção à decomposição do polinómio.

Exemplo 25 $\int \frac{1}{2x^2-x+1} dx$.

Novamente o denominador não admite raízes reais e como tal vamos transformar a função integranda para podermos aplicar a Regra 13.

$$\begin{aligned}
2x^2 - x + 1 &= 2(x^2 - \frac{1}{2}x) + 1 \\
&= 2[x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2] + 1 \\
&= 2[x^2 - \frac{1}{2}x + (\frac{1}{4})^2] - 2(\frac{1}{4})^2 + 1 \\
&= 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{2}{16} + 1 \\
&= 2(x - \frac{1}{4})^2 + \frac{14}{16} \\
&= \frac{7}{8}[\frac{2(x-\frac{1}{4})^2}{\frac{8}{8}} + 1] \\
&= \frac{7}{8}[\frac{16}{7}(x - \frac{1}{4})^2 + 1] \\
&= \frac{7}{8}[(\frac{4x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1]
\end{aligned}$$

Substituindo no integral inicial,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{2x^2 - x + 1} dx &= \int \frac{1}{\frac{7}{8}[(\frac{4x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1]} dx \\
&= \frac{8}{7} \int \frac{1}{(\frac{4x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1} dx \\
&= \frac{8}{7} \frac{\sqrt{7}}{4} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{(\frac{4x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1} dx \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7} \int \frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{(\frac{4x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}})^2 + 1} dx \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg}(\frac{4x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{7}}) + c.
\end{aligned}$$

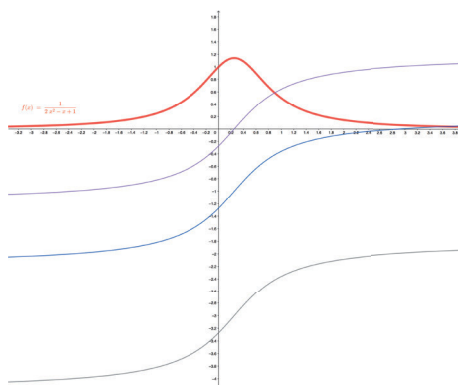


Figura 4.2: Família de primitivas de $f(x)$

4.1 Raízes reais simples

Vamos estudar o caso em que obtemos uma função racional na qual denominador admite raízes reais simples. Isto é, obtemos uma função do tipo $\frac{p(x)}{q(x)}$ na qual o denominador pode ser decomposto num produto de polinómios do 1º grau, $q(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$, onde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são os zeros do polinómio $q(x)$.

Vamos começar por considerar, por uma questão de facilidade, que o grau do polinómio do numerador (grau de $p(x)$) é inferior ao grau do polinómio do denominador (grau de $q(x)$). Depois de explorarmos esse caso iremos verificar como se procede quando o grau de $p(x) \geq$ grau de $q(x)$.

Suponhamos então que grau de $p(x) <$ grau de $q(x)$. Existem dois métodos que nos permitem calcular $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$.

1. Método dos coeficientes indeterminados

Esse método consiste em transformar a função integranda $\frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n)}$ numa soma de n frações em que cada uma delas contém em denominador um factor da decomposição, isto é

$$\frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)} = \frac{1}{a} \left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \frac{A_3}{x-\alpha_3} \dots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \right). \quad (i)$$

Determinando o valor de cada um dos $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, e usando o facto do integral da soma ser a soma dos integrais, facilmente se calcula o integral pedido. Esse método por vezes pode dar origem a muitos cálculos, contudo pode ser usado em qualquer função racional, com grau de $p(x) <$ grau de $q(x)$, independentemente do denominador admitir apenas raízes reais ou não.

2. Regra do "tapa"

Esta regra permite calcular directamente os valores dos $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, da decomposição anterior (i), da seguinte forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{p(x)}{a(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)} \right]_{x=\alpha_1} \\ A_2 &= \left[\frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)\dots(x-\alpha_n)} \right]_{x=\alpha_2} \\ &\vdots \\ A_n &= \left[\frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_{n-1})} \right]_{x=\alpha_n} \end{aligned}$$

isto é, cada $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, é obtido "tapando" (eliminando) o denominador correspondente a A_i (ou seja $(x - \alpha_i)$) na decomposição, e substituindo, em todos os elementos que sobram, x por α_i .

É uma regra prática, bastante simples de utilizar e que permite calcular rapidamente os valores das constantes na decomposição. Pode ser utilizada em todas as funções racionais em que o denominador admita apenas raízes reais simples.

Exemplo 26 $\int \frac{x+5}{x^2-3x+2} dx$.

Temos uma função racional para a qual o grau do polinómio do numerador é menor do que o grau do polinómio do denominador. Igualando a zero o denominador, e aplicando a fórmula resolvente, facilmente se conclui que esse admite duas raízes reais simples que são $x = 1$ e $x = 2$. Consequentemente o denominador pode ser decomposto num produto de polinómios do primeiro grau:

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Na cálculo do integral vamos aplicar os dois métodos descritos atrás para ilustrar as diferenças entre ambos.

Método dos coeficientes indeterminados

Começemos por decompor a fração em duas frações, reduzi-las ao mesmo denominador e associar os termos semelhantes no numerador:

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x^2-3x+2} &= \frac{x+5}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{Ax-A+Bx-2B}{(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{(A+B)x+(-A-2B)}{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

A fração obtida é igual à inicial, como o denominador é comum, também terá de o ser o numerador. Assim temos apenas que igualar os coeficientes dos termos semelhantes para obtermos os valores de A e B .

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -A - 2B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 7 \\ B = -6 \end{cases} .$$

Voltando à decomposição anterior

$$\begin{aligned} \frac{x+5}{x^2-3x+2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{7}{x-2} - \frac{6}{x-1} \end{aligned}$$

Como o integral da soma é a soma dos integrais, aplicando a Regra 4:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2-3x+2} dx &= \int \left(\frac{7}{x-2} - \frac{6}{x-1} \right) dx \\ &= \int \frac{7}{x-2} dx - \int \frac{6}{x-1} dx \\ &= 7 \int \frac{1}{x-2} dx - 6 \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= 7 \ln |x-2| - 6 \ln |x-1| + c. \end{aligned}$$

Regra do "tapa"

Resolvendo o mesmo exercício e utilizando a decomposição feita atrás,

$$\frac{x+5}{x^2-3x+2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1},$$

a regra diz-nos que

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{x+5}{x-1} \right]_{x=2} = 7 \\ B &= \left[\frac{x+5}{x-2} \right]_{x=1} = -6 \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x+5}{x^2-3x+2} dx &= 7 \int \frac{1}{x-2} dx - 6 \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= 7 \ln |x-2| - 6 \ln |x-1| + c. \end{aligned}$$

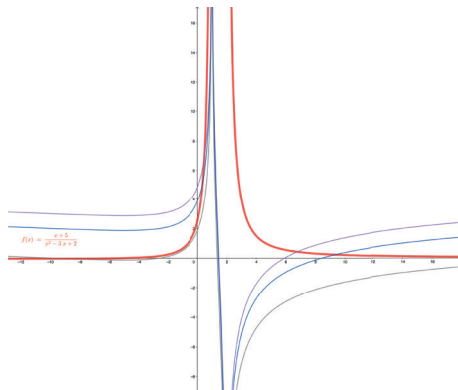


Figura 4.3: Família de primitivas de $f(x)$

Como se pode observar nesse exemplo, a regra do "tapa" permite-nos calcular o valor das constantes de uma forma bastante mais rápida do que o método dos coeficientes indeterminados.

4.2 Raízes reais múltiplas

Suponhamos agora que o polinómio do denominador admite raízes reais múltiplas, isto é,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}}.$$

Nesse caso podemos ainda aplicar os dois métodos para decompor o quociente numa soma de frações. Contudo, esta decomposição é feita de forma diferente do caso das raízes reais simples, e a própria regra do "tapa" é aplicada de forma diferente. Começemos pela decomposição:

$$\frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}} = \frac{1}{a} \left[\left(\frac{A_1^1}{(x-\alpha_1)^{p_1}} + \frac{A_2^1}{(x-\alpha_1)^{p_1-1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{x-\alpha_1} \right) + \left(\frac{A_1^2}{(x-\alpha_2)^{p_2}} + \frac{A_2^2}{(x-\alpha_2)^{p_2-1}} + \dots + \frac{A_{p_2}^2}{x-\alpha_2} \right) + \dots + \left(\frac{A_1^n}{(x-\alpha_n)^{p_n}} + \frac{A_2^n}{(x-\alpha_n)^{p_n-1}} + \dots + \frac{A_{p_n}^n}{x-\alpha_n} \right) \right] \quad (ii)$$

Calculando o valor das constantes $A_1^1, A_2^1, \dots, A_{p_n}^n$, facilmente obtemos o valor do integral.

Método dos coeficientes indeterminados

Reduz-se ao mesmo denominador o segundo membro da igualdade (ii), sendo que o mínimo múltiplo comum é sempre $a(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}$. Forma-se um sistema igualando os coeficientes dos termos semelhantes do numerador e aplica-se integrais.

Regra do "tapa"

No caso das raízes reais múltiplas a regra do "tapa" aplica-se de forma diferente, com recurso a derivadas:

$$\begin{aligned} A_1^1 &= \left[\frac{p(x)}{a(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}} \right]_{x=\alpha_1} \\ A_2^1 &= \frac{1}{1!} \left[\left(\frac{p(x)}{a(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}} \right)' \right]_{x=\alpha_1} \\ A_3^1 &= \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{p(x)}{a(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}} \right)'' \right]_{x=\alpha_1} \\ &\vdots \\ A_{p_1}^1 &= \frac{1}{(p_1-1)!} \left[\left(\frac{p(x)}{a(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_n)^{p_n}} \right)^{(p_1-1)} \right]_{x=\alpha_1} \\ &\vdots \\ A_{p_n}^n &= \frac{1}{(p_n-1)!} \left[\left(\frac{p(x)}{a(x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{p_{n-1}}} \right)^{(p_n-1)} \right]_{x=\alpha_n} \end{aligned}$$

Veamos um exemplo prático.

Exemplo 27 $\int \frac{x-1}{x^2(x-2)^3} dx$

Começemos por decompor o denominador:

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_1}{(x-2)^3} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{x-2}.$$

Método dos coeficientes indeterminados

Atendendo a que o mínimo múltiplo comum entre as parcelas do segundo membro é $x^2(x-2)^3$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x^2(x-2)^3} &= \frac{A_1(x-2)^3 + A_2x(x-2)^3 + B_1x^2 + B_2(x-2)x^2 + B_3(x-2)^2x^2}{x^2(x-2)^3} \\ &= \frac{K_1x^4 + K_2x^3 + K_3x^2 + K_4}{x^2(x-2)^3}, \end{aligned}$$

com $K_1 = A_2 + B_3$, $K_2 = -6A_2 + B_2 - 4B_3$, $K_3 = -6A_1 + 12A_2 + B_1 - 2B_2 + 4B_3$, $K_4 = 12A_1 - 8A_2$ e $K_5 = -8A_1$.

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes do numerador, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A_2 + B_3 & = 0 \\ -6A_2 + B_2 - 4B_3 & = 0 \\ -6A_1 + 12A_2 + B_1 - 2B_2 + 4B_3 & = 0 \\ 12A_1 - 8A_2 & = 1 \\ -8A_1 & = -1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema obtemos, $A_1 = \frac{1}{8}$, $A_2 = \frac{1}{16}$, $B_1 = \frac{1}{4}$, $B_2 = 0$, $B_3 = -\frac{1}{16}$.

Substituindo na decomposição considerada e aplicando integrais, obtemos

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{1}{8} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{-1}{16} \frac{1}{x-2}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2(x-2)^3} dx &= \frac{1}{8} \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{16} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x-2)^3} dx - \frac{1}{16} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= \frac{1}{8} \int x^{-2} dx + \frac{1}{16} \ln|x| + \frac{1}{4} \int (x-2)^{-3} dx - \frac{1}{16} \ln|x-2| \\ &= \frac{1}{8} \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{16} \ln|x| + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^{-2}}{-2} - \frac{1}{16} \ln|x-2| + c \\ &= -\frac{1}{8x} + \frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{8(x-2)^2} - \frac{1}{16} \ln|x-2| + c \end{aligned}$$

Regra do "tapa"

Considerando ainda a decomposição

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{B_1}{(x-2)^3} + \frac{B_2}{(x-2)^2} + \frac{B_3}{x-2}$$

a regra diz-nos que

$$\begin{aligned} A_1 &= \left[\frac{x-1}{(x-2)^3} \right]_{x=0} = \frac{1}{8} \\ A_2 &= \frac{1}{1!} \left[\left(\frac{x-1}{(x-2)^3} \right)' \right]_{x=0} = \left[\frac{-2x+1}{(x-2)^4} \right]_{x=0} = \frac{1}{16} \\ B_1 &= \left[\frac{x-1}{x^2} \right]_{x=2} = \frac{1}{4} \\ B_2 &= \frac{1}{1!} \left[\left(\frac{x-1}{x^2} \right)' \right]_{x=2} = \left[\frac{-x+2}{x^3} \right]_{x=2} = 0 \\ B_3 &= \frac{1}{2!} \left[\left(\frac{x-1}{x^2} \right)'' \right]_{x=2} = \frac{1}{2} \left[\frac{2x-6}{x^4} \right]_{x=2} = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

Assim

$$\int \frac{x-1}{x^2(x-2)^3} dx = -\frac{1}{8x} + \frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{8(x-2)^2} - \frac{1}{16} \ln|x-2| + c$$

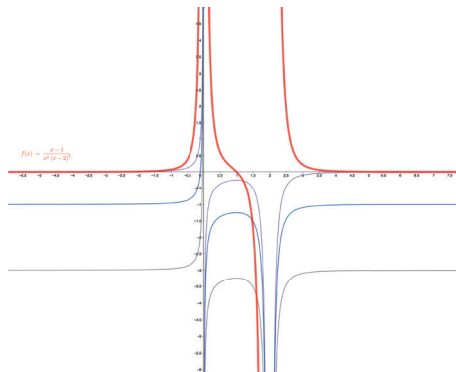


Figura 4.4: Família de primitivas de $f(x)$

4.3 Raízes complexas

No caso do denominador conter polinómios com raízes complexas simples, a decomposição é um pouco diferente pois no numerador deve constar um polinómio de grau abaixo do denominador, isto é de grau 1, e a resolução deve ser feita através do método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 28 $\int \frac{1}{x^3+x^2} dx$

Decompondo o denominador num produto de fatores, $x^3 + x^2 = x(x^2 + 1)$. Desse modo obtemos uma raiz real $x = 0$ e duas raízes complexas $x = \pm i$.

A decomposição fica com a seguinte forma:

$$\frac{1}{x^3+x^2} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Aplicando o método dos coeficientes indeterminados obtemos:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Igualando os coeficientes facilmente se conclui que $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$.

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^3+x^2} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c. \end{aligned}$$

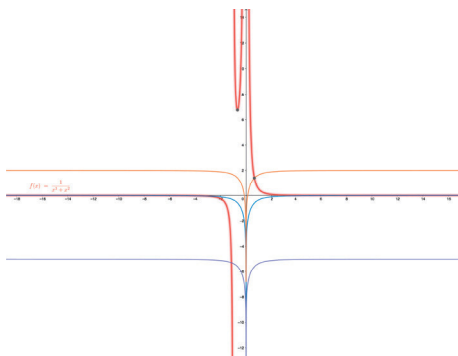


Figura 4.5: Família de primitivas de $f(x)$

No caso do denominador conter raízes complexas múltiplas, procede-se de forma análoga ao caso das raízes reais múltiplas, usando-se também para esse caso o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 29 $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+2)^3} dx$

O denominador é formado por um produto de dois polinômios do segundo grau, ambos sem raízes reais. A decomposição, atendendo a que temos raízes complexas múltiplas, tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)^2(x^2+2)^3} = \frac{A_0x+B_0}{(x^2+x+1)^2} + \frac{A_1x+B_1}{x^2+x+1} + \frac{C_0x+D_0}{(x^2+2)^3} + \frac{C_1x+D_1}{(x^2+2)^2} + \frac{C_2x+D_2}{x^2+2}.$$

A aplicação do método dos coeficientes indeterminados, bem como a resolução fica a cargo do leitor.

Caso em que o grau do polinómio do numerador é superior ou igual ao do denominador

Suponhamos agora que o grau de $p(x)$ é maior ou igual do que o grau de $q(x)$. Então podemos efetuar a divisão inteira de polinómios e concluir que $\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$, onde o grau de $r(x)$ é inferior ao grau de $q(x)$. Assim

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int a(x) dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx,$$

onde o primeiro integral do segundo membro é imediato, e o segundo integral é calculado por um dos métodos vistos atrás.

Exemplo 30 $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)} dx$

Atendendo a que o grau do polinómio do numerador é superior ao grau do denominador, efetuando a divisão dos dois polinómios obtemos:

$$\frac{x^3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{3x-2}{(x-1)(x+2)}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{(x-1)(x+2)} dx &= \int (x - 1) dx + \int \frac{3x-2}{(x-1)(x+2)} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} \ln |x - 1| + \frac{8}{3} \ln |x + 2| + c, \end{aligned}$$

onde o segundo integral foi calculado aplicando a regra do tapa.

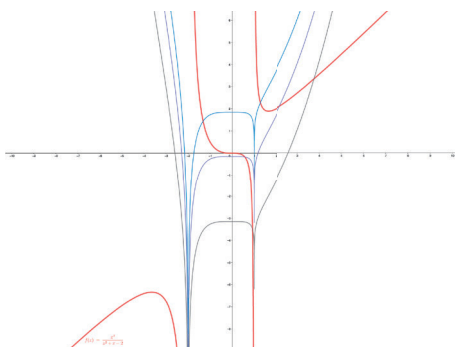


Figura 4.6: Família de primitivas de $f(x)$

Capítulo 5

Primitivação por substituição

Suponhamos que se pretende calcular o integral $\int f(x)dx$. Muitas vezes é bastante útil efetuar uma mudança de variável, o que vai permitir simplificar a função integranda, e calcular a sua primitiva. Consideremos $x = \phi(t)$, em que $\phi(t)$ é uma função contínua, bem como a sua derivada, e admite função inversa. Então $dx = \phi'(t)dt$, e:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\cdot\phi'(t)dt$$

Como o leitor pode imaginar existem inúmeras substituições que podem ser usadas, sendo que a substituição mais útil é a que nos permite simplificar o cálculo da primitiva. Existem tabelas de substituições predefinidas para alguns tipos de funções. Vamos exemplificar algumas das mais comuns.

Primitivas cuja função integranda contenha expressões do tipo $\sqrt{a^2 - x^2}$ ou $\sqrt{a^2 + x^2}$ ou $\sqrt{x^2 - a^2}$

Exemplo 31 $\int \sqrt{4 - x^2}dx$

Com o objetivo de eliminar a raiz quadrada do integral, vamos proceder a uma mudança de variável utilizando as funções trigonométricas e respetivas relações entre elas, isto é, façamos $x = 2\text{sent}$.

Assim $dx = 2\cos tdt$, e o integral inicial fica com a forma:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4 - x^2}dx &= \int \sqrt{4 - (2\text{sent})^2}\cdot 2\cos tdt \\ &= \int \sqrt{4(1 - \text{sen}^2t)}\cdot 2\cos tdt \\ &= 4\int \cos^2 tdt.\end{aligned}$$

Atendendo a que $\cos^2 t = \frac{1+\cos(2t)}{2}$, podemos substituir no integral e obtemos:

$$\begin{aligned}
4 \int \cos^2 t dt &= 4 \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\
&= 2 \int dt + \int 2 \cos(2t) dt \\
&= 2t + \text{sen}(2t) + c.
\end{aligned}$$

Com esta mudança de variável o cálculo da primitiva ficou bastante simples, contudo é necessário voltar à variável inicial, isto é, voltar à variável x . Como $x = 2\text{sent}$, facilmente se conclui que $t = \text{arctg}(\frac{x}{2})$. Por outro lado, dado que $\text{sent} = \frac{x}{2}$ podemos concluir que $\cos t = \sqrt{1 - (\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

Assim

$$\begin{aligned}
\text{sen}(2t) &= 2\text{sent} \cos t = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} \\
&= \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = 2\text{arctg}(\frac{x}{2}) + \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} + c.$$

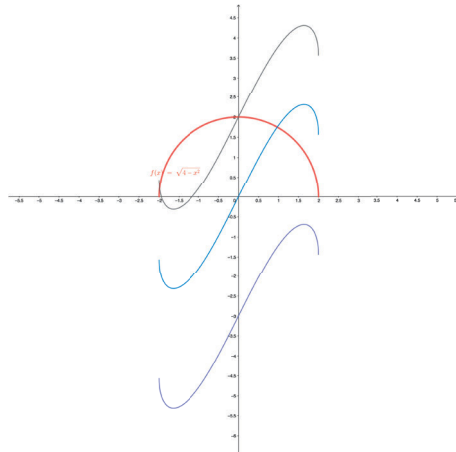


Figura 5.1: Família de primitivas de $f(x)$

No caso em que a função integranda contém expressões do tipo $\sqrt{a^2 + x^2}$, proceda-se de forma análoga e considera-se a substituição $x = a.\text{tgt}$. Se as expressões forem do tipo $\sqrt{x^2 - a^2}$, a substituição aconselhada é $x = \frac{a}{\cos^2 t} = a.\text{sec}^2(x)$

Primitivas cuja função integranda contenha expressões do tipo $u^{p/q}$.

Exemplo 32 $\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+1} dx$

Sendo o objetivo eliminar as duas raízes simultaneamente, vamos proceder à mudança de variável $x + 2 = t^{mmc(2,3)}$, isto é $x + 2 = t^6$. Assim $x = t^6 - 2$ e consequentemente $dx = 6t^5 dt$.

Substituindo no integral:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2+1}} dx = \int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt[3]{t^6+1}} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt.$$

Obtivemos o integral de uma função racional na qual o grau do polinómio do numerador é superior ao do denominador. Efetuando a divisão dos polinómios obtemos:

$$\frac{t^8}{t^2+1} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1},$$

o que substituindo no integral dá origem a diversas primitivas imediatas. Assim

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{t^8}{t^2+1} dt &= 6 \int (t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}) dt \\ &= 6 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t \right) + c. \end{aligned}$$

Voltando à variável x , e dado que $t = \sqrt[6]{x-2}$, obtemos:

$$\int \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2+1}} dx = \frac{6}{7}(x+2)\sqrt[6]{x+2} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{(x+2)^5} + 2\sqrt{(x+2)} - 6\sqrt[6]{x+2} + 6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x+2}) + c.$$

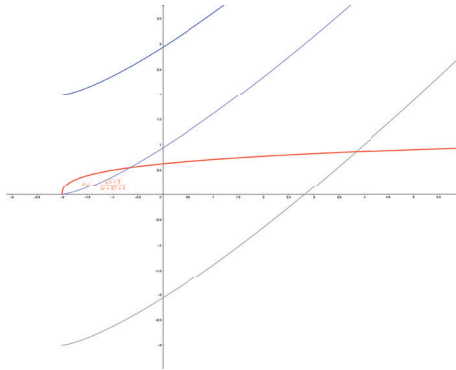


Figura 5.2: Família de primitivas de $f(x)$

Primitivas cuja função integranda contenha logaritmos ou exponenciais.

Exemplo 33 $\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)} dx$

Nesse caso vamos proceder à substituição $\ln x = t$. Assim $x = e^t$ e como tal $dx = e^t dt$.

Substituindo no integral:

$$\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)} dx = \int \frac{1+t}{e^t(1-t)} \cdot e^t dt = \int \frac{1+t}{1-t} dt.$$

Novamente temos uma função racional onde, nesse caso, o grau do polinómio do numerador é igual ao do denominador. Efetuando a divisão dos polinómios obtemos:

$$\frac{1+t}{1-t} = -1 + \frac{2}{1-t}.$$

Substituindo no integral:

$$\int \frac{1+t}{1-t} dt = \int \left(-1 + \frac{2}{1-t}\right) dt = -t - 2 \ln |1-t| + c.$$

Voltando à variável x conclui-se que:

$$\int \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)} dx = -\ln x - 2 \ln |1-\ln x| + c.$$

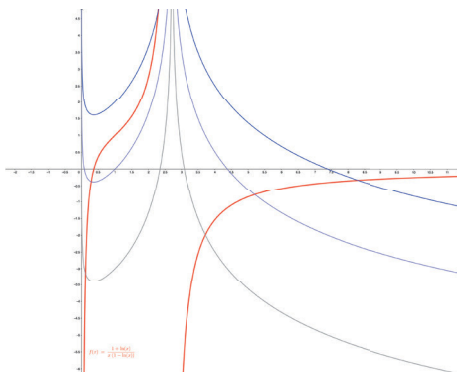


Figura 5.3: Família de primitivas de $f(x)$

Exemplo 34 $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{-2x} + 1} dx$

Nesse caso a substituição aconselhada é $e^x = t$. Logo $x = \ln t$ e $dx = \frac{1}{t} dt$. Assim

$$\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{-2x} + 1} dx = \int \frac{t+t^2}{t^{-2}+1} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^3+t^2}{t^2+1} dt.$$

Efetuando a divisão dos polinómios:

$$\frac{t^3+t^2}{t^2+1} = t + 1 - \frac{t+1}{t^2+1}.$$

Separando em várias primitivas vamos ter:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^3+t^2}{t^2+1} dt &= \int t dt + \int 1 dt - \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - \arctg(t) + c. \end{aligned}$$

Voltando à variável x temos então que:

$$\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^{-2x} + 1} dx = \frac{e^{2x}}{2} + e^x - \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg}(e^x) + c.$$

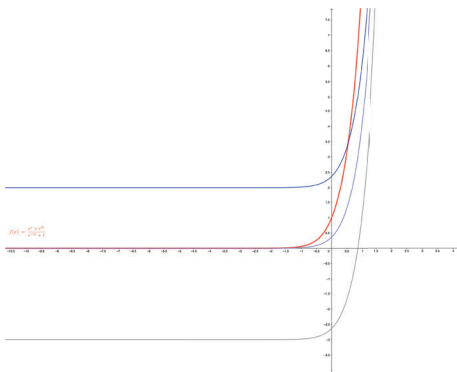


Figura 5.4: Família de primitivas de $f(x)$

Primitivas cuja função integranda contenha expressões trigonométricas ímpares em $\operatorname{sen}x$ ou $\operatorname{cos}x$.

Exemplo 35 $\int \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x + \operatorname{cos}^2 x} dx$

Uma função f diz-se ímpar em $\operatorname{sen}x$ se $f(-\operatorname{sen}x) = -f(\operatorname{sen}x)$, o que, como facilmente se observa, é o caso da função integranda. Uma função diz-se ímpar em $\operatorname{cos}x$ se $f(-\operatorname{cos}x) = -f(\operatorname{cos}x)$. No acaso em que a função é ímpar em $\operatorname{sen}x$ a substituição aconselhada é $\operatorname{cos}x = t$. Caso seja ímpar em $\operatorname{cos}x$, procede-se à substituição $\operatorname{sen}x = t$. No exemplo que estamos a considerar a substituição aconselhada é $\operatorname{cos}x = t$. Assim $x = \arccos t$ e $dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

Substituindo:

$$\int \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x + \operatorname{cos}^2 x} dx = - \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t+t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = - \int \frac{1}{t(1+t)} dt.$$

Aplicando a regra do tapa, ou o método dos coeficientes interminados, podemos decompor a fração da seguinte forma:

$$\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}.$$

Logo

$$\begin{aligned} - \int \frac{1}{t(1+t)} dt &= - \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{1}{1+t} dt \\ &= - \ln |t| + \ln |1+t| + c \\ &= \ln \left| \frac{1+t}{t} \right| + c. \end{aligned}$$

Assim

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos^2 x} dx = \ln \left| \frac{1 + \cos x}{\cos x} \right| + c = \ln \left| 1 + \frac{1}{\cos x} \right| + c$$

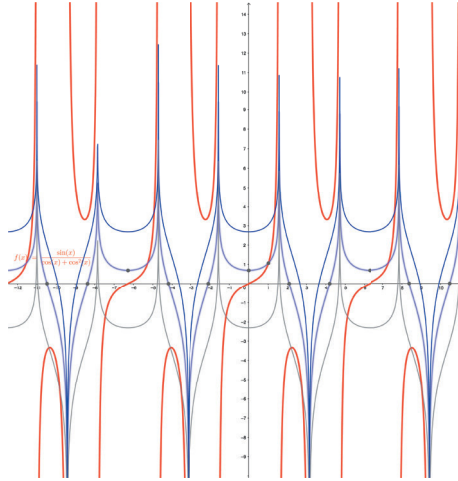


Figura 5.5: Família de primitivas de $f(x)$

Primitivas cuja função integranda é uma função trigonométrica que não é ímpar em $\operatorname{sen} x$ nem $\cos x$.

Esse tipo de funções pode ser reduzida a uma função racional através da mudança de variável $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t$.

Atendendo a que

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(2\frac{x}{2}) = \frac{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{1} = \frac{2\operatorname{sen}(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})},$$

podemos dividir numerador e denominador por $\cos^2(\frac{x}{2})$ e obtemos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

De modo análogo,

$$\cos x = \cos(2\frac{x}{2}) = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}{1} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \operatorname{sen}^2(\frac{x}{2})}{\operatorname{sen}^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})},$$

e dividindo novamente o numerador e denominador por $\cos^2(\frac{x}{2})$, podemos concluir que:

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})}{1 + \operatorname{tg}^2(\frac{x}{2})} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Por outro lado, e dado que $x = 2\arctgt$, então $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Exemplo 36 $\int \frac{\cos x}{5+4 \cos x} dx$

A função integranda obviamente não é ímpar em $\cos x$, nem em $\operatorname{sen} x$. Assim vamos proceder à substituição $\operatorname{tg}(\frac{x}{2}) = t$, onde $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ e $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$.

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{5+4 \cos x} dx &= \int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{5+4 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1-t^2}{9+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)(9+t^2)} dt. \end{aligned}$$

Como temos uma função racional na qual o denominador é um produto de dois polinómios sem raízes reais, vamos proceder à decomposição:

$$\frac{1-t^2}{(1+t^2)(9+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{9+t^2} = \frac{(A+C)t^3+(B+D)t^2+(9A+C)t+9B+D}{(1+t^2)(9+t^2)}.$$

Igualando os coeficientes, conclui-se que $A = 0$, $B = \frac{1}{4}$, $C = 0$ e $D = -\frac{5}{4}$.

Assim

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{1-t^2}{(1+t^2)(9+t^2)} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+t^2} dt - \frac{5}{2} \int \frac{1}{9+t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \arctgt - \frac{5}{6} \arctg\left(\frac{t}{3}\right) + c. \end{aligned}$$

Voltando à variável x , e dado que $t = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x}{5+4 \cos x} dx &= \frac{1}{2} \arctg(\operatorname{tg}(\frac{x}{2})) - \frac{5}{6} \arctg\left(\frac{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})}{3}\right) + c \\ &= \frac{x}{4} - \frac{5}{6} \arctg\left(\frac{1}{3} \operatorname{tg}(\frac{x}{2})\right) + c. \end{aligned}$$

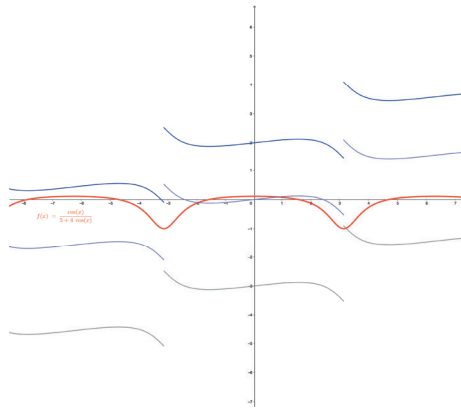


Figura 5.6: Família de primitivas de $f(x)$

Capítulo 6

Exercícios propostos

1. Calcule as seguintes primitivas imediatas:

$$1.1. \int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx \quad R : 6\sqrt{x} - \frac{1}{10}x^2\sqrt{x} + c$$

$$1.2. \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx \quad R : -\frac{1}{x} - \frac{8}{\sqrt{x}} + 2x + c$$

$$1.3. \int \frac{1}{5-2x} dx \quad R : -\frac{1}{2} \ln |5 - 2x| + c$$

$$1.4. \int \operatorname{tg}(2x) dx \quad R : -\frac{1}{2} \ln |\cos(2x)| + c$$

$$1.5. \int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx \quad R : \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + c$$

$$1.6. \int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2x}} dx \quad R : 2\sqrt{1+\operatorname{sen}^2x} + c$$

$$1.7. \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \quad R : \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + c$$

$$1.8. \int 3^x e^x dx \quad R : \frac{3^x e^x}{\ln 3 + 1} + c$$

$$1.9. \int (x+2)e^{x^2+4x+3} dx \quad R : \frac{1}{2} e^{x^2+4x+3} + c$$

$$1.10. \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad R : \operatorname{sen}(\ln x) + c$$

$$1.11. \int \operatorname{sen}^5 x dx \quad R : -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + c$$

$$1.12. \int \cos^4 x dx \quad R : \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{32} \operatorname{sen}(4x) + c$$

$$\begin{array}{ll}
1.13. \int \frac{e^x + e^{2x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx & R : \arcsen(e^x) - \sqrt{1 - e^{2x}} + c \\
1.14. \int tg^4 x dx & R : \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c \\
1.15. \int (x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx & R : \frac{x^5}{5} + \frac{3x^2}{4} \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x} + c \\
1.16. \int \frac{1}{\sen^2(x) + \cos(2x)} dx & R : tgx + c \\
1.17. \int \frac{1}{x \ln x} dx & R : \ln |\ln x| + c \\
1.18. \int \frac{-3x}{x^4 + e^4} dx & R : \frac{-3}{2e^2} \arctg\left(\frac{x}{e}\right)^2 + c \\
1.19. \int \frac{1}{\sqrt{1 - 3x^2}} dx & R : \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsen(\sqrt{3}x) + c \\
1.20. \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx & R : 4\sqrt{1 + \sqrt{x}} + c \\
1.21. \int \frac{1}{9x^2 + 4} dx & R : \frac{1}{6} \arctg\left(\frac{3x}{2}\right) + c \\
1.22. \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \arcsen x} dx & R : \ln |\arcsen x| + c \\
1.23. \int \frac{(3^x - 2^x)^2}{6^x} dx & R : \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln 3 - \ln 2} + c \\
1.24. \int \frac{x+1}{x^2 + 2x + 3} dx & R : \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 3) + c \\
1.25. \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx & R : \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \\
1.26. \int \frac{x e^{\arcsen(x^2)}}{\sqrt{1 - x^4}} dx & R : \frac{1}{2} \arcsen(x^2) + c \\
1.27. \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^3}} dx & R : \frac{2}{3} \sqrt{a^2 + x^3} + c \\
1.28. \int \frac{1}{3x^2 - 2x + 2} dx & R : \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg\left(\frac{3x-1}{\sqrt{5}}\right) + c \\
1.29. \int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx & R : \frac{3}{13} x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + c \\
1.30. \int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2) \ln(x + \sqrt{1+x^2})}} dx & R : 2 \ln \sqrt{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} + c
\end{array}$$

2. Aplicando o método de primitivação por partes, calcule:

- 2.1. $\int x \operatorname{sen}(x) dx$ $R : \operatorname{sen}(x) - x \cos(x) + c$
- 2.2. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ $R : 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + c$
- 2.3. $\int \ln(1-x) dx$ $R : -x - (1-x) \ln(1-x) + c$
- 2.4. $\int e^x \operatorname{sen}(x) dx$ $R : -\frac{e^x}{2} (\cos(x) - \operatorname{sen}(x)) + c$
- 2.5. $\int x^3 e^{x^2} dx$ $R : \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1) + c$
- 2.6. $\int \operatorname{arcsen}(x) dx$ $R : x \operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + c$
- 2.7. $\int x \operatorname{arctg}(x) dx$ $R : \frac{1}{2} [(x^2 + 1) \operatorname{arctg}(x) - x] + c$
- 2.8. $\int \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) dx$ $R : x \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) + \ln |1-x^2| + c$
- 2.9. $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$ $R : \frac{1}{2} x (\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)) + c$
- 2.10. $\int \frac{x}{\operatorname{sen}^2 x} dx$ $R : -x \cot g(x) + \ln |\operatorname{sen}(x)| + c$
- 2.11. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$ $R : \ln |\ln(\ln x) - 1| + c$
- 2.12. $\int x \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$ $R : \frac{1}{8} (4x \operatorname{sen}^2(x) - 2x + \operatorname{sen}(2x)) + c$

3. Calcule as seguintes primitivas de funções racionais:

- 3.1. $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx$ $R : \ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + c$
- 3.2. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5} dx$ $R : \frac{3}{2} \ln |x^2 - 4x + 5| + 4 \operatorname{arctg}(x - 2) + c$
- 3.3. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$ $R : x + 4 \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c$
- 3.4. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$ $R : \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + c$
- 3.5. $\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx$ $R : \frac{1}{x-1} + \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + c$
- 3.6. $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$ $R : \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} + c$
- 3.7. $\int \frac{1}{x^3+1} dx$ $R : \frac{1}{6} \ln \left| \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + c$
- 3.8. $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx$ $R : \ln \left| \frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{x-1} \right| + \frac{11}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{2} \right) + c$
- 3.9. $\int \frac{x^5}{x^3-1} dx$ $R : \frac{1}{3} (x^3 + \ln |x^3 - 1|) + c$
- 3.10. $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3} dx$ $R : \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 + c$
- 3.11. $\int \frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} dx$ $R : -\frac{5x+12}{x^2+6x+8} + \ln \left(\frac{x+4}{x+2} \right)^2 + c$
- 3.12. $\int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$ $R : \frac{3x^2-1}{(x-1)(x^2+1)} + \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+1} + \operatorname{arctg}(x) + c$

4. Usando o método de substituição, calcule:

$$\begin{array}{ll}
 4.1. \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx & R : 2\sqrt{x} - 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + c \\
 4.2. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}} dx & R : \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \ln \left(\sqrt[4]{x^3} + 1 \right) \right) + c \\
 4.3. \int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx & R : 2\sqrt{x+1} - 2 \ln (1 + \sqrt{x+1}) + c \\
 4.4. \int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx & R : \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \ln x \right) \sqrt{1 + \ln x} + c \\
 4.5. \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx & R : \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right| + c \\
 4.6. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx & R : -\operatorname{arcsen}(x) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + c \\
 4.7. \int \frac{1}{5-3\cos(x)} dx & R : \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right) + c \\
 4.8. \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\operatorname{sen}(x)} dx & R : x + \frac{2}{1+\operatorname{tg}(\frac{x}{2})} + c \\
 4.9. \int \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}} dx & R : x^2 \sqrt{9+x^2} - \frac{1}{3} (9+x^2)^{\frac{3}{2}} + c \\
 4.10. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx & R : \frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3} + c \\
 4.11. \int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx & R : \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \right| + c \\
 4.12. \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)+\operatorname{tg}^2(x)} dx & R : -\frac{1}{2} \left(\cot g(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{2}} \right) \right) + c
 \end{array}$$

Parte II

Integral definido e aplicações

Capítulo 7

Integral definido

No mundo que nos rodeia quase tudo depende de várias variáveis: pressão atmosférica, temperatura, densidades de massa ou de carga eléctrica, grandezas económicas, grandezas mecânicas como a posição, a velocidade ou a aceleração. Algumas destas grandezas são representadas matematicamente por campos escalares; em cada ponto temos um número que significa, nalguma unidade, por exemplo uma temperatura, ou uma pressão, ou uma densidade de massa por unidade de volume. O Cálculo Integral é uma ferramenta fundamental na matemática, pois permite resolver inúmeros problemas da Física, Engenharia etc. Por exemplo, para construir uma estrutura como a cobertura do Pavilhão Atlântico na Expo ou a célebre pala do arquitecto Siza Vieira, temos de conseguir responder a várias questões que de imediato se põem, por exemplo:

Quanto pesa a cobertura (qual é a sua massa) ? Qual é a área que ocupa ? Em que pontos devem ser colocados os apoios e que cargas devem poder suportar ? Que ângulos com a vertical devem ou podem os apoios fazer ?

Para responder a estas questões precisamos de um modelo matemático da estrutura. Como a extensão em comprimento e largura da cobertura é muito maior do que a sua espessura, é muito útil e uma boa aproximação considerar a cobertura como uma superfície. Após termos a descrição da superfície em termos de uma equação ou de uma parametrização e conhecendo a densidade efectiva de massa por unidade de área podemos calcular a massa da cobertura, a sua área, os momentos de inércia relativos a vários eixos - o momento de inércia mede a capacidade de rotação da estrutura em torno de um eixo - e assim calcular as cargas exercidas sobre os apoios. Tudo isto se resolve com recurso ao Cálculo Integral.

Nesse capítulo iremos explorar o conceito de integral definido, a sua interpretação geométrica e como este se relaciona com a teoria do cálculo de primitivas, estudada no capítulo anterior. Iremos ainda ilustrar uma das aplicações mais importantes do integral definido que é o cálculo de áreas planas.

7.1 Função integrável à Riemann. Interpretação geométrica.

Suponhamos que pretendemos calcular a área limitada por uma função não negativa, pelas rectas verticais $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos xx , como ilustra a figura seguinte:

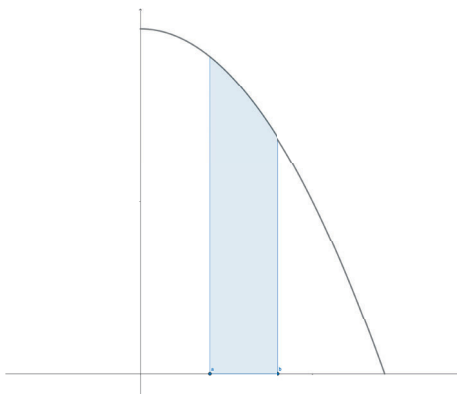


Figura 7.1: Área limitada por uma função não negativa

Para obtermos um valor aproximado da área, um método intuitivo é dividir o intervalo $[a, b]$ num determinado número de intervalos (partição) de igual amplitude. Designemos a amplitude de cada um desses sub-intervalos por Δx . Em cada um desses intervalos da partição de $[a, b]$ vamos escolher um elemento (por uma questão de facilidade podemos considerar o ponto médio do intervalo) x^* e a sua respectiva imagem $f(x^*)$. Assim obtemos vários rectângulos (tantos quantos a partição considerada) de base Δx e altura $f(x^*)$. A soma das áreas de todos esses rectângulos dá-nos uma aproximação da área entre o eixo dos xx e a função, aproximação essa que será tanto maior quanto maior o número de elementos da partição.

Ilustremos esse conceito com o seguinte exemplo:

Exemplo:

Suponhamos que pretendemos calcular a área do triângulo formado pelo eixo dos xx , pela função $f(x) = x$ e ainda pelas rectas $x = 0$ e $x = 5$. Atendendo à fórmula da área de um triângulo, sabemos que a área desejada é 12,5.

Usando o método descrito acima, vamos efectuar uma partição do intervalo $[0, 5]$ em 10 sub-intervalos de amplitude constante $\Delta x = 0,5$. Designando o ponto médio de cada um desses sub-intervalos por x^* e a respectiva imagem por $f(x^*)$, obtemos 10 rectângulos com base constante e alturas variáveis, dependendo da imagem do elemento da partição considerada.

Como se pode observar na figura, as imagens dos pontos médios dos intervalos da partição, são os elementos do conjunto

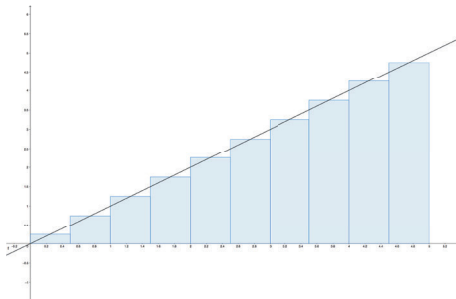


Figura 7.2: Partição do intervalo

$$\{0, 5; 1, 5; 2, 5; 3, 5; 4, 5; 5\}.$$

A soma das áreas de todos os rectângulos, facilmente se verifica que é igual a 13,75. Se subtrairmos metade da área do último rectângulo, isto é, $13,75 - \frac{5 \cdot 0,5}{2}$, obtemos a área do triângulo.

Nesse exemplo a soma das áreas dos rectângulos não nos dá um valor aproximado, mas sim o valor exacto da área do triângulo considerado. Isto deve-se ao facto, como se pode observar na figura, de que a área desprezada abaixo da função (para cada rectângulo) é igual à área do rectângulo acima da função. Isto deve-se ao facto da função ser muito "bem comportada", o que não acontece com a maioria das funções.

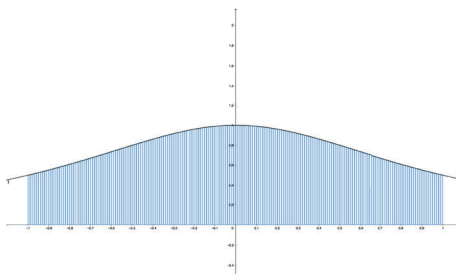


Figura 7.3: Partição do intervalo

Para que possamos obter uma maior aproximação da área abaixo de uma função, temos necessariamente que aumentar o número de subintervalos da partição. Aumentar de tal forma, que amplitude de cada um desses subintervalos passa a ser um infinitésimo, e assim garantimos que a área que não é considerada é desprezável.

Formalizando esse conceito, consideremos uma função f definida no intervalo $[a, b]$ e

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

uma decomposição arbitrária desse intervalo em n subintervalos. Em cada subintervalo precisamos de escolher um ponto qualquer, no qual a função f deve ser calculada,

para determinar a altura do rectângulo no intervalo. Sejam $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ tais que

$$x_1^* \in [x_0, x_1], x_2^* \in [x_1, x_2], \dots, x_n^* \in [x_{n-1}, x_n]$$

(a escolha mais comum é considerar o ponto médio de cada subintervalo).

As áreas dos rectângulos construídos sobre esses intervalos são

$$f(x_1^*)\Delta x_1, f(x_2^*)\Delta x_2, \dots, f(x_n^*)\Delta x_n$$

e a soma

$$\begin{aligned}\sigma_d &= f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \dots + f(x_n^*)\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i\end{aligned}$$

denomina-se por **soma integral (ou soma sigma)** da função f em $[a, b]$.

Se a função é contínua e não negativa no intervalo $[a, b]$, então a **área** sob a curva $y = f(x)$ nesse intervalo é dada por

$$A = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i. \quad (7.1)$$

Embora esta definição seja satisfatória para os nossos propósitos, há algumas questões a serem resolvidas antes de podermos encará-la como uma definição matematicamente rigorosa. Por exemplo, teríamos de provar a existência do limite e que o seu valor não depende da escolha dos pontos $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$. O limite (7.1) é frequentemente difícil ou impossível de calcular, de modo que, quando é necessário o valor *exacto da área*, deve ser utilizado o método da integração. Porém, se for necessário uma aproximação, então em vez do limite podemos usar a área aproximada por

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$$

onde n é suficientemente grande para obter a precisão exigida.

Não é possível falar de soma integral sem falar um pouco da história da Matemática, mais concretamente em Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866). Matemático alemão filho de um ministro protestante começou com muito pouca idade a mostrar um enorme talento em aritmética. Em 1846 entrou para a Universidade de Gottingen com o propósito de estudar teologia e filosofia, mas logo se transferiu para matemática. Estudou física com W. E. Weber e matemática com Karl Friedrich Gauss. Em 1851 completa o seu doutoramento sob a orientação de Gauss. Em 1862 sofreu um ataque de pleurisia e permaneceu extremamente doente até falecer em 1866 com tuberculose. O trabalho de Riemann em geometria está recheado com uma história interessante. Antes de se tornar professor assistente,

submeteu três tópicos possíveis para a sua aula introdutória a Gauss. Este surpreendeu Riemann, escolhendo o tópico que ele menos gostava, — os fundamentos da geometria. A apresentação desta aula decorreu maravilhosamente bem. O velho e enfraquecido Gauss deliciou-se com o trabalho do seu brilhante jovem estudante e contemplou a obra feita. Gauss morreu pouco depois. Os resultados apresentados por Riemann naquele dia acabaram por ser a ferramenta fundamental, usada por Einstein cerca de 50 anos mais tarde, para desenvolver a teoria da relatividade. Além do excelente trabalho em geometria, Riemann tem grandes contribuições na teoria das funções complexas, na física e na matemática. A ele deve-se a noção de integral definido num intervalo $[a, b]$.

Definição 1 *Se para cada decomposição d tal que $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ o limite da soma σ_d , quando o número de divisões n tende para infinito, for o mesmo valor Σ , diz-se que f é integrável no sentido de Riemann*

*O valor do limite comum a todas as decomposições, Σ , designa-se por **integral definido de f no intervalo $[a, b]$** e representa-se por*

$$\Sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

Portanto,

$$\Sigma = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i,$$

onde

- f é a **função integranda**;
- x é a **variável de integração**;
- os números a e b são designados por **limites de integração inferior e superior** respectivamente.

O símbolo da integração é \int , um S alongado que significa "soma". O integral definido é escrito da forma $\int_a^b f(x) dx$ e lido como "o integral de a até b de f -de- x em ordem a x ."

Geometricamente, se f é uma função não negativa, o integral definido representa a área da região limitada pela função f , pelas rectas verticais $x = a$, $x = b$ e pelo eixo dos xx . Sendo f uma função não positiva, o integral definido dá-nos o simétrico da respectiva área.

Observação

Nem todas as funções são integráveis Riemann. Por exemplo se considerarmos a função $f(x) = \frac{1}{x-1}$ definida no intervalo $]1, 10]$, facilmente se pode observar na figura que a soma das áreas dos rectângulos vai tender para infinito. Isto deve-se ao facto da função não ser limitada nesse intervalo.

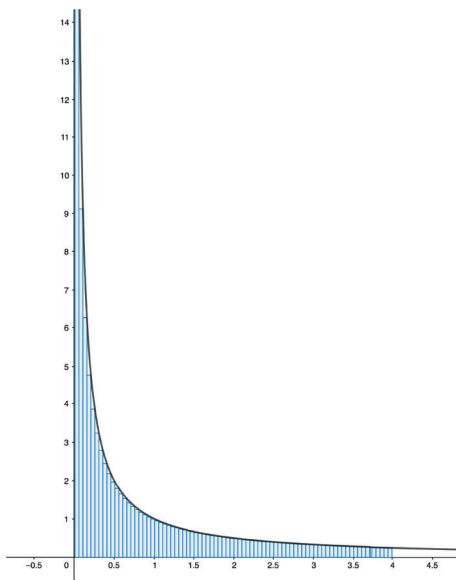


Figura 7.4: Partição do intervalo

Em seguida vamos indicar algumas classes de funções que são integráveis à Riemann bem como algumas propriedades importantes dos integrais definidos, muitas das quais são bastante intuitivas se pensamos no integral como a soma das áreas dos rectângulos de uma partição.

7.2 Integral definido. Fórmula de Barrow

Teorema 1 *Toda a função contínua no intervalo $[a, b]$ é integrável, nesse intervalo, à Riemann.*

Teorema 2 *Toda a função monótona e limitada é integrável no sentido de Riemann.*

Algumas propriedades do integral definido

1. Se f é integrável em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx;$$

2. Se c é uma constante

$$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx;$$

3. Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

4. Se f e g são integráveis em $[a, b]$, então

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx;$$

5. Se f é uma função integrável num intervalo fechado contendo os três pontos a, b e c , com $a < c < b$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

independentemente da ordem. Esse resultado é conhecido pela *Propriedade da aditividade do integral relativamente ao intervalo de integração* ou *Teorema da decomposição do intervalo*.

6. Se f é uma função contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Esse resultado é vulgarmente conhecido pelo **teorema da média do cálculo integral**.

A definição de integral vista anteriormente, não é muito simples de utilizar a nível prático. Não nos podemos esquecer que estamos a trabalhar com somas infinitas de áreas de rectângulos, nos quais a altura de cada um desses infinitos rectângulos é a imagem da função de um ponto da base do mesmo. Em 1630 nasceu Isaac Barrow matemático e teólogo inglês que foi mestre de Newton e um dos precursores do Cálculo Diferencial, vindo a falecer em 1677. Entre os muitos trabalhos desenvolvidos por Barrow, o mais importante é sem dúvida a fórmula que nos permite calcular qualquer integral definido, de uma forma extremamente simples com recurso às regras de cálculo de primitivas do Capítulo anterior.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. Para todo $x \in [a, b]$, a restrição $f|_{[a, x]}$ é

$$F(x) = \int_a^x f(z)dz.$$

A função $F(x)$ designa-se por **integral indefinido de f com origem no ponto a** .

Teorema 3 Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e F uma primitiva de f . Então

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

Esta fórmula é conhecida por **fórmula de Barrow**, que permite calcular o integral de uma função f num intervalo onde esta seja contínua, desde que consigamos determinar uma primitiva F da função f . Também é conhecida por *fórmula de Newton-Leibniz*.

7.3 Exemplos

Exemplo 37 $\int_0^2 (x^3 + 3x^2 - 1)dx$.

Atendendo às propriedades dos integrais definidos

$$\int_0^2 (x^3 + 3x^2 - 1)dx = \int_0^2 x^3 dx + 3 \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 dx.$$

Utilizando a fórmula de Barrow, ficamos com

$$\begin{aligned} \int_0^2 x^3 dx + 3 \int_0^2 x^2 dx - \int_0^2 dx &= \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 + 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 - [x]_0^2 \\ &= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right] + [2^3 - 0^3] - [2 - 0] \\ &= 4 + 8 - 2 = 10 \end{aligned}$$

Exemplo 38 $\int_1^2 \frac{x}{25+x^2} dx$

Ora

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x}{25+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} [\ln(5) - \ln(2)] = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 39 $\int_1^2 x \ln x dx$

Claramente teremos que utilizar o método primitivação por partes, isto é:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Consideremos, $f'(x) = x$ e $g(x) = \ln x$, logo $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$. Aplicando a regra da primitivação por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= [2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1)] - \frac{1}{2} \int_1^2 x dx \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \left[2 - \frac{1}{2} \right] = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Exemplo 40 $\int_2^3 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$

Nesse caso teremos que nos socorrer de uma mudança de variáveis, isto é:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt,$$

com α e β tais que $a = g(\alpha)$ e $b = g(\beta)$.

Vamos utilizar a substituição $x = \frac{1}{\cos t}$. Assim $dx = \frac{\text{sent}}{\cos^2 t} dt$. Mudando os limites de integração, quando $x = 2$ obtemos $t = \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, e quando $x = 3$ obtemos $t = \arccos(\frac{1}{3})$.

Assim

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos(\frac{1}{3})} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{1}{\cos t}\right)^2 - 1}} \cdot \frac{\text{sent}}{\cos^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos(\frac{1}{3})} \frac{\text{sent}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1}} dt.$$

Atendendo a que $1 + tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, conclui-se que $tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$, e substituindo no integral, obtemos:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos(\frac{1}{3})} \frac{\text{sent}}{tgt} dt = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos(\frac{1}{3})} \cos t dt = [\text{sent}]_{\frac{\pi}{3}}^{\arccos(\frac{1}{3})} = \text{sen}(\arccos(\frac{1}{3})) - \text{sen}(\frac{\pi}{3}).$$

Designando $\arccos(\frac{1}{3})$ por y , pretende-se saber o valor de $\text{sen} y$ para o qual $\cos y = \frac{1}{3}$. Aplicando a Fórmula Fundamental da Trigonometria, facilmente se conclui que $\text{sen} y = \text{sen}(\arccos(\frac{1}{3})) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Então o valor do integral inicial é:

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{6}.$$

Capítulo 8

Cálculo de áreas planas

Suponhamos que pretendemos calcular o integral

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx$$

Pelo que foi visto na secção anterior,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(x) dx = [-\cos(x)]_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0.$$

Isto significa que não existe área entre a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e o eixo dos xx , quando x varia entre 0 e 2π ?

A resposta é obviamente negativa.

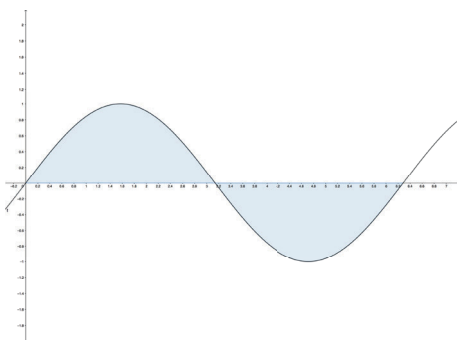


Figura 8.1: Gráfico da função $f(x) = \text{sen}x$

Como se pode observar na figura, a área acima do eixo dos xx é igual à área abaixo do eixo do xx . Atendendo à definição de integral, esse é positivo quando a função for positiva, mas negativo quando a função é negativa. Desse modo obtemos a soma de dois valores simétricos e como tal o integral é igual a zero. Isto significa

que o integral não nos dá o valor da área entre a função e o eixo dos xx , pois esta (área) não pode ser calculada desta forma. A forma correcta de o fazer seria verificar que os zeros da função $f(x) = \text{sen}(x)$, no intervalo $[0, 2\pi]$, são os pontos $x = \pi$ e $x = 2\pi$ e consequentemente a área é

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx - \int_{\pi}^{2\pi} \text{sen}(x)dx$$

Ou então, atendendo às simetrias da nossa região, a área também podia ser calculada por

$$A = 2 \int_0^{\pi} \text{sen}(x)dx = 2[-\cos(\pi) + \cos(0)] = 4.$$

Em resumo, sempre que pretendermos calcular uma área plana, temos em primeiro lugar que fazer o esboço da função, para sabermos quando esta é positiva ou negativa, encontrar os zeros da mesma e, no caso de termos mais do que uma função, encontrar os pontos de intersecção sempre que necessário.

Vejam algumas situações que podem ocorrer:

1. **Quando $f(x) \geq 0$ para $x \in [a, b]$**

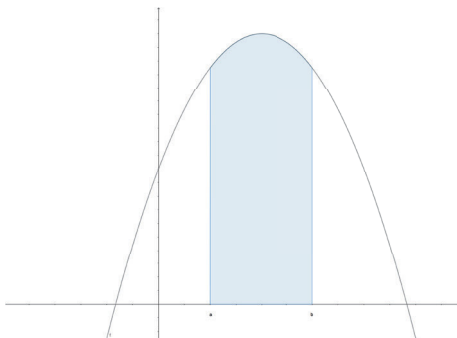


Figura 8.2: Área abaixo de uma função não negativa

A área da região plana representada na figura é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

2. **Quando $f(x) \leq 0$ para $x \in [a, b]$**

A área da região plana representada na figura é dada por $A = - \int_a^b f(x)dx$, uma vez que $\int_a^b f(x)dx$ é negativo (basta recordar a definição de integral).

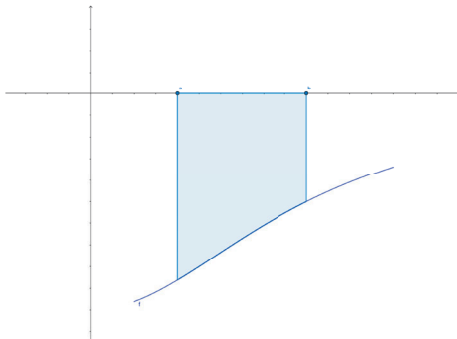


Figura 8.3: Área acima de uma função não positiva

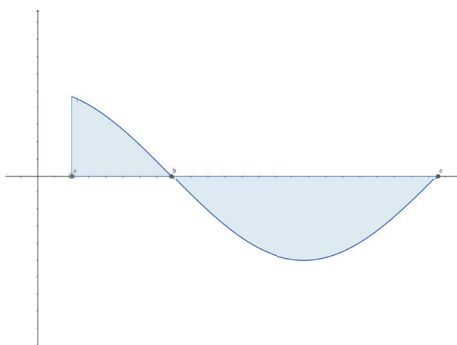


Figura 8.4: Quando a função muda de sinal

3. Quando $f(x)$ muda de sinal em $[a, b]$

Atendendo aos dois casos anteriores, a área da região plana representada na figura é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$

4. Área de uma região limitada por duas funções

A área limitada pelas funções f e g representada na figura é dada por

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

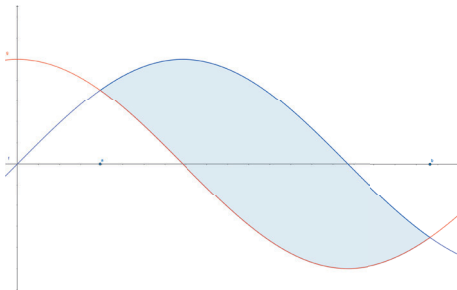


Figura 8.5: Área limitada por duas funções

5. Área de uma região limitada por três funções

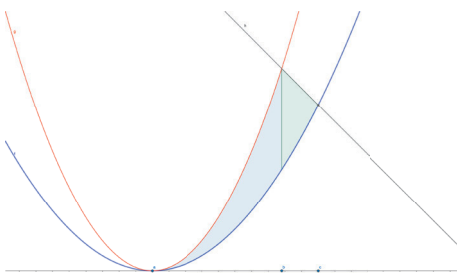


Figura 8.6: Área limitada por três funções

A área da região plana limitada pelas funções f , g e h entre a e c , é dada por:

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx + \int_b^c [h(x) - f(x)] dx.$$

8.1 Exemplos

Exemplo 41 Calcule a área limitada pelas parábolas $y = -x^2 + 6$ e $y = x^2 - 2$.

Começemos por desenhar a região pretendida. Geometricamente as funções representam duas parábolas com concavidades com sentidos diferentes. A parábola $y = -x^2 + 6$ tem a concavidade voltada para baixo, é obtida a partir de $y = -x^2$ através de uma translação associada ao vetor $(0, 6)$. A parábola $y = x^2 - 2$ tem a concavidade voltada para cima, é obtida a partir de $y = x^2$ através de uma translação vertical associada ao vetor $(0, -2)$

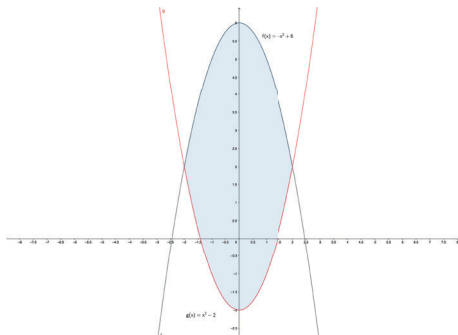


Figura 8.7: Região limitada pelas duas funções

O valor da área pretendida é obtido através do cálculo do integral da função que limita superiormente a região, $y = -x^2 + 6$, menos a função que a limita inferiormente, $y = x^2 - 2$. Desse modo necessitamos determinar onde começa e onde acaba a região sombreada, isto é, quais são os limites de integração.

Calculemos a interseção das duas curvas:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6 \\ y = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 2 \end{cases} .$$

A área entre as duas curvas é obtida através do cálculo do integral:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 [-x^2 + 6 - (x^2 - 2)] dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx \\ &= -2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 + 8 [x]_{-2}^2 \\ &= -2 \left(\frac{8}{3} + \frac{8}{3} \right) + 8(2 + 2) \\ &= -\frac{32}{3} + 32 \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

Exemplo 42 Calcule a área limitada pela parábola $y = 2x - x^2$ e pela reta $y = -x$.

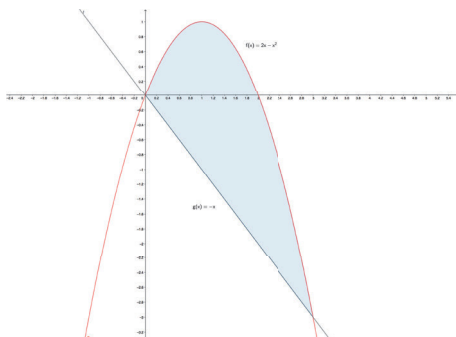


Figura 8.8: Região limitada pelas duas funções

Através do esboço do gráfico das funções facilmente se percebe que existe uma interseção na origem, faltando ainda determinar o outro ponto de interseção, isto é, o limite superior de integração. Esse valor obtém-se através da resolução do sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 3 \\ y = -x \end{cases} .$$

A área da região sombreada é:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 [2x - x^2 - (-x)] dx = \int_0^3 (3x - x^2) dx \\ &= 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 \\ &= 3 \left(\frac{9}{2} \right) - 9 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 43 Calcule a área compreendida entre as funções $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Graficamente:

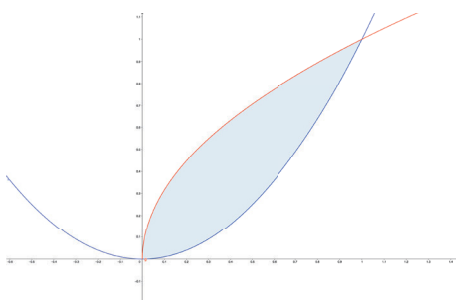


Figura 8.9: Região compreendida entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Calculando a interseção entre as duas curvas, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = x^4 \\ y = -x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x - x^4 = 0 \\ y = -x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - x^3) = 0 \\ y = -x \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ y = -x \end{cases}
 \end{aligned}$$

A área da região sombreada é igual a:

$$\begin{aligned}
 A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx &= \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - \int_0^1 x^2 dx \\
 &= \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 \\
 &= \frac{2}{3} \left[x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Exemplo 44 Calcule a área limitada pelas funções $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2 - x$ e $y = x$.

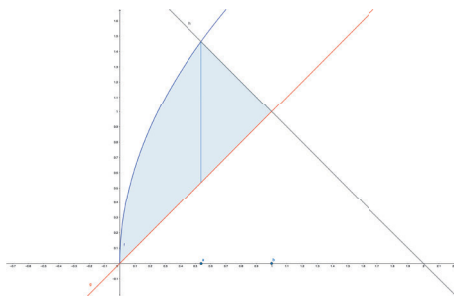


Figura 8.10: Região compreendida entre $y = 2\sqrt{x}$, $y = 2 - x$ e $y = x$

Calculando a interseção entre as curvas $y = 2\sqrt{x}$ e $y = 2 - x$, facilmente se conclui que $a = 4 - 2\sqrt{3}$, e de modo análogo podemos concluir que $b = 1$, através do cálculo da interseção de $y = 2 - x$ com $y = x$.

A área da região sombreada não é mais do que a soma das áreas das duas regiões, isto é, pode ser obtida através do cálculo do integral:

$$A = \int_0^{4-2\sqrt{3}} (2\sqrt{x} - x) dx + \int_{4-2\sqrt{3}}^1 (2 - x - x) dx.$$

O cálculo dos integrais, que são todos imediatos, fica a cargo do leitor.

Exemplo 45 Calcule a área limitada pelas funções $y = \ln x$, $y = \ln(x + 2)$, $y = \ln(4 - x)$ e $y = 0$.

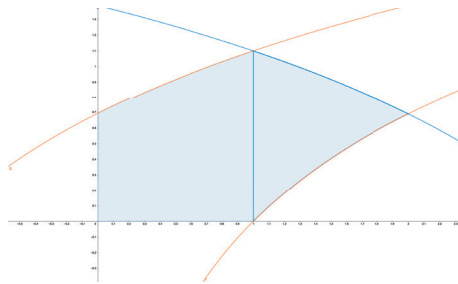


Figura 8.11: Região compreendida entre $y = \ln x$, $y = \ln(x + 2)$, $y = \ln(4 - x)$ e $y = 0$

Calculando a interseção entre as curvas facilmente se conclui que $x = 1$ e $x = 2$. A área da região sombreada pode então ser obtida através do cálculo do integral:

$$A = \int_0^1 \ln(x + 2) dx + \int_1^2 (\ln(4 - x) - \ln x) dx.$$

Calculemos cada um dos integrais separadamente através do método de primitivação por partes. Para o cálculo do integral $\int_0^1 \ln(x + 2) dx$ consideremos, $f'(x) = 1$ e $g(x) = \ln(x + 2)$, logo $f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{1}{x+2}$. Aplicando a regra da primitivação por partes

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x + 2) dx &= [x \ln(x + 2)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+2} dx = \ln 3 - \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx \\ &= \ln 3 - \left(1 - 2 \ln 3 + 2 \ln 2\right) \\ &= 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

De forma análoga conclui-se que

$$\int_1^2 \ln(4 - x) dx = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1,$$

e que

$$\int_1^2 \ln x dx = 2 \ln 2 - 1.$$

O valor da área é
 $A = 6 \ln 3 - 6 \ln 2 - 1$.

Capítulo 9

Comprimento de arcos de curvas

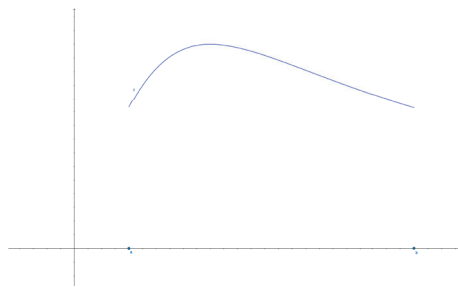


Figura 9.1: Arco da curva definida pela função $y = f(x)$

Seja $y = f(x)$ a equação de uma curva, sendo f uma função continuamente diferenciável no intervalo $[a, b]$. O comprimento do arco da curva entre $x = a$ e $x = b$ é dado pelo integral:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

9.1 Exemplos

Exemplo 46 Calcule o comprimento do arco da curva $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$, com $1 \leq x \leq 2$.

Começemos por fazer o esboço do gráfico da função.

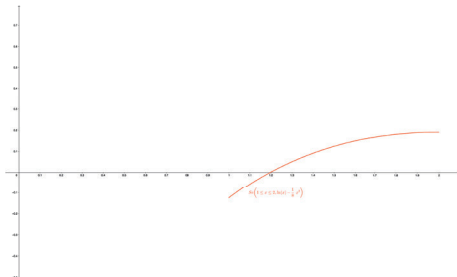


Figura 9.2: Gráfico da função $y = f(x)$

Como $f(x) = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ então $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{4}$. Assim $[f'(x)]^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}$. Substituindo na fórmula que nos dá o comprimento do arco da curva, obtemos:

$$\begin{aligned}
 L &= \int_1^2 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}} dx \\
 &= \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}} dx \\
 &= \int_1^2 \sqrt{\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2} dx \\
 &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right) dx \\
 &= \left[\ln |x| + \frac{x^2}{8} \right]_1^2 \\
 &= \ln 2 + \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 47 Calcule o comprimento do arco da curva $y = \frac{1+e^{2x}}{2e^x}$, com $0 \leq x \leq 1$.

Graficamente:

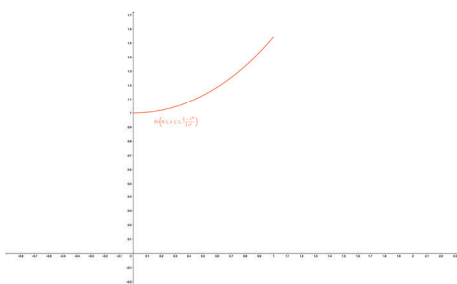


Figura 9.3: Gráfico da função $y = f(x)$

Simplificando a função obtemos $f(x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$. Assim $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e consequentemente $[f'(x)]^2 = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$.

Substituindo no integral,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^1 \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}} dx \\&= \int_0^1 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}} dx \\&= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} dx \\&= \int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) dx \\&= \frac{1}{2} [e^x - e^{-x}]_0^1 \\&= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e}\right) \\&= \frac{e^2 - 1}{2e}.\end{aligned}$$

Capítulo 10

Volumes de sólidos de revolução

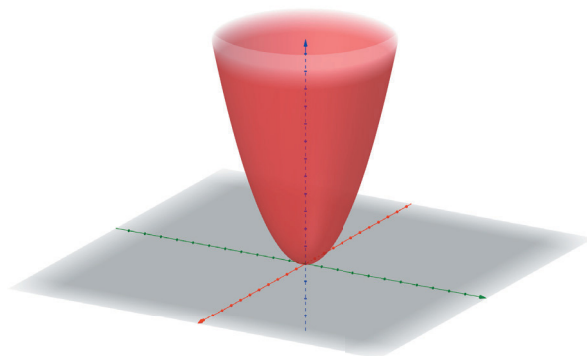


Figura 10.1: Superfície de revolução

Um sólido definido através da superfície que é obtida pela rotação em torno do eixo Ox , ou em torno do eixo Oy , do gráfico de uma função contínua, designa-se por sólido de revolução. O seu volume pode ser calculado da seguinte forma:

Quando a rotação é em torno do eixo Ox

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Quando a rotação é em torno do eixo Oy

$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

10.1 Exemplos

Exemplo 48 Calcule o volume do sólido obtido através da rotação da curva $y = x^2$ em torno do eixo Ox e em torno do eixo Oy , com $-1 \leq x \leq 1$.

Começemos por fazer o esboço do gráfico da função $y = x^2$, com $-1 \leq x \leq 1$

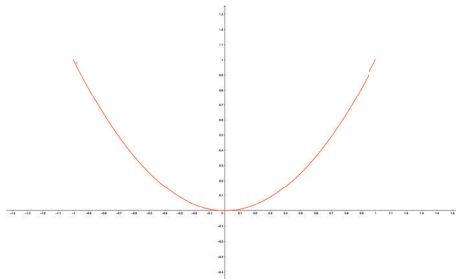


Figura 10.2: Gráfico da função $y = f(x)$

Ao efetuarmos uma rotação em torno do eixo Ox obtemos a superfície que se pode observar na figura. Considerando o sólido obtido a partir dessa superfície, e dado que a figura é simétrica, podemos apenas calcular o volume da parte positiva do eixo Ox e multiplicar o integral por 2, isto é:

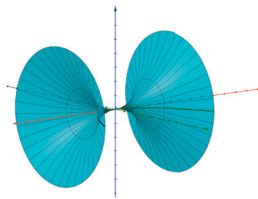


Figura 10.3: Superfície de revolução em torno do eixo Ox

$$V = 2\pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = 2\pi \int_0^1 x^4 dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Se a rotação for em torno do eixo Oy obtemos a figura:

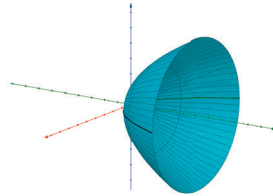


Figura 10.4: Superfície de revolução em torno do eixo Oy

Cujo volume do sólido obtido a partir da superfície de revolução, é:

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2 dy = \pi \int_0^1 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplo 49 Calcule o volume do sólido obtido através da rotação da curva $y = x + \cos(x)$ em torno do eixo Ox , com $0 \leq x \leq 4$.

Comecemos por fazer o esboço do gráfico da função $y = x + \cos(x)$, com $0 \leq x \leq 4$.

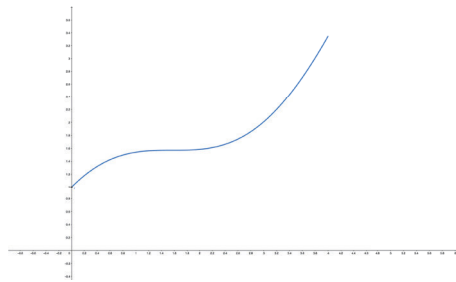


Figura 10.5: Gráfico da função $y = f(x)$

Ao efetuarmos uma rotação em torno do eixo Ox obtemos a superfície que se pode observar na figura. Considerando o sólido obtido a partir dessa superfície, o seu volume é igual a:

$$V = \pi \int_0^4 (x + \cos x)^2 dx = \pi \int_0^4 (x^2 + 2 \cos x + \cos^2 x) dx.$$

Atendendo a que

$$\begin{aligned} \int_0^4 \cos^2 x dx &= \int_0^4 \frac{1 + \cos(2x)}{2} dx = \left[\frac{x}{2} \right]_0^4 + \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^4 \\ &= 2 + \frac{1}{4} \sin(8), \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \left(\left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 + 2 [\operatorname{sen} x]_0^4 + 2 + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(8) \right) = \pi \left(\frac{64}{3} + 2 + 2 \operatorname{sen}(4) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(8) \right) \\
 &= \left(\frac{70}{3} + 2 \operatorname{sen}(4) + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(8) \right) \pi.
 \end{aligned}$$

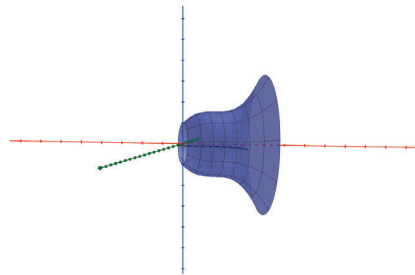


Figura 10.6: Superfície de revolução em torno do eixo Ox

Vejamos o caso em que temos duas funções:

Exemplo 50 Calcule o volume do sólido obtido através da rotação das curvas $y = \sqrt{25 - x^2}$ e $y = 3$ em torno do eixo Ox , com $-4 \leq x \leq 4$.

Comecemos por fazer o esboço do gráfico das funções.

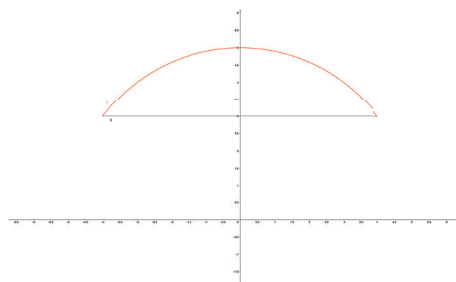


Figura 10.7: Gráfico da função $y = f(x)$

Ao efetuarmos uma rotação em torno do eixo Ox obtemos as superfícies que se podem observar na figura.

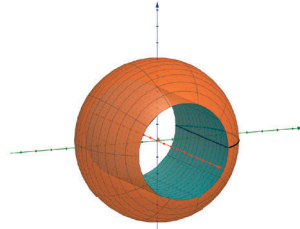


Figura 10.8: Superfície de revolução em torno do eixo Ox do gráfico da função $y = f(x)$

Considerando o sólido obtido a partir dessas superfícies, o seu volume é igual à diferença dos dois volumes obtidos a partir da rotação do gráfico de cada uma das funções. Assim

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^4 (\sqrt{25 - x^2})^2 dx - \pi \int_{-4}^4 3^2 dx &= \pi \int_{-4}^4 (25 - x^2) dx - 9\pi [x]_{-4}^4 \\ & &= 16\pi [x]_{-4}^4 - \frac{\pi}{3} [x^3]_{-4}^4 \\ & &= \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$

Capítulo 11

Área de um corpo de revolução

Consideremos a superfície de revolução obtida através da rotação da curva $y = f(x)$, em que f é uma função continuamente diferenciável num intervalo $[a, b]$. O valor da área da superfície, no intervalo $[a, b]$ pode ser calculada através do integral:

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

11.1 Exemplos

Exemplo 51 *Determine a área da superfície obtida fazendo girar a curva $y = 2\sqrt{ax}$ em torno do eixo Ox , quando x varia entre $x = a$ e $x = 3a$, com $a > 0$.*

Começemos por fazer o esboço do gráfico da função.

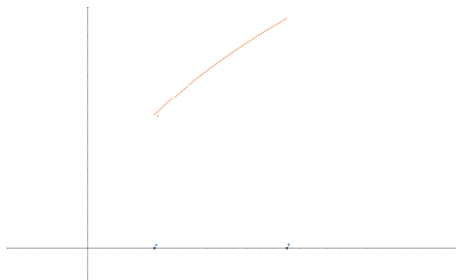


Figura 11.1: Gráfico da função $y = f(x)$, com $b = 3a$

Efetuada uma rotação em torno do eixo Ox , obtemos:

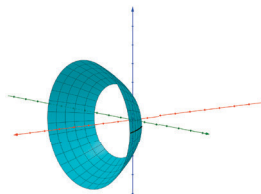


Figura 11.2: Superfície de revolução em torno do eixo Ox do gráfico da função $y = f(x)$

Aplicando a fórmula que nos dá a área de superfície, temos que calcular o integral:

$$A = 2\pi \int_a^{3a} f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Vamos começar por calcular e simplificar o radicando que se encontra na função integranda. Dado que $f(x) = 2\sqrt{ax}$, então $f'(x) = \frac{2a}{2\sqrt{ax}} = \frac{a}{\sqrt{ax}}$.

Logo,

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{a}{\sqrt{ax}}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{ax} = \frac{x+a}{x}.$$

Substituindo no integral, temos:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^{3a} 2\sqrt{ax} \sqrt{\frac{x+a}{x}} dx = 4\sqrt{a}\pi \int_a^{3a} \sqrt{a+x} dx \\ &= 4\sqrt{a}\pi \int_a^{3a} (a+x)^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Aplicando a regra da potência, facilmente se conclui que

$$A = \frac{8}{3}a^2\pi(8 - 2\sqrt{2}).$$

Exemplo 52 Calcule a área do toro obtido através da rotação da circunferência $x^2 + (y - 3)^2 = 4$ em torno do eixo Ox .

Começemos por fazer o esboço do gráfico da função.

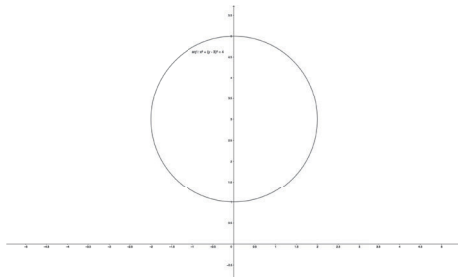


Figura 11.3: Gráfico da função $y = f(x)$

Ao efetuarmos uma rotação em torno do eixo Ox obtemos o toro que se pode observar na figura.

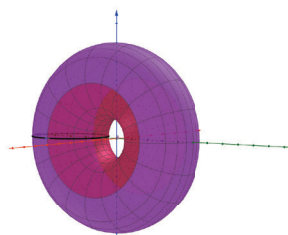


Figura 11.4: Superfície de revolução em torno do eixo Ox do gráfico da função $y = f(x)$

Atendendo à equação da circunferência, conclui-se que $y = 3 \pm \sqrt{4 - x^2}$. Como tal vamos considerar duas funções, $f(x) = 3 + \sqrt{4 - x^2}$ e $g(x) = 3 - \sqrt{4 - x^2}$.

O valor da área pretendido é dado pela soma dos integrais:

$$A = 2\pi \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx + 2\pi \int_{-2}^2 g(x) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx.$$

Para calcular o primeiro integral, vamos em primeiro lugar simplificar o radicando da função integranda. Assim:

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \right)^2 = 1 + \frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4}{4-x^2}.$$

Substituindo no integral obtemos:

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx &= 2\pi \int_{-2}^2 (3 + \sqrt{4 - x^2}) \sqrt{\frac{4}{4-x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-2}^2 (3 + \sqrt{4 - x^2}) \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade distributiva e separando em dois integrais, obtemos:

$$2\pi \int_{-2}^2 (3 + \sqrt{4-x^2}) \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2\pi \int_{-2}^2 \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} dx + 2\pi \int_{-2}^2 2 dx.$$

O segundo integral é imediato. Para calcular o primeiro integral vamos proceder à mudança de variável $x = 2 \cos t$. Assim $dx = -2 \sin t dt$, e, mudando os limites de integração, quando $x = -2$ obtemos que $t = \pi$, e quando $x = 2$ então $t = 0$. Voltando ao integral anterior,

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-2}^2 \frac{6}{\sqrt{4-x^2}} dx + 2\pi \int_{-2}^2 2 dx &= 12\pi \int_{\pi}^0 \frac{1}{\sqrt{4-4\cos^2 t}} 2 \cos t dt + 4\pi [x]_{-2}^2 \\ &= 12\pi \int_{\pi}^0 dt + 16\pi \\ &= 12\pi^2 + 16\pi. \end{aligned}$$

Assim

$$2\pi \int_{-2}^2 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 12\pi^2 - 16\pi.$$

De uma forma análoga podemos concluir que

$$2\pi \int_{-2}^2 g(x) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx = 12\pi^2 - 16\pi.$$

Logo o valor da área pretendido é:

$$A = 12\pi^2 + 16\pi + 12\pi^2 - 16\pi = 24\pi^2.$$

Capítulo 12

Exercícios propostos

Calcule os seguintes integrais definidos:

$$1.1. \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx \quad R : \frac{100}{3}$$

$$1.2. \int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5} dx \quad R : \operatorname{arctg}(3) - \operatorname{arctg}(2)$$

$$1.3. \int_1^2 \frac{1}{x+x^3} dx \quad R : \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}$$

$$1.4. \int_1^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \quad R : 2 - \ln\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$1.5. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}} dx \quad R : \frac{1}{3} \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$1.6. \int_1^{e-1} \ln(x+1) dx \quad R : 2 - \ln 4$$

$$1.7. \int_1^e \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx \quad R : 1 - \cos(1)$$

$$1.8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) dx \quad R : \frac{\pi}{2} - 1$$

$$1.9. \int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2} dx \quad R : \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$1.10. \int_1^e \ln^3(x) dx \quad R : 6 - 2e$$

$$1.11. \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad R : \frac{\pi}{4}$$

$$1.12. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx \quad R : \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

2. Calcule a área das regiões do plano limitadas pelas curvas:

- 2.1. $y = x^3$, $y = 8$ e $x = 0$ $R : A = 12$
- 2.2. $y^2 = 2x$ e $y = 2x - 2$ $R : A = \frac{9}{4}$
- 2.3. $y = -x^2 + 6x$ e $y = x^2 - 2x$ $R : A = \frac{64}{3}$
- 2.4. $y = x^3$, $y = x$ e $y = 2x$ $R : A = \frac{3}{2}$
- 2.5. $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$ e $y = 0$ $R : A = \frac{1}{3} + \ln 2$
- 2.6. $y = \ln x$, $y = \ln(x + 2)$, $y = \ln(4 - x)$ e $y = 0$ $R : A = 6 \ln 3 - 4 \ln 2 - 2$
- 2.7. $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x$ e $x = 0$ $R : A = 4 \arcsen(\frac{\sqrt{5}}{5})$
- 2.8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, com $a > b > 0$ $R : A = \pi ab$
- 2.9. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $R : A = \frac{3}{8} \pi a^2$
- 2.10. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x = 0$, $y = 0$ e $x = a$ $R : A = \frac{a^2}{2e}(e^2 - 1)$

3. Determine o comprimento dos arcos das curvas seguintes:

- 3.1. $y = \ln(\cos x)$, com $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ $R : L = \ln \frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$
- 3.2. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$, com $1 \leq x \leq e$ $R : L = \frac{e^2+1}{4}$
- 3.3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $R : L = 6a$
- 3.4. $ay^2 = x^3$, com $0 \leq x \leq 5a$ $R : L = \frac{335}{27}a$
- 3.5. $y = \ln x$, com $\sqrt{3} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ $R : L = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$
- 3.6. $y = 1 - \ln(\cos x)$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ $R : L = \ln(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8})$

4. Calcule o volume do sólido de revolução obtido através da rotação:

4.1. do segmento de reta que une a origem ao ponto (a, b) , em torno do eixo Oy .
 $R: \frac{1}{3}\pi a^2 b$

4.2. da circunferência $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, em torno do eixo Ox , com $b > a$.
 $R: 2\pi^2 a^2 b$

4.3. da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, em torno do eixo Ox , com $a, b > 0$.
 $R: \frac{4}{3}\pi a b^2$

4.4. do arco de parábola $y^2 = 4x$ com $x \leq 4$, em torno do eixo Ox .
 $R: 32\pi$

4.5. do hipociclóide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, em torno do eixo Ox .
 $R: \frac{32a^3}{105}\pi$

5. Calcule a área da superfície de revolução obtida através da rotação:

5.1. do segmento da reta $y = 2x$, com $0 \leq x \leq 2$, em torno do eixo Oy .
 $R: 4\pi\sqrt{5}$

5.2. da circunferência $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, em torno do eixo Ox , com $b > a$.
 $R: 4\pi^2 a b$

5.3. do arco de seno de equação $y = \text{sen}(x)$, com $0 \leq x \leq 2\pi$, em torno do eixo Ox .
 $R: 4\pi(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1))$

5.4. do arco de parábola $y^2 = 4ax$ com $0 \leq x \leq 3a$, em torno do eixo Ox .
 $R: \frac{56}{3}\pi a^2$

