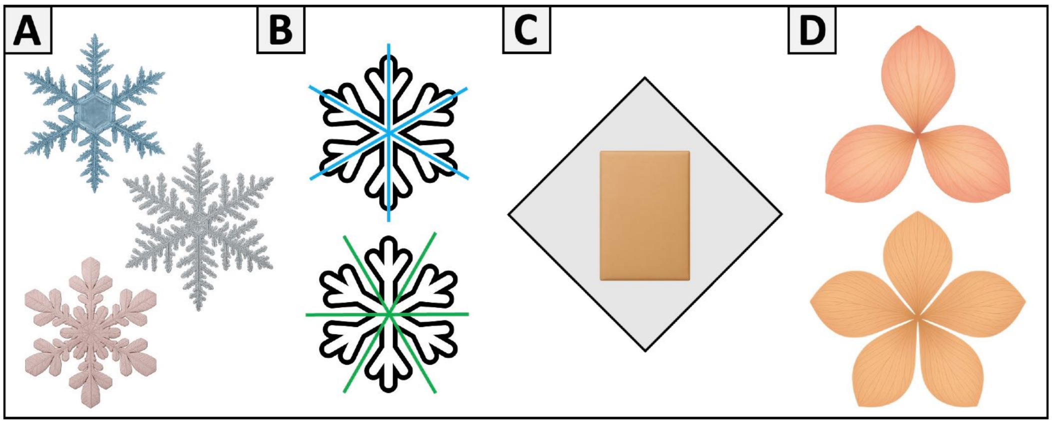
Um Natal com Matemática: das simetrias dos flocos de neve aos embrulhos económicos para presentes

Por: Ricardo Cunha Teixeira
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt



Entre a correria das últimas compras e os preparativos para a ceia de Natal, raramente nos apercebemos das muitas curiosidades matemáticas que surgem naturalmente nesta época festiva.

As receitas natalícias exigem, em muitos casos, conversões entre unidades de medida (por exemplo, 20 decilitros são 2 litros; meio litro corresponde a 500 mililitros; ...), a aplicação da regra de três simples (por exemplo, se para 1 quilograma de farinha preciso de 200 gramas de manteiga, então para 2 quilogramas de farinha vou precisar de quantos gramas de manteiga?) e uma gestão cuidada do tempo de cozedura. As luzes intermitentes da árvore de Natal seguem ciclos periódicos que podem ser descritos por funções trigonométricas. Até a música de fundo que ouvimos obedece a padrões rítmicos e harmónicos que podem ser estudados com a ajuda da Matemática. Outro tema interessante consiste na análise de simetrias.

No livro "Das calçadas aos ananases: investigar o mundo com um olhar matemático", das Letras Lavadas, disponível em https://www.letraslavadas.pt, o autor apresenta uma análise das simetrias de exemplos recolhidos das calçadas das nove ilhas dos Açores. Ora, esta análise pode também ser aplicada ao estudo das simetrias dos enfeites de Natal e dos próprios flocos de neve que abundam no nosso imaginário nesta altura do ano, apesar de nem sempre estarem ao nosso alcance (no contexto do espaço geográfico dos Açores, eventualmente no topo da montanha do Pico o contacto com flocos de neve reais poderá ser uma possibilidade no decorrer desta quadra festiva). Estão em causa sobretudo exemplos de rosáceas diedrais, que são figuras planas com simetrias de rotação (identificamos um motivo que se repete em torno de um ponto, o centro de rotação) e simetrias de reflexão ("simetrias de espelho"; se imaginarmos que dobramos a figura segundo um dos seus eixos de simetria, as duas metades sobrepõem-se por completo, como se fossem as asas de uma borboleta; os eixos de simetria da figura intersectam-se no centro de rotação da rosácea).

Em condições ideais de preservação, os flocos de neve apresentam uma simetria hexagonal (veja-se a figura A), com seis repetições de um mesmo motivo (podemos designar o motivo de forma simplificada por braço do floco de neve) e seis eixos de simetria de reflexão. O conjunto destas simetrias é descrito matematicamente pelo grupo diedral D6, que inclui seis simetrias de rotação (o ângulo mínimo de rotação é de 360/6 graus, ou seja, 60 graus) e seis simetrias de reflexão (três eixos de simetria cortam ao meio pares de braços opostos, enquanto os outros três separam braços consecutivos; veja-se a figura B).

No livro referido acima, o autor mostra como podemos embrulhar um presente de Natal poupando significativamente na fita adesiva. O método foi desenvolvido por Sara Santos, tendo sido adotado pela Amazon no embrulho de presentes. Em traços gerais, supondo que se pretende embrulhar uma caixa de base retangular, o método consiste em: 1) medir a diagonal do retângulo que constitui a base da caixa; 2) Medir a altura da caixa; 3) Adicionar o comprimento da diagonal da base à altura da caixa multiplicada por 1,5; 4) Cortar um quadrado de papel de embrulho com essa medida de lado.

Para embrulhar a caixa, esta deve ser posicionada no centro do quadrado de papel, alinhada com uma das suas diagonais (veja-se a figura C). Juntam-se duas pontas opostas do papel, com a ajuda de um pedaço de fita adesiva. Procede-se da mesma forma para as restantes duas pontas, recorrendo a um segundo pedaço de fita adesiva. Quando as pontas de papel ficam mais afastadas pode-se substituir um único pedaço de fita adesiva por dois pedaços mais pequenos, o que permite poupar ainda mais em termos do comprimento total da fita adesiva utilizada. Quando se juntam os pares de pontas opostas, há alguma sobreposição do papel de embrulho, mas não é muito significativa, pelo que este método também permite alguma poupança de papel. Quando a base da caixa a embrulhar é um quadrado, há uma única sobreposição do papel de embrulho quando se juntam as duas últimas pontas (poupando-se ainda mais papel neste caso) e, se o papel for riscado (formado por linhas paralelas), depois de o embrulho estar concluído, as riscas coincidem nas zonas onde se unem as extremidades do pedaço de papel. Este é, de facto, um método fantástico, sendo, contudo, pouco aplicado pelos consumidores, provavelmente por desconhecimento.

Desde então, a Amazon tem adotado outras medidas sustentáveis, destacando-se a utilização de inteligência artificial para escolher automaticamente o tamanho da caixa de envio adequado a cada produto, reduzindo o papelão e fita gastos.

Se a caixa que queremos embrulhar para oferta não tiver o formato de um paralelepípedo retângulo (formato habitual da maioria das caixas como, por exemplo, as caixas de cereais), o método anterior já não se aplica. Curiosamente, há quem se tenha dedicado a investigar as dimensões mais adequadas para a folha de papel de embrulho a utilizar para cada formato de caixa. Se a caixa for cilíndrica (como acontece com algumas caixas de amêndoas de chocolate), o papel de embrulho deve ser retangular, sendo o comprimento de um dos lados igual à soma da altura do cilindro com o diâmetro da sua base e o comprimento do outro igual ao perímetro da base. Quando a caixa é um prisma triangular regular (como as caixas de chocolates da marca Toblerone), o papel de embrulho deve ser novamente retangular, em que o comprimento de um dos lados é a altura do prisma mais dois terços da altura do triângulo equilátero que forma a base e o comprimento do outro lado igual ao perímetro desse triângulo equilátero.

E se a caixa for esférica? Em termos matemáticos, uma esfera é o sólido geométrico com a menor área de superfície para um dado volume. À primeira vista, isto parece ótimo para poupar papel de embrulho. Mas quem já tentou embrulhar uma bola de futebol, por exemplo, sabe que não é uma tarefa fácil! Isto porque é matematicamente impossível embrulhar uma esfera de forma perfeita com uma folha de papel retangular.

A explicação está na curvatura gaussiana: este número indica quão curva é uma superfície num ponto. Numa esfera, a curvatura é sempre positiva; já no papel de embrulho, que é plano, este valor é sempre zero. Assim, o papel de embrulho nunca conseguirá adaptar-se sem enrugar à curvatura tridimensional da esfera. Mesmo assim, há duas soluções práticas para embrulhar uma esfera de forma aceitável com papel de embrulho retangular.

Método do quadrado: corta-se um quadrado de papel com lado igual a 2,25 vezes o diâmetro da esfera; coloca-se a esfera no centro e juntam-se as quatro pontas no topo da esfera, moldando depois os inevitáveis "bicos" salientes.

Método do retângulo: cortar um retângulo com um lado igual a 3,14 vezes o diâmetro da esfera e o outro com metade dessa medida. Enrola-se a esfera como se fosse um cilindro e depois fecham-se suavemente as extremidades.

Ambos os métodos usam praticamente a mesma quantidade de papel. Assim, a escolha depende apenas da estética… e da paciência!

Uma alternativa excêntrica consiste em recorrer a papel de embrulho com um formato diferente, inspirado na disposição das pétalas de uma flor (veja-se a figura D), sendo que quantas mais pétalas, mais perfeito ficará o embrulho!

Mas a Matemática não surge no Natal apenas como um conjunto de curiosidades, mesmo que algumas sejam divertidas e até úteis para o nosso bolso. A verdade é que a Matemática desempenha um papel muito importante nesta altura do ano, mediante a aplicação de teorias que foram desenvolvidas ao longo dos séculos por matemáticos, embora a generalidade dos consumidores não se aperceba do impacto desta ciência nas suas vidas. Por exemplo, as redes logísticas associadas à distribuição de encomendas (que todos queremos que cheguem a tempo, com custo de transporte reduzido) são frequentemente modeladas por grafos, nos quais se aplicam algoritmos de otimização que determinam caminhos de custo mínimo entre pontos da rede. Por seu turno, o comportamento das filas nas lojas é modelado com frequência por processos estocásticos, que permitem analisar tempos de espera e taxas de atendimento. Já as compras online só são seguras graças à criptografia RSA, baseada em resultados de aritmética modular e na dificuldade computacional associada à fatorização de números inteiros grandes.

No fundo, a Matemática revela-se de forma natural em múltiplas situações do quotidiano natalício, desde simples curiosidades até aplicações concretas, nas quais estudos desenvolvidos ao longo dos séculos assumem um papel fundamental e contribuem para a melhoria da qualidade de vida da nossa sociedade. E talvez seja reconfortante saber que, por detrás da azáfama e do caos aparente do Natal, há sempre um pouco de ordem cuidadosamente calculada com a ajuda da Matemática.