

O problema do burro e da mula: de Euclides ao universo mágico de Harry Potter



Ricardo Cunha Teixeira

Professor do Departamento de Matemática e Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Um burro e uma mula caminham juntos, carregando, cada um, sacos muito pesados. O burro começa a lamentar-se do seu pesado fardo. A mula interrompe-o irritada, dizendo: “De que te queixas? Os sacos são todos iguais. Se eu te der um dos meus sacos, a tua carga passa a ser igual à minha. Mas se me deres um dos teus sacos, a minha carga passa a ser o dobro da tua.” (figura A). Quantos sacos tem cada animal?

Para descobrirmos a solução deste problema, podemos fazer várias tentativas ou, em alternativa, recorrer a um sistema de duas equações e duas variáveis x e y , representando x o número de sacos do burro e y o número de sacos da mula (figura B). A resposta correta atribui 5 sacos ao burro e 7 sacos à mula. De facto, se a mula der um saco ao burro, os dois ficam com a mesma quantidade de sacos (6 sacos). Mas se o burro der um saco à mula, ele fica com 4 sacos e a mula com 8 sacos, em que 8 é o dobro de 4 (ou seja, 8 é igual a duas cópias de 4).

A primeira referência a esta família de problemas é atribuída a Euclides, que viveu entre meados do século IV a.C. e meados do século III a.C. A sua obra “Elementos” constitui um dos maiores legados da Grécia Antiga. Só para o leitor ter uma ideia, esta foi a obra mais amplamente divulgada de todos os tempos, logo a seguir à Bíblia. No volume VIII da versão publicada em 1916 por J. L. Heiberg e H. Menge, intitulada “Euclidis Opera Omnia”, o problema surge nas páginas 286 e 287, em grego e latim. Em vez de sacos, os animais transportam recipientes com vinho, mas a relação entre as quantidades de vinho é a mesma: “Se eu te der uma medida de vinho, a tua carga passa a ser igual à minha. Mas se me deres uma medida de vinho, a minha carga passa a ser o dobro da tua.”

A generalização deste problema para dois indivíduos foi estudada por David Singmaster (1938-2023), matemático de renome conhecido pela sua paixão pela Matemática Recreativa. Nesta generalização, uma personagem diz à outra: “Se eu te der A daquilo que tenho, a tua carga passa a ser B vezes a minha. Mas se me deres C daquilo que tens, a minha carga passa a ser D vezes a tua.” Normalmente, os quatro parâmetros são listados da seguinte forma: (A,B,C,D). Por exemplo, para o problema apresentada no primeiro parágrafo deste texto, os quatro parâmetros são (1,1;1,2): “Se eu te der 1 daquilo que tenho, a tua carga passa a ser 1 vezes a minha (ou seja, a tua carga é igual à minha). Mas se me deres 1 daquilo que tens, a minha carga passa a ser 2 vezes a tua.”

Surgiram outras variantes deste problema ao

A

Se eu te der um dos meus sacos, a tua carga passa a ser igual à minha.

Mas se me deres um dos teus sacos, a minha carga passa a ser o dobro da tua.

B

$x \rightarrow$ número de sacos do burro $y \rightarrow$ número de sacos da mula

$$\begin{cases} x + 1 = y - 1 \\ 2(x - 1) = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ 2(x - 1) = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ 2(y - 2 - 1) = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ 2(y - 3) = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ 2y - 6 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - 2 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \end{cases}$$

longo da História. Por exemplo, o matemático grego Diofanto de Alexandria, que nasceu entre 201 e 214 e morreu entre 284 e 298, terá também explorado esta família de problemas. No livro I da sua obra “Aritmética”, o problema 15 localizado nas páginas 134 e 135 versa os parâmetros (30,2;50,3): “Se eu te der 30, a tua parte passa a ser 2 vezes a minha. Mas se me deres 50, a minha parte passa a ser 3 vezes a tua.” As equações $x+30=2(y-30)$ e $3(x-50)=y+50$ caracterizam as duas relações apresentadas. Ao resolver o sistema correspondente, obtêm-se os valores 98 e 94 que constituem a solução do problema.

Passamos à análise de um exemplo proveniente do manuscrito escrito em latim “Propositiones ad Acuendos Juvenes” (“Problemas para aguçar a mente dos jovens”). A cópia mais antiga deste manuscrito data do final do século IX. A sua autoria é atribuída a Alcuíno de Iorque (cerca de 735-804), um clérigo, poeta e professor de inglês de Iorque, Nortúmbria, um dos reinos que deu origem à atual Inglaterra. Uma das traduções desse texto foi publicada em 1992, no jornal “The Mathematical Gazette”, por John Hadley e David Singmaster. No artigo publicado na edição do Correio dos Açores de 7 de abril de 2022, analisámos os problemas 17, 18 e 19 do manuscrito, que pertencem à família de quebra-cabeças designada por “problemas de travessia de rio”. Já o problema 16 pertence à família dos “problemas do burro e da mula” e traduz-se no seguinte desafio. Dois homens estão a transportar bois ao longo de uma estrada. Um diz ao outro: “Dá-me dois bois e ficarei com o mesmo número de bois que tens.” O outro responde prontamente: “Dá-me tu dois bois, pois assim ficarei com o dobro dos bois que tens.” Quantos bois tem cada um? Este problema com os parâmetros (2,1;2,2) traduz-se nas equações $x+2=y-2$ e $2(x-2)=y+2$, que conduzem aos valores 10 e 14.

Até agora apresentamos exemplos em que os dois valores da solução são números inteiros. Em seguida, analisamos uma situação em que os valores obtidos não são inteiros.

Leonardo de Pisa (cerca de 1170-1250),

mais conhecido por Fibonacci, foi um importante matemático da Idade Média. A sua obra mais marcante intitula-se “Liber Abaci” (“Livro de Cálculo”) e contém uma parte dedicada à resolução de problemas. Em particular, Fibonacci apresenta um problema envolvendo coelhos que ficou célebre por introduzir a sucessão conhecida por sucessão de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...), em que cada termo se obtém da soma dos dois anteriores (por exemplo, $3+5=8$, $5+8=13$ e $8+13=21$). Os números desta sucessão surgem recorrentemente na Natureza, facto que tem entusiasmado matemáticos, biólogos, físicos e curiosos em geral. Na segunda parte do livro “Das calçadas aos ananases: investigar o mundo com um olhar matemático”, da editora Letras Lavadas, disponível para venda em letras-lavadas.pt, apresentam-se numerosos exemplos da ocorrência dos números de Fibonacci na Natureza.

No contexto deste texto, interessa-nos analisar outros problemas propostos por Fibonacci, que pertencem à família dos “problemas do burro e da mula”. Na edição de 2002 publicada por L. E. Sigler e intitulada “Fibonacci’s Liber Abaci”, explora-se em grande detalhe um leque variado de problemas desta família. Vamos considerar um desses problemas, apresentado nas páginas 290 e 291, em que Fibonacci recorre aos parâmetros (7,5;5,7). Dois homens têm alguns denários (o sistema monetário romano incluía o denário, uma pequena moeda de prata que era a de maior circulação no Império Romano). Um diz ao outro: “Se me deres 7 dos teus denários, ficarei com 5 vezes mais dinheiro que tu.” O outro responde: “E se me deres 5 dos teus denários, ficarei com 7 vezes mais dinheiro que tu.” As equações $x+7=5(y-7)$ e $7(x-5)=y+5$ conduzem a dois números que não são inteiros: $121/17$ (o que corresponde a 7 unidades mais $2/17$ de outra unidade) e $167/17$ (9 unidades mais $14/17$ de outra unidade).

Isto significa que o primeiro homem tem 7 denários e $2/17$ de outro denário e o segundo homem tem 9 denários e $14/17$ de outro denário.

Repare-se que os valores da solução são expressos em frações da unidade monetária, dividindo essa unidade em dezassete partes, o que é pouco comum no dia a dia. Na verdade, não se conhece um sistema monetário aplicado ao longo da História que divida a sua unidade básica em dezassete unidades menores. Por exemplo, na Zona Euro, considera-se o cêntimo como uma subunidade do euro, que corresponde à sua centésima parte (1/100): divide-se o euro em 100 partes e cada uma delas é um cêntimo. No sistema monetário britânico, antes da adoção do sistema decimal em 1971 que é análogo ao da Zona Euro, uma libra valia vinte xelins (ou seja, cada xelim era $1/20$ de uma libra). Por sua vez, cada xelim valia doze pence (isto é, cada um deles era $1/12$ de um xelim).

O investigador croata Tomislav Doslic publicou em 2003 um texto onde analisa o problema de Fibonacci com os parâmetros (7,5;5,7) e propõe um sistema monetário em que a solução possa ser aplicada em termos práticos: o sistema monetário do universo mágico de Harry Potter! As moedas de ouro são os galeões; as de prata, os leões; e as de bronze, os janotas. Em “Harry Potter e a Pedra Filosofal”, o gigante Hagrid explica a Harry como funciona o dinheiro dos feiticeiros: um galeão vale 17 leões (ou seja, cada leão é $1/17$ de um galeão) e um leão vale 29 janotas (cada janota é $1/29$ de um leão).

Assim, no universo de Harry Potter, o problema de Fibonacci pode assumir a seguinte formulação. Um feiticeiro diz ao outro: “Dá-me 7 galeões e serei 5 vezes mais rico que tu!” E o outro responde: “O melhor é dares-me 5 galeões para que eu fique 7 vezes mais rico que tu!” Quanto dinheiro tem cada feiticeiro?

A resposta já não nos parece tão estranha: o primeiro feiticeiro tem 7 galeões e 2 leões (que são $2/17$ de um galeão) e o outro tem 9 galeões e 14 leões (que são $14/17$ de um galeão).

Sem dúvida que esta família de problemas tem atraído numerosos entusiastas ao longo da História. Desafia-se o leitor a explorar e criar mais variantes!