Os quatro 4

Helena Sousa Melo*

Sendo hoje o dia 4 de setembro, final de férias para alguns, vamos ainda brincar um pouco com os números através de um quebra-cabeças. Existem vários tipos, mas há um de que gosto muito em particular, o problema dos quatro 4.

O objetivo deste problema é obter números inteiros através de expressões aritméticas usando apenas quatro algarismos 4, ou a sua concatenação, por exemplo, 44, ou 444, e as quatro operações aritméticas elementares: adição (+), subtração (–), multiplicação (x) e divisão (/). No entanto, também podemos utilizar alguns símbolos matemáticos. Esses símbolos são: o símbolo de fatorial (!), em que 4! = 28; o símbolo da raiz quadrada, que nesse texto, por impossibilidade de simbologia, é representado por (Rq), onde Rq(4) expressa a raiz quadrada de 4 que é igual a 2; e o símbolo (^) como representante da exponenciação, no qual 4^4 indica o número 4 elevado a quarta potência, o que corresponde a 4x4x4x4 = 256. Por vezes utilizamos outros símbolos e sinais matemáticos para podermos atingir o propósito do problema, tais como o log (logaritmo) e *i*, a unidade imaginária que corresponde a Rq(-1). Observamos que *i*^2 = -1 e que *i*^4 = 1.

Nestas expressões aritméticas o número de parêntesis não é limitado e para facilitar o cálculo de tais expressões, recorreremos a utilização de alguns parêntesis para indicar a ordem com que as operações dever ser efetuadas. Ou seja, se tivermos 4–((4+4)/4), então devemos calcular primeiramente (4+4) = 8, depois fazer 8/4, que é igual a 2, e finalmente resolver 4-2, para então obter o resultado final, o número 2.

Relembrando um pouco o que representa o fatorial (!), temos que na matemática o fatorial de um número natural *n*, representado por *n!*, é o produto de todos os inteiros positivos menores ou iguais a *n*. Essa notação, *n!*, foi introduzida pelo matemático francês Christian Kramp (8/7/1760 – 13/5/1826) em 1808. Assim, o fatorial de 7, 7!, é igual a 7x6x5x4x3x2x1. Se fizermos algumas operações aritméticas com os fatoriais, como por exemplo a divisão, temos, no caso de 8!/5! que o quociente é 8x7x6, visto que 8!/5! = (8x7x6x5x4x3x2x1)/(5x4x3x2x1) = ((8x7x6)x(5x4x3x2x1))/(5x4x3x2x1), e, simplificando o numerador e o denominador dessa fração, obtemos apenas 8x7x6, uma vez que (5x4x3x2x1)/(5x4x3x2x1) = 1.

O problema dos quatro 4 foi apresentado por Malba Tahan, o heterônimo de Júlio César de Mello e Souza, um professor de matemática brasileiro nascido a 6 de maio de 1895 e falecido a 18 de junho de 1974, em uma das suas obras intitulada *O Homem que Calculava*. O problema consiste em formar expressões aritméticas utilizando apenas quatro algarismos 4, em que cada uma das expressões é equivalente a cada um dos números inteiros positivo. Por exemplo: 4+4+4–4 = 8.

Segundo Malba Tahan, podemos expressar todos os números inteiros entre 0 e 100, utilizando, apenas quatro 4 e quaisquer símbolos e operações matemáticas, sem a invenção de novas operações.

O problema aparece no 7.º capítulo do livro, com o título de "*o caso dos quatro quatros*". Mediante a história que se desenrola, uma das personagens, Beremiz, o calculista, interessou-se por um elegante turbante azul-claro que um sírio, meio corcunda, oferecia por 4 dinares. A tenda desse mercador era, aliás, muito original, pois tudo ali (turbantes, caixas, punhais, pulseiras, etc.) era vendido por 4 dinares. Havia um letreiro, em letras vistosas, que dizia: "Os Quatro Quatros". Uma espantosa coincidência, digna de atenção, pois a legenda que figura nesse letreiro recorda uma das maravilhas do cálculo: podemos formar um número qualquer empregando quatro quatros. Daí por diante, a história apresenta algumas soluções para o enigma em questão, iniciando no zero, a mais simples das expressões, como 44 – 44. De seguida é apresentado, no texto, o número 1, em forma de fração, como o quociente da divisão de 44 por 44. Depois o número 2, como a soma das duas frações formadas por numerador e denominador iguais a 4, ou seja, (4/4)+(4/4). Logo após o número 3, dado pela expressão: (4+4+4)/4. O número 4 é expresso por 4+(4–4)/4. Os números a seguir ao 5 e até ao 10, são expressos por: (4x4+4)/4 = 5; 4+((4+4)/4) = 6; (44/4)–4 = 7; 4+4+4–4 = 8; 4+4+(4/4) = 9; e (44–4)/4 = 10. Nesse dado momento, o dono da tenda, que até então estivera a acompanhar a explicação do calculista em respeitoso silêncio e interesse, resolve, observando o quão exímio era nas contas e nos cálculos, dar ao calculista o turbante de presente (figura 1).

Até aqui apresentamos a solução do problema para os números de 0 a 10. Vamos ver como podemos solucioná-lo para os valores entre 11 e 20, mas, para tal, iremos recorrer aos símbolos de fatorial (!) e de raiz quadrada (Rq).

Assim, o número 11 é igual ao quociente da divisão de 44 pela raiz quadrada do produto de 4 multiplicado por 4, ou seja, 44/(Rq(4x4)), pois sendo a raiz quadrada de 16 igual a 4, temos que 44/4 = 11. O número 12 é igual a (44+4)/4. O número 13 é igual a 4!–(44/4). O número 14 é igual a 4+4+4+Rq(4). O número 15 é igual a 4+(44/4). O número 16 é igual a ((Rq(4))^4)+4–4. O número 17 é igual 4!–((4!+4)/4). O número 18 é igual a (4!+4!+4!)/4. O número 19 é igual a 4!–4–(4/4). O número 20 é igual a ((4/4)+4)x4.

Muitos se entusiasmaram e têm tentado resolver o problema dos "quatro 4" para além do pretendido. Uma solução geral para este problema foi proposta por Rui Chamas e Roger Chamas (figura 2).

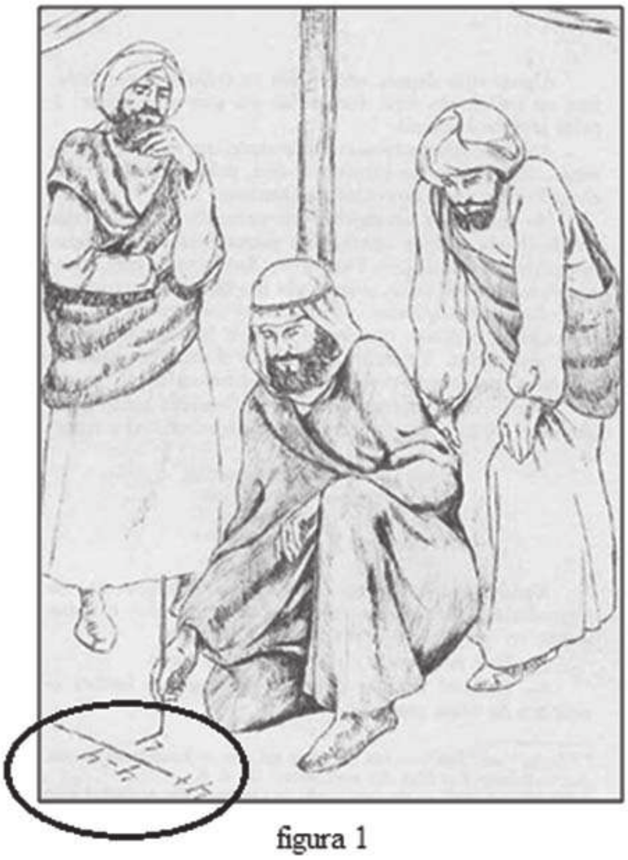

figura 1

Como curiosidade apresentaremos alguns números primos que resultam de expressões aritméticas interessantes. Os números primos compreendidos entre 0 e 100 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Assim, iniciamos pelo número 23 que é igual a 4!–(4^(4–4)), pois como 4! = 24 e 4^0 = 1 temos 23 = 24–1. O próximo primo é o número 29 que é igual a expressão 4!+4+(4/4), ou seja, 24+4+1. O número 31 é expresso por ((4+Rq(4))!+4!)/4!. Essa expressão corresponde a divisão de (4+2)!+4! por 4!, resultando (6!+4!)/4! que é igual a, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição, 6!/4! + 4!/4!, que corresponde a 6x5+1 = 31. Finalizamos essa informação com o primo 53 que utiliza o símbolo *i*, representativo da unidade imaginária. Assim, 53 = (4!xRq(4))+4+(*i*^4), ou seja, 24x2+4+(1) = 48+4+1= 53.

Ainda faltam alguns números até 100. O desafio fica aqui lançado. Você é capaz de vencê-lo? E se o desafio fosse considerado para cinco 5. Seria mais fácil ou mais difícil?

*hmelo@uac.pt
Professora Auxiliar
CMATI / Departamento de Matemática
Universidade dos Açores

$$n = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{4}}}}}_{\text{n raízes quadradas}}\right)$$

$$1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^1}\right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^1}\right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 \sqrt{4}\right)$$

$$2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 \sqrt{\sqrt{4}}\right)$$

...

$$n = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \log_{\frac{1}{2}}\left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 4^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}\right) = \log_{\frac{\sqrt{4}}{4}}\left(\log_4 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\cdots\sqrt{\sqrt{4}}}}}_{\text{n raízes quadradas}}\right)$$

figura 2