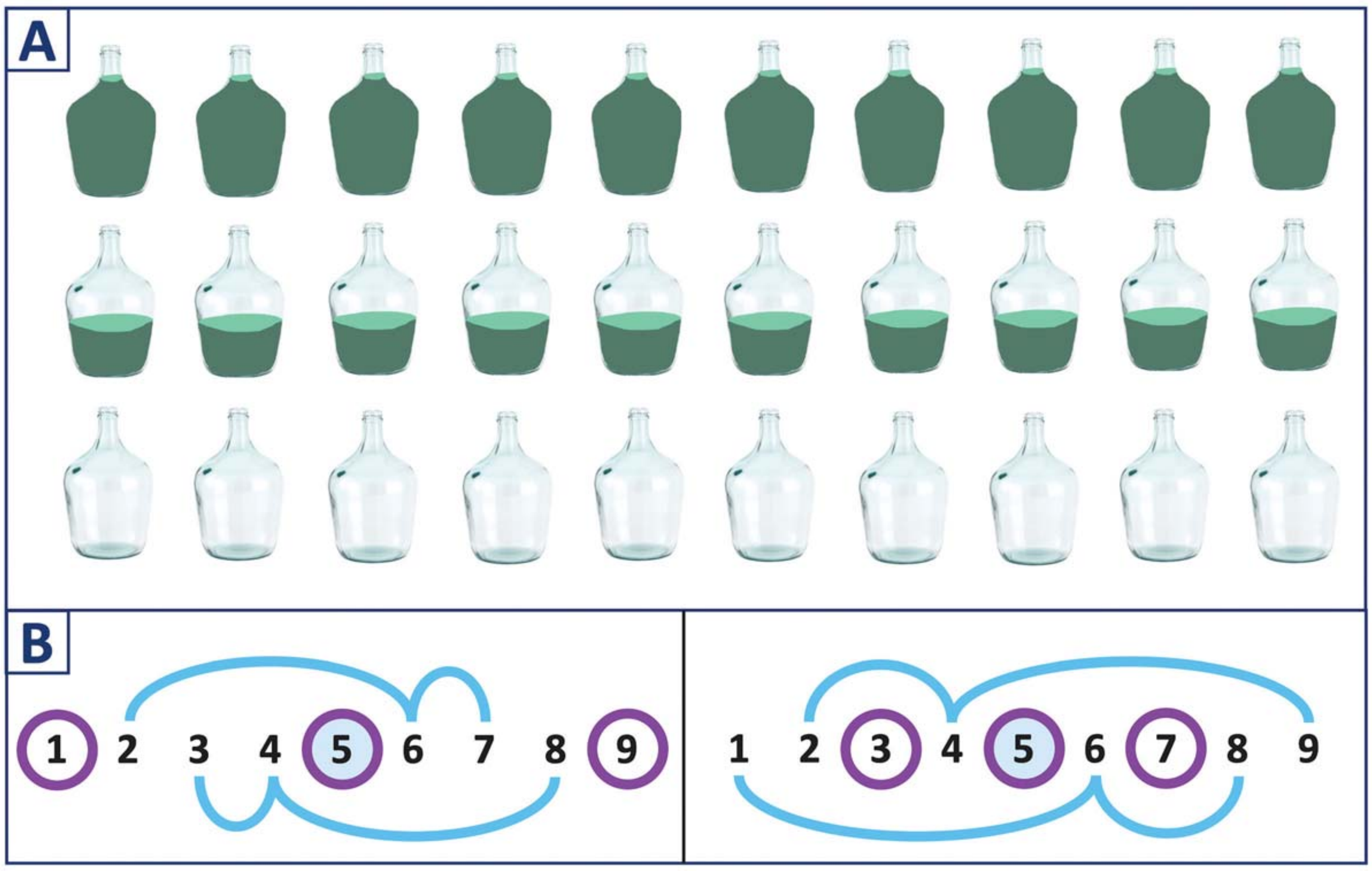
Heranças, barris e vinho

Por: Ricardo Cunha Teixeira
Professor do Departamento de Matemática e Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt



Alcuíno de Iorque (cerca de 735-804) foi um clérigo e professor de Iorque, Nortúmbria, um dos reinos que deu origem à atual Inglaterra. A Alcuíno é atribuída a autoria do manuscrito "Problemas para aguçar a mente dos jovens", que apresenta uma compilação de interessantes quebra-cabeças. Muitos deles conseguiram resistir à passagem do tempo e continuam a maravilhar os apaixonados pela Matemática Recreativa, integrando manuais escolares e livros de desafios matemáticos.

Uma das traduções do manuscrito de Alcuíno foi publicada em 1992, por John Hadley e David Singmaster. No artigo disponível na edição do Correio dos Açores de 7 de abril de 2022, analisámos os problemas 17, 18 e 19 do manuscrito, que pertencem à família de quebra-cabeças designada por "problemas de travessia de rio". Já o problema 16 pertence à família dos "problemas do burro e da mula" e foi analisado na edição do Correio dos Açores de 6 de abril de 2023. Mas muitos outros desafios do manuscrito de Alcuíno são merecedores da nossa atenção.

Dedicamos este artigo à família de quebra-cabeças envolvendo "problemas de partilha de barris". O primeiro problema desta família deve ter surgido precisamente no manuscrito de Alcuíno. Trata-se do problema 12, que nos lança o seguinte desafio. Um pai, ao morrer, deixou aos seus filhos 30 garrafões de vidro, dos quais 10 estão cheios de azeite, 10 estão pela metade e os últimos 10 estão vazios (figura A). Como distribuir os recipientes e o azeite, de modo que cada um dos três filhos receba de herança igual quantidade de vidro e de azeite?

Ora, como são três filhos e 30 garrafões ao todo, naturalmente uma divisão por partilha equitativa coloca cada herdeiro com 10 garrafões. O problema está na divisão do azeite. Como podemos garantir que cada filho fica com a mesma quantidade de azeite? Desafia-se o leitor a pensar numa solução antes de continuar a ler este texto.

Já descobriu uma solução? Um procedimento possível é o seguinte: o primeiro filho fica com os 10 garrafões meio cheios; depois, o segundo fica com 5 garrafões cheios e 5 vazios; o mesmo para o terceiro; desta forma, todos os três filhos ficam com a mesma quantidade de azeite e de vidro.

Na verdade, existem cinco soluções que se baseiam na distribuição dos garrafões cheios. A solução acima pode ser representada por 5-5-0, pois dois filhos ficam com 5 garrafões cheios cada um (e com 5 garrafões vazios) e o outro filho fica com 0 garrafões cheios (e com 10 garrafões meio cheios). Tendo por base a distribuição dos recipientes cheios pelos três irmãos, as restantes soluções são 5-4-1, 5-3-2, 4-4-2 e 4-3-3.

Por exemplo, a solução 5-4-1 corresponde a 5 garrafões cheios (e 5 vazios) para um filho, 4 garrafões cheios (2 garrafões meio cheios e 4 garrafões vazios) para outro e 1 garrafão cheio (8 garrafões meio cheios e 1 garrafão vazio) para o último. Todos os herdeiros ficam com 10 garrafões e com uma quantidade de azeite correspondente ao conteúdo de 5 garrafões cheios (que é o mesmo conteúdo de 4 garrafões cheios e 2 garrafões meio cheios e de 1 garrafão cheio e 8 garrafões meio cheios).

Já a solução 4-3-3 corresponde a 4 garrafões cheios (2 garrafões meio cheios e 4 vazios) para um filho, 3 garrafões cheios (4 garrafões meio cheios e 3 garrafões vazios) para outro e 3 garrafões cheios (4 garrafões meio cheios e 3 garrafões vazios) para o último. Novamente, todos os herdeiros ficam com 10 garrafões e com uma quantidade de azeite correspondente ao conteúdo de 5 garrafões cheios (que é o mesmo conteúdo de 4 garrafões cheios e 2 garrafões meio cheios e de 3 garrafões cheios e 4 garrafões meio cheios).

O problema 51 do manuscrito de Alcuíno constitui também uma variante desta tipologia de quebra-cabeças. Um moribundo deixou para os seus filhos 4 barris de vinho. O primeiro barril tinha 40 medidas de vinho, o segundo 30, o terceiro 20 e o quarto 10. Como distribuir os barris e o vinho, de modo que cada um dos quatro filhos receba de herança igual quantidade de recipientes e de vinho?

Note-se que a solução não depende da medida de vinho usada (por exemplo, pode ser o litro, se pensarmos numa unidade de medida de capacidade usada nos dias de hoje). Ora, a soma das medidas de vinho dos 4 barris é igual a 100. Como são quatro herdeiros, numa divisão por partilha equitativa, cada um deve receber 25 medidas de vinho. Além disso, 50 é o dobro de 25 e, portanto, a herança que caberá a cada par de filhos é de 50 medidas. Sendo assim, uma possível estratégia passa por considerar pares de barris que, em conjunto, totalizem 50 medidas. O primeiro barril tem 40 medidas de vinho e o quarto 10. Estes barris são atribuídos a dois dos filhos. Em seguida, despeja-se parte do vinho do recipiente que tem mais líquido para o outro até que ambos fiquem com a mesma quantidade de vinho (25 medidas). O procedimento é idêntico para os outros dois barris. De facto, o segundo barril tem 30 medidas de vinho e o terceiro 20, devendo ser atribuídos aos outros dois filhos. Os dois barris totalizam 50 medidas. Resta despejar parte do vinho do recipiente que tem mais líquido para o outro até que ambos fiquem com a mesma quantidade de vinho (25 medidas). Ao contrário do primeiro problema, a solução apresentada para este problema implica alterar o conteúdo dos recipientes.

Os "problemas de partilha de barris" tornaram-se muito populares na Europa. Numa obra compilada no século XIII, o abade Alberto de Stade, uma cidade do norte da Alemanha, apresenta 13 problemas recreativos. Um dos problemas envolve 9 barris de vinho contendo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 medidas de vinho. Pretende-se distribuir igualmente os barris e o vinho por três irmãos. Para resolvermos este problema, devemos começar por adicionar todas as medidas de vinho.

Podemos recorrer à seguinte estratégia de cálculo: 1+9=10; 2+8=10; 3+7=10; 4+6=10; 4x10+5=45. Assim, temos ao todo 45 medidas de vinho. Por isso, cada irmão deve ficar com 15 medidas (dividimos 45 por 3). Como cada um deve ficar com 3 barris (dividimos 9 por 3), basta organizarmos os barris em grupos de três, tendo cada grupo um total de 15 medidas. Será possível? Ou seja, por outras palavras, com os números naturais, do 1 ao 9, será que conseguimos usar cada número uma e uma só vez de modo a formarmos três trios cuja soma seja 15? A resposta é afirmativa: 1+5+9=15; 2+6+7=15; e 3+4+8=15. E a solução não é única! Outra solução é a seguinte: 1+6+8=15; 2+4+9=15; e 3+5+7=15.

Em ambas as soluções, a escolha dos números que formam os trios obedece a padrões interessantes (figura B): no trio com o 5, os restantes dois números estão a igual distância do 5; as posições dos números dos outros dois trios obtêm-se um do outro aplicando uma meia-volta em torno do 5 (o que pode ser facilmente verificado se o leitor virar a página do jornal de pernas para o ar).

Alberto apresenta outra variante desta tipologia de problemas.

Dois amigos cruzam-se numa estrada. Um traz consigo um garrafão grande, cheio de vinho, com a capacidade de 8 medidas. O outro tem dois garrafões vazios com menor capacidade: um garrafão médio, que leva 5 medidas, e um garrafão pequeno, que leva 3 medidas.

O segundo pede ao primeiro metade do seu vinho.

O primeiro responde que só lhe dá metade do vinho se o amigo conseguir usar os seus garrafões vazios (o garrafão médio e o pequeno) para separar 4 medidas de vinho das 8 que estão no garrafão grande.

Para resolvermos o desafio, podemos começar por despejar vinho do garrafão grande para o médio até este ficar cheio.

O garrafão médio fica com 5 medidas de vinho e o grande com 3 medidas (8-5=3). Em seguida, usamos o conteúdo do garrafão médio para encher o garrafão pequeno.

Sendo assim, o garrafão pequeno fica com 3 medidas de vinho e o médio com 2 medidas (5-3=2). De imediato, passamos as 3 medidas de vinho do garrafão pequeno para o grande. Logo, o garrafão pequeno fica vazio e o grande passa a ter 6 medidas de vinho (3+3=6). Depois, passamos as 2 medidas de vinho que estão no garrafão médio para o garrafão pequeno. O garrafão médio fica vazio, podendo receber 5 medidas do garrafão grande (que fica apenas com 1 medida). Mas, o garrafão pequeno tem 2 medidas. Então podemos passar 1 medida de vinho do garrafão médio para o pequeno e o garrafão médio passa a ter as 4 medidas de vinho pretendidas! E se despejarmos as 3 medidas do garrafão pequeno para o grande, este fica também com 4 medidas. Terminamos, portanto, com 4 medidas de vinho no garrafão grande e outras 4 no médio.

Desafia-se o leitor a criar mais variantes destes problemas!