

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

Jornal das Primeiras

MATEMÁTICAS



QUADRADO



CÍRCULO



TRIÂNGULO
ISÓCELES



RETÂNGULO



HEXÁGONO



ELIPSE



PENTÁGONO

Número 15
Dezembro, 2020



Ludus

Temas da Matemática Elementar

DIAGRAMAS DE CAULE-E-FOLHAS

Alda Carvalho, Carlos Santos, Ricardo Cunha Teixeira

ISEL-IPL & CEMAPRE, ISEL & CEAFEL, NICA-UAc & FCT-UAc

alda.carvalho@isel.pt, carlos.santos@isel.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Resumo: *Este artigo apresenta breves considerações sobre a abordagem dos diagramas de caule-e-folhas nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Mostram-se exemplos de explorações e sugerem-se tarefas baseadas na abordagem clássica “concreto-pictórico-abstrato” (CPA), apresentando um cuidado esmerado com a ordem e com o faseamento e uma preocupação vincada com a oralidade e interpretação de situações diversificadas.*

Palavras-chave: Diagramas de caule-e-folhas, 1.º Ciclo do Ensino Básico, 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Introdução

O ser humano é um ser racional. Talvez as manifestações mais evidentes dessa racionalidade sejam a sua capacidade de *agrupamento* e a sua capacidade de *categorização*. Essas capacidades fazem com que seja capaz de se *organizar* mentalmente.

Há cerca de 17 300 anos, a famosa gruta de Lascaux em França era um local que concentrava o melhor que a humanidade fazia, tanto a nível artístico como científico. Na Figura 1, a beleza do veado fala por si. Abaixo, é possível observar treze pequenos círculos precedidos de um quadrado vazio. Qual o seu significado? A resposta é comum em vários objetos arqueológicos: catorze é sensivelmente metade de um ciclo lunar e o quadrado vazio simboliza muito provavelmente a Lua Nova [1]. Este tipo de informação era “ciência de ponta” há mais de quinze mil anos atrás.

O leitor deve reparar que, para verificar que se tratam mesmo de treze pequenos círculos, é preciso contar com cuidado. A gravura não contém nenhum *dispositivo de agrupamento* que auxilie a contagem. Poderiam ser apresentados dezenas de exemplos pré-históricos semelhantes.



Figura 1: Gruta de Lascaux.

Observe-se agora o cartoon exposto na Figura 2. Uma vez que os traços são apresentados em *grupos* de 5, a contagem torna-se mais simples; é fácil verificar que um dos prisioneiros colocou coisas desagradáveis no nariz do seu companheiro de cela durante 130 dias. O agrupamento faz com que baste um simples olhar e uma contagem com saltos fixos (neste exemplo, a ideia é efetuar uma contagem de 5 em 5 ou uma simples multiplicação por 5) para se chegar a essa conclusão.

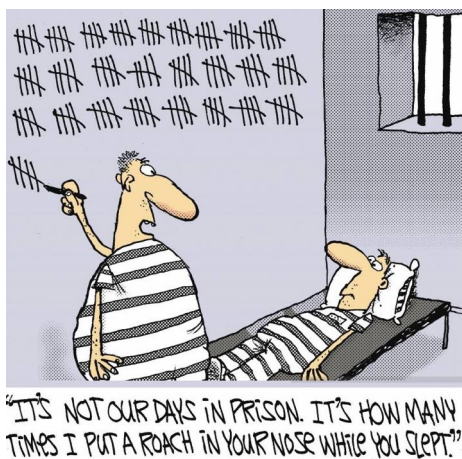


Figura 2: Registo em grupos de 5 (cartoon de McCoy, Glenn e Gary).

Embora esta forma básica de agrupamento seja bastante útil e esteja na base de vários sistemas de numeração, ainda não apresenta nenhum tipo de categorização. Os dias são todos iguais, não havendo nada que os distinga quanto à sua *natureza*. Uma categorização, tal como o nome indica, subentende a existência de categorias diferentes. Para melhor perceber um sistema de agrupamento que envolva também a ideia de categorização, consideremos o exemplo exposto na Figura 3, respeitante a um horário numa estação de comboios no Japão.



Figura 3: Horário numa estação de comboios no Japão.

A organização do horário segue a mesma lógica de um armário com gavetas. Cada gaveta do armário tem várias meias; as meias são separadas em gavetas diferentes *conforme a sua categoria*. Nesta metáfora, as “gavetas do armário” são as horas, variando entre as cinco da manhã e as zero horas (Figura 4).



Figura 4: Categorias: horas.

Além disso, cada linha do horário diz respeito a um intervalo de tempo de uma hora. Por exemplo, o período entre as 8h00 e as 9h00 está marcado a azul na Figura 5. A legenda (marcada a verde) indica a existência de quatro tipos de comboio. Sendo assim, pode ver-se que às 8h17 passa um comboio do terceiro tipo (rasurado); esse facto está marcado a vermelho. Resumindo, e de regresso à nossa metáfora, as “gavetas” são as horas e as “meias” são os minutos. Ou seja, uma vez que o 17 mencionado está na categoria do 8, a passagem de um comboio às 8h17 é assinalada.

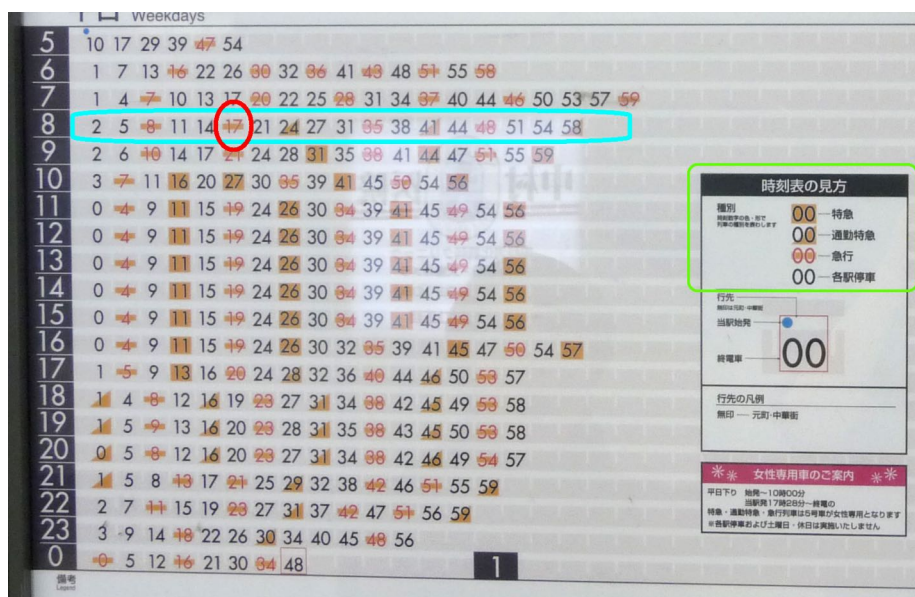


Figura 5: Subcategorias: minutos.

Considerando o sistema de numeração posicional decimal, facilmente se verifica que os números que utilizamos apresentam uma categorização natural. Tal como na representação 8h17, o 8 diz respeito às horas e o 17 aos minutos, num número como 27, o algarismo 2 representa duas dezenas e o algarismo 7 representa sete unidades. Tendo isso em conta, os chamados *diagramas de caule-e-folhas* (podiam chamar-se perfeitamente “diagramas de armário-e-meias”) apareceram e tornaram-se comuns na década de 1980, na sequência da publicação de um livro do estatístico norte-americano John Tukey em 1977 [6]. A lógica destes diagramas é muito similar à do horário de comboios apresentado.

Considere-se o conjunto de dados em bruto: 14, 14, 16, 23, 23, 17, 15, 39, 13, 21, 17, 14, 13, 6, 23, 14, 39, 9, 14, 13, 16. O *caule* apresenta os algarismos das dezenas (tal como as horas no “caule” do horário dos comboios) e as *folhas* são os algarismos das unidades (tal como os minutos são as “folhas” do horário dos comboios). Tendo isso em mente, a Figura 6 ilustra um diagrama não ordenado.

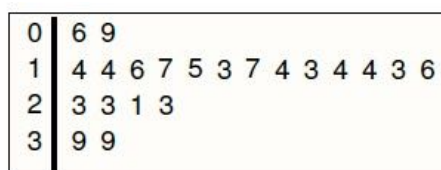


Figura 6: Diagrama não ordenado.

Organizando as folhas por ordem crescente, obtém-se o diagrama exposto na Figura 7, que se designa por *diagrama de caule-e-folhas*. Por exemplo, os cinco 4 na categoria do 1 representam os cinco 14 pertencentes ao conjunto de dados. É importante apresentar o diagrama com uma legenda, para que quem o leia possa perceber a sua lógica.

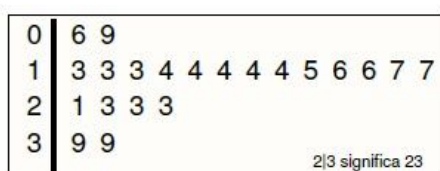


Figura 7: Diagrama ordenado.

Nas próximas secções, apresentam-se sugestões de tarefas de exploração deste tipo de diagramas junto de alunos dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.

1 Construindo um diagrama de caule-e-folhas

Seguindo uma determinada sequência de passos, a construção de um diagrama de caule-e-folhas torna-se bastante simples. Começa-se por analisar duas páginas de um livro escolar que aborda esse tema ([3], páginas 156 e 157).

Antes de mencionar a sequência de passos propriamente dita, observa-se que a abordagem “concreto-pictórico-abstrato”, de origem em teorias construtivistas [2], parece ser especialmente indicada para o ensino das primeiras matemáticas; o *Singapore Math*, método para o ensino da Matemática em Singapura, constitui um caso de sucesso desta abordagem. Sem querer desenvolver este princípio orientador em profundidade, por não constituir o objetivo principal deste texto, uma forma interessante de introduzir um tema consiste em partir de casos *concretos, com significado* e, só depois, de modo faseado, tratá-lo de forma mais esquemática e abstrata. Relativamente aos diagramas de caule-e-folhas, é importante a presença do quotidiano nas tarefas a explorar. No domínio *Organização e Tratamento de Dados*, tal como o nome indica, organizam-se e tratam-se dados – e os dados dizem quase sempre respeito a situações que remetem para o quotidiano. Exemplificando com o conjunto usado na secção anterior, em vez de o apresentar como um conjunto de números em abstrato, nada como relacioná-lo com uma situação do dia a dia *plausível*, de preferência apontando para as *vivências típicas* das crianças. A Figura 8, respeitante a uma parte de uma página de [3], é ilustrativa.

2 Diagrama de caule-e-folhas

Vamos aprender!

A Margarida, irmã da Joana, é adolescente e faz hoje 13 anos. Ela anotou num papel as idades dos convidados presentes na sua festa de aniversário.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	6
23	14	39	9	14	13	16



Figura 8: Partindo de uma situação plausível.

Repare-se que os números são adequados, podendo ser perfeitamente um conjunto de idades de convidados para uma festa de aniversário de uma adolescente de 13 anos. Quanto à construção do diagrama propriamente dito, o *primeiro passo* consiste na marcação do caule (Figura 9). No exemplo escolhido, os elementos do caule são os algarismos das dezenas das idades dos convidados (imediatamente se percebe que são idades inferiores a quarenta anos). O livro utiliza um código de cores para possibilitar uma compreensão apenas com um simples olhar.

2 Diagrama de caule-e-folhas

Vamos aprender!

A Margarida, irmã da Joana, é adolescente e faz hoje 13 anos. Ela anotou num papel as idades dos convidados presentes na sua festa de aniversário.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	6
23	14	39	9	14	13	16



Ela organizou as idades num **diagrama de caule-e-folhas**.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	06
23	14	39	09	14	13	16

A Margarida escreveu os algarismos das dezenas à esquerda de um traço, fazendo o **caule** do diagrama.

0	
1	
2	
3	

Figura 9: Registo do caule.

No registo do caule, os valores são dispostos na vertical, de cima para baixo, por ordem crescente e sem repetições. Normalmente registam-se todos os valores desde o mínimo até ao máximo de forma consecutiva, incluindo os que não são observados.

O *segundo passo* consiste na marcação das folhas (Figura 10). Neste exemplo, as folhas são os algarismos das unidades das idades dos convidados. As marcações são feitas sequencialmente (14, 14, 16, 23, ...). Sendo assim, neste passo, ainda não há uma preocupação em ordenar as folhas; marcar-se-ão 4, 4, 6 (na categoria do 1), 3 (na categoria do 2), etc. Em vez de ajudar, um código de cores apenas traria confusão; cabe ao professor frisar o carácter sequencial da marcação.

2 Diagrama de caule-e-folhas

Vamos aprender!

A Margarida, irmã da Joana, é adolescente e faz hoje 13 anos. Ela anotou num papel as idades dos convidados presentes na sua festa de aniversário.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	6
23	14	39	9	14	13	16



Ela organizou as idades num **diagrama de caule-e-folhas**.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	06
23	14	39	09	14	13	16

A Margarida escreveu os algarismos das dezenas à esquerda de um traço, fazendo o **caule** do diagrama.

0		
1		
2		
3		

Em seguida, ela observou cada uma das idades.

À direita do traço, a Margarida escreveu os algarismos das unidades nas linhas correspondentes aos algarismos das dezenas. Dessa forma, colocou as **folhas** no diagrama.

0		6 9
1		4 4 6 7 5 3 7 4 3 4 4 3 6
2		3 3 1 3
3		9 9

Figura 10: Registo das folhas.

O *terceiro passo* consiste na organização das folhas por ordem crescente, em cada linha ou “ramo” do caule (Figura 11).

O *quarto passo* consiste na colocação de uma legenda e de um título (Figura 11). É importante que os alunos percebam que um diagrama estatístico, mais do que servir quem o constrói, destina-se sobretudo aos *outros*. Os títulos e as legendas não servem só para “enfeitar”; têm o importante papel de facilitar a vida de quem lê e tenta interpretar um determinado diagrama.

Esta abordagem *step-by-step*, sem saltos, faseando e explicando tudo muito bem, é uma segunda característica fundamental do *Singapore Math*. Os méritos de tal abordagem não requerem grande explicação. Basta o senso comum para intuir que é uma abordagem bastante indicada.

2 Diagrama de caule-e-folhas

Vamos aprender!

A Margarida, irmã da Joana, é adolescente e faz hoje 13 anos. Ela anotou num papel as idades dos convidados presentes na sua festa de aniversário.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	6
23	14	39	9	14	13	16



Ela organizou as idades num **diagrama de caule-e-folhas**.

14	14	16	23	23	17	15
39	13	21	17	14	13	06
23	14	39	09	14	13	16

A Margarida escreveu os algarismos das dezenas à esquerda de um traço, fazendo o **caule** do diagrama.

0		
1		
2		
3		

Em seguida, ela observou cada uma das idades.

À direita do traço, a Margarida escreveu os algarismos das unidades nas linhas correspondentes aos algarismos das dezenas. Dessa forma, colocou as **folhas** no diagrama.

0		6 9
1		4 4 6 7 5 3 7 4 3 4 4 3 6
2		3 3 1 3
3		9 9

No final, a Margarida **ordenou** as idades e colocou uma **legenda explicativa**.

0		6 9
1		3 3 3 4 4 4 4 4 5 6 6 7 7
2		1 3 3 3
3		9 9

23 significa 23

Figura 11: Ordenação das folhas e registo de uma legenda.

Na Figura 12, apresenta-se mais uma situação, disponível em [5], em que os alunos têm de partir de um conjunto de dados e construir um diagrama, de forma faseada. Do lado esquerdo, registam-se os dados sem preocupação com a ordenação das folhas. Do lado direito, as folhas são, posteriormente, organizadas por ordem crescente.



Para praticar

- Os alunos que frequentam um Clube de Leitura registaram o número de páginas lidas durante o fim de semana. Ao lado, está registado o número de páginas lidas por cada um desses alunos. Representa os dados num diagrama de caule-e-folhas.

78	82	75	71	98
95	85	93	90	71
80	72	83	80	75
83	97	75	87	75

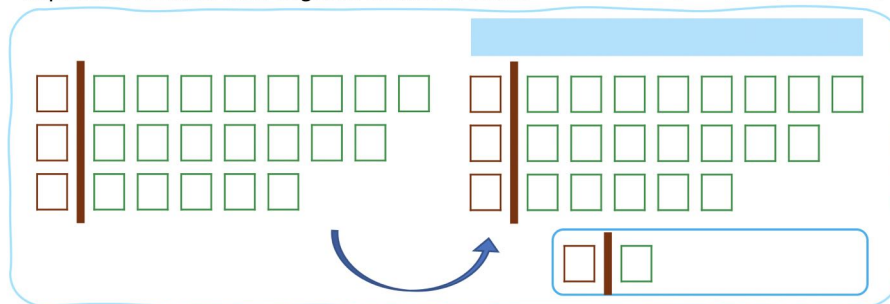


Figura 12: Construção faseada de um diagrama de caule-e-folhas.

2 Interpretando um diagrama de caule-e-folhas

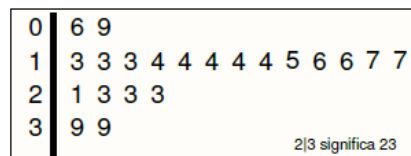
Uma terceira característica fundamental do *Singapore Math* é a preocupação com a oralidade/leitura/escrita/interpretação. Segundo o psicólogo Jerome Bruner (1915-2016),

Proficiency in oral language provides children with a vital tool for thought. Without fluent and structured oral language, children will find it very difficult to think [2].

Esta afirmação traduz uma ideia que, mais uma vez, é quase do foro do senso comum: quanto melhor uma pessoa fala, lê, escreve e interpreta, melhor pensa e argumenta. No que diz respeito ao trabalho relativo a diagramas estatísticos, a interpretação é uma parte vital, talvez a mais importante. Na sequência do exemplo relativo à festa de aniversário, apresenta-se na Figura 13 um exercício do livro escolar já citado ([3], página 158).

Vamos praticar!

1. Observa novamente o diagrama de caule-e-folhas feito pela Margarida. Não te esqueças que a Margarida faz hoje 13 anos.



- a) Que idade tem o convidado mais novo?

- b) Naturalmente, os pais da Margarida também foram convidados. O pai da Margarida é da mesma idade que a sua mãe. Que idade tem o pai da Margarida?

- c) Qual é a idade mais frequente, ou seja, qual é a moda?

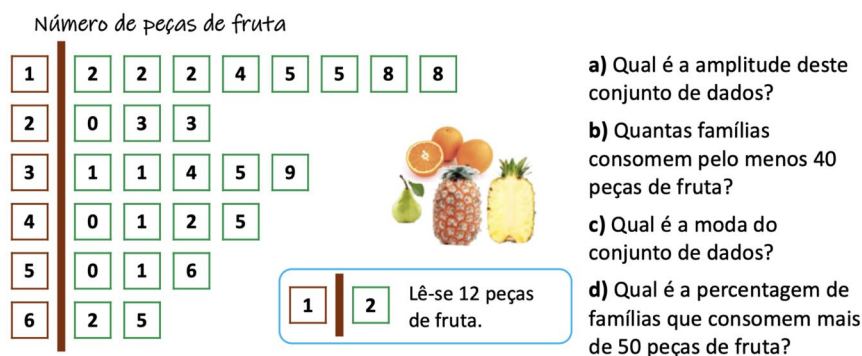
- d) A Margarida tem duas irmãs mais novas que foram convidadas. Que idade tem cada uma delas?

Figura 13: Interpretação de um diagrama de caule-e-folhas.

A alínea a) solicita a identificação do mínimo em contexto (“o convidado mais novo”). A alínea b) é mais sofisticada: a criança tem de pensar na idade da Margarida para poder ter uma intuição sobre as idades dos pais. Uma pessoa de 23 anos não é progenitor de uma adolescente de 13 anos. Sendo assim, por *exclusão de partes*, os pais da Margarida são as duas pessoas de 39 anos. A alínea c) aborda um tópico presente no currículo português: 14 anos é a idade mais frequente, ou seja, a moda. Finalmente, na alínea d), a resposta tem de ser encontrada tendo como referência a idade da Margarida. Só há duas crianças mais novas do que a Margarida, uma com 6 anos e outra com 9 anos. São essas as irmãs da aniversariante. Quem goste de pensamentos “detetivescos” poderá ter a dúvida sobre se não haverá uma pessoa de 13 anos mais nova do que a Margarida. Havendo, surgiriam as seguintes consequências bizarras: (A) a Margarida faria 13 anos nesse dia e ainda haveria uma adolescente de 13 anos mais nova do que ela (teria de ser apenas algumas horas ou minutos mais nova!); (B) dado estar a falar-se das irmãs da Margarida, poder-se-ia estar a falar de uma irmã gémea mais nova, mas isso seria bizarro, uma vez que o enunciado não menciona o facto de a festa de aniversário da Margarida ser em conjunto com a da sua irmã.

A Figura 14 ilustra mais duas possíveis explorações [5]: a primeira, em que se apresenta um diagrama de caule-e-folhas e se solicita a interpretação do mesmo, com um leque variado de questões; a segunda, em que se pede para construir um diagrama e, posteriormente, para interpretá-lo.

2. A professora da Daniela, preocupada com a alimentação dos seus alunos e de suas famílias, decidiu realizar um inquérito sobre o número de peças de fruta consumido, semanalmente, por família. Organizou os dados no seguinte diagrama de caule-e-folhas.



3. Na aula de Educação Física, os alunos e o professor registaram quantos segundos conseguiram estar sem respirar.

Os valores recolhidos na experiência estão apresentados ao lado.

a) Representa os dados num diagrama de caule-e-folhas.
 b) Determina a amplitude dos valores recolhidos.

59	38	47	23	48	55	27
37	48	53	37	52	39	54
57	38	46	40	41	62	63
38	65	44	35	46	60	93

Figura 14: Duas explorações com diagramas de caule-e-folhas.

A Figura 15 apresenta mais um exemplo de interpretação ([4], página 96).

1. A imagem seguinte mostra algumas crianças com as respetivas quantidades de berlindes.



Fez-se um diagrama de caule-e-folhas (ainda incompleto).

1	3	3				
2	0	5	6	6	6	9
3	8					

3|8 significa 38 berlindes

a) Sabendo que a amplitude é 27, completa o diagrama de caule-e-folhas.

b) Sabendo que a criança com menos berlindes é uma menina e que a criança com mais berlindes usa óculos, preenche os quadrados da imagem com as quantidades de berlindes em falta.

Figura 15: Mais uma interpretação de um diagrama de caule-e-folhas.

Nos exercícios, normalmente, são fornecidos dados aos alunos e, com esses dados, as crianças fazem e interpretam um diagrama de caule-e-folhas. A originalidade deste exercício está no facto de dados e diagrama aparecerem de forma incompleta. De certa maneira, a criança pensa em *duas direções*, completando informação relativa aos dados em bruto e ao diagrama. Na alínea a), através de outro tópico presente no currículo português, a criança pode determinar o mínimo; tem de haver uma criança com 11 berlindes para que

$$\text{amplitude} = \text{máximo} - \text{mínimo} = 38 - 11 = 27.$$

Além do tópico em si mesmo, a criança tem de identificar o máximo e perceber que a determinação do mínimo permite completar o diagrama. Quanto à alínea b), é necessário procurar informação relevante. Há 3 espaços por preencher, um é o mínimo (não está à vista nenhuma criança com 11 berlindes), outro é o máximo (não está à vista nenhuma criança com 38 berlindes) e um terceiro deve ser preenchido com o número 26 (só há uma criança à vista com 26 berlindes, pelo que, por exclusão de partes, falta a segunda criança com 26 berlindes que consta no diagrama). As características das crianças indicadas no enunciado permitem tirar as conclusões certas (Figura 16).

1. A imagem seguinte mostra algumas crianças com as respetivas quantidades de berlindes.



Fez-se um diagrama de caule-e-folhas (ainda incompleto).

1	1	3	3				
2	0	5	6	6	6	9	
3	8						

3|8 significa 38 berlindes

a) Sabendo que a amplitude é 27, completa o diagrama de caule-e-folhas.

b) Sabendo que a criança com menos berlindes é uma menina e que a criança com mais berlindes usa óculos, preenche os quadrados da imagem com as quantidades de berlindes em falta.

Figura 16: Mais uma interpretação de um diagrama de caule-e-folhas: solução.

Referências

- [1] BBC-News, 2000. <http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/975360.stm>
- [2] Bruner, J. *The process of education*, Harvard University Press, 1960.
- [3] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Livro Teórico, 3.º ano de escolaridade, Principia, 2020.
- [4] Carvalho, A., Pestana, I., Santos, C. *Viva a Matemática!*, Caderno Prático, 3.º Ano, Volume 2, Principia, 2018.
- [5] Furtado, A. R., Ponte, O., Faria, R., Teixeira, R. C. (Coord.). *Caderno do aluno para o 5.º ano de escolaridade*, Volume B, Projeto Prof DA/Oficina Matemática Passo a Passo, Letras Lavadas Edições, 2020.
- [6] Tukey, J. W. *Exploratory Data Analysis*, Addison-Wesley Publishing Company, 1977.