

As Torres de Hanói e o fim do mundo



Por: Maria do Carmo Martins
Professora do Departamento de Matemática
da Universidade dos Açores
mika@uac.pt

Reza a lenda que na praça principal da cidade vietnamita de Hanói existem três postes, um destes contendo 64 discos organizados do maior, na base do poste, para o mais pequeno, no topo. Os monges da cidade têm como tarefa deslocar os discos deste poste (a origem) para um outro poste (o destino) de acordo com duas regras simples: (1) só se pode deslocar um disco de cada vez e (2) um disco de maior dimensão não pode ser colocado em cima de outro mais pequeno. Para desempenharem a tarefa, os monges podem utilizar o poste extra. A lenda estabelece que ao completarem a sua missão, o mundo termina. Pois bem, hoje proponho-me calcular, baseada nesta lenda, quanto tempo de vida ainda temos neste nosso cantinho do sistema solar. A lenda foi formalizada num jogo pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883.

Antes de entrarmos em cálculos apocalípticos, tentemos perceber melhor a tarefa destes monges. Vamos analisar o problema de forma gradual começando com um só disco no poste origem. A solução é trivial, pois basta mover o disco deste poste para o poste destino (Figura 1).

Complicuemos um pouco e consideremos dois discos no poste origem. Agora o movimento não pode ser direto da origem para o destino, porque, de acordo com a regra (1) só podemos deslocar um disco de cada vez. Mas esperem lá, podemos usar o poste extra para nos ajudar. Então, movamos o disco de cima para este poste, depois o disco grande da origem para o destino e, por fim, desloquemos o disco do poste extra para o poste destino, completando a tarefa em três movimentos (Figura 2).

Confiantes? Adicionemos mais um disco no poste origem. Bem, já temos uma ideia da estratégia a seguir: movamos o primeiro disco para o poste extra (como no caso anterior), o disco do meio para o poste destino e o disco do poste extra para o poste destino. Agora só podemos mover o disco grande para o poste extra e não para o poste destino (devido à regra 2) (Figura 3a). Não me parece a melhor solução, pois agora temos de mover o disco pequeno do poste destino para o extra, que é possível porque este é o disco mais pequeno e o poste extra tem o maior disco na sua base; depois movamos o disco na base do poste destino para o poste origem e a seguir o disco pequeno do poste extra para a origem. Agora temos dois discos na origem e o terceiro disco no poste extra (Figura 3b). Para terminar, podemos mover o disco grande do poste extra para o poste destino, o disco pequeno do poste origem para o extra, o disco intermédio do poste origem para o destino e, por último, o disco pequeno que está no poste extra para o destino (Figura 3c). Ufa, terminámos após 11 movimentos. É melhor o leitor usar um lápis e um papel e seguir atentamente a Figura 3(a, b, c). Mas será esta a melhor estratégia para resolver este jogo? Não é. Com três discos é possível completar a tarefa em 7 movimentos. Mas como? Bem, deixo o desafio ao leitor e dou só uma pequena dica: comece por movimentar o primeiro disco para o poste destino e não para o poste extra como

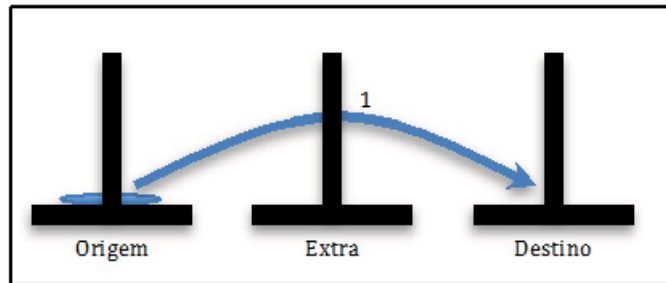


Figura 1

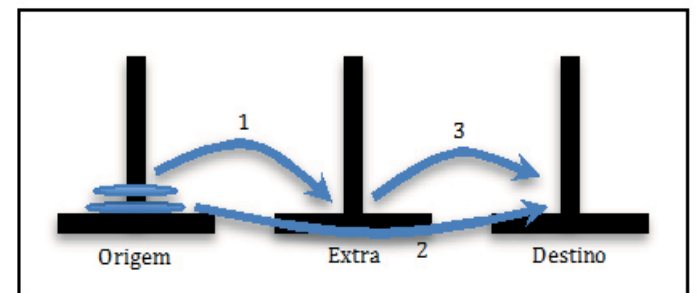


Figura 2

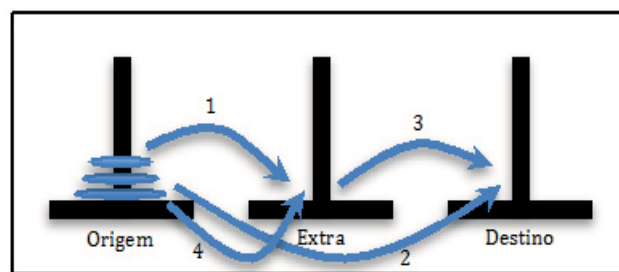


Figura 3a

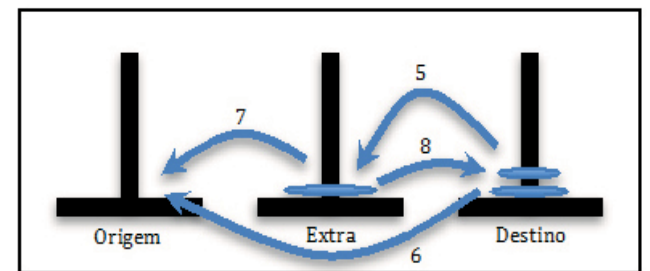


Figura 3b

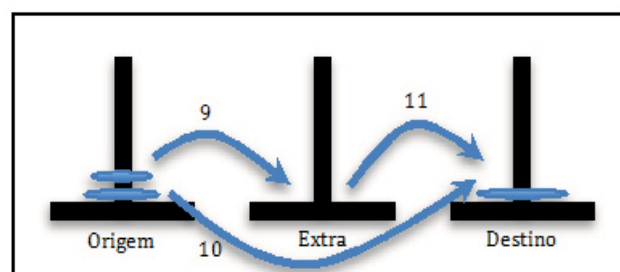


Figura 3c

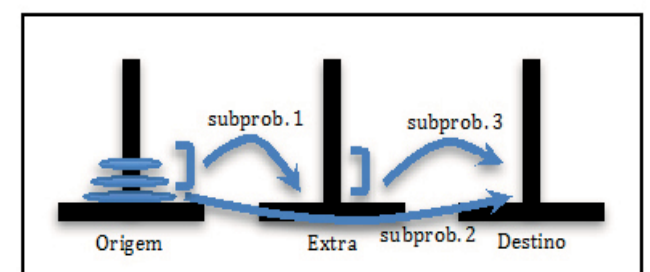


Figura 4

lhe acabei de descrever. Um versão interativa do jogo pode ser encontrada em <https://www.mathsisfun.com/games/towerofhanoi.html>.

Penso que agora o leitor já tem um melhor entendimento deste jogo. Mas esta última experiência com três discos deixou-me com uma certeza e um novo problema. A certeza é que existem várias formas de movimentar os discos para completar o jogo, e que umas estratégias envolvem menos movimentos do que outras. O problema é determinar qual a estratégia para **completar o jogo no menor número de passos**. Daqui surgem duas perguntas: 1) será que tal estratégia existe? 2) será que é importante conhecê-la para fazermos o cálculo de quando será o fim do mundo? A resposta é afirmativa para ambas as questões. Porque? Porque os monges de Hanói conhecem a estratégia e seguem-na à risca.

Permita-me o leitor fazer-lhe uma sugestão para um jogo num serão entre amigos ou familiares. Há (quase) sempre em casa um daqueles conjuntos de copos de plástico que encaixam uns nos outros e que fizeram as delícias dos nossos filhos quando eram bebês. Pois bem, tente completar o jogo de Hanói com os seus comparsas usando os copos como discos (e torres, porque encaixam uns nos outros), mas com uma regra adicional: não se pode falar com os restantes parceiros de jogo sobre a estratégia aplicada, mas pode-se “chamar-se nomes” quando estes não seguirem o plano delineado. Vai ver que ainda dão umas gargalhadas à custa das torres de Hanói.

Como descobri a melhor estratégia? Uma boa abordagem, já seguida por Júlio César nas guerras da Gália em 58 a. C., é a de *dividir para conquistar* (ou para reinar). Como se aplica esta estratégia à resolução de problemas? Se tivermos um problema (de grande dimensão) para resolver, uma forma de o abordar é subdividi-lo em problemas mais pequenos, arranjar a solução de cada um destes e depois combinar as soluções para resolver o problema inicial. Dito

assim parece fácil, mas, de um modo geral, a arte está em determinar quais os subproblemas que nos interessam.

Voltemos ao caso das torres de Hanói com três discos. O enunciado inicial do problema é “mover os 3 discos do poste **origem** para o poste **destino** de acordo com as duas regras referidas”. Pois bem, podemos partir este problema em três: 1) “mover 2 discos do poste **origem** para o poste **extra** de acordo com as duas regras referidas”; 2) “mover o disco do poste origem para o poste destino”; 3) “mover os 2 discos do poste **extra** para o poste **destino** de acordo com as regras referidas” (Figura 4). Note o leitor que se em vez de termos 3 discos tivéssemos 64 discos, o problema podia ser partido nestes mesmos três subproblemas só que em vez de movimentarmos 2 discos movimentaríamos 63.

É trivial confirmar que a combinação dos três subproblemas soluciona o jogo, mas há ainda que resolver cada um deles. O 2) corresponde à movimentação direta do disco do poste origem para o poste destino e não oferece qualquer dificuldade. O 1) e o 3) são iguais a menos dos postes envolvidos. Mais, se o leitor comparar o enunciado destes subproblemas com o enunciado do problema inicial, verá que, a menos do número de discos (um a menos) e do papel dos postes envolvidos (se é o poste origem, o extra ou o destino) o problema é exatamente o mesmo (as diferenças estão marcadas a negrito). Ou seja, partimos o problema inicial em três, dois dos quais iguais a este, mas aplicados a um problema de menor dimensão (envolvendo menos discos). A este tipo de solução designa-se por *solução recursiva*.

Vejam como funciona esta estratégia para o jogo com os 3 discos. Para simplificar a escrita vamos representar por $m(n, o, d, e)$ a ação de movimentar n discos do poste o para o poste d usando e como poste extra. Queremos então $m(3, origem, destino, extra)$. A nossa estratégia leva-nos a partir este problema nos três seguintes: 1) $m(2, origem, extra, destino)$; 2) $m(1,$

$origem, destino, extra)$; 3) $m(2, extra, destino, origem)$ (Figura 4). Aplicamos, recursivamente, a mesma receita ao subproblema 1), resultando em 1.1) $m(1, origem, destino, extra)$; 1.2) $m(1, origem, extra, destino)$; 1.3) $m(1, destino, extra, origem)$. Note-se que estes três subproblemas envolvem movimentar um só disco e podem ser resolvidos diretamente. Os casos em que não é necessário aplicar de novo a receita (a recursão) designam-se por *casos base*. O problema 3) resolve-se de modo semelhante ao 1). Deixo ao leitor os 7 movimentos que correspondem à solução ótima, que pode comparar com a sua que determinou anteriormente: origem > destino; origem > extra; destino > extra; origem > destino; extra > origem; extra > destino; origem > destino.

Finalmente, podemos deduzir o cálculo do número ótimo de movimentos para resolver o jogo das torres de Hanói. Novamente, façamos uma abordagem incremental. Para 1 disco temos 1 movimento direto. Para 2 discos partimos em 3 subproblemas que envolvem mover um disco cada, resultando em 3 movimentos. Para 3 discos, os três subproblemas envolvem: mover 2 discos, 1 disco e 2 discos. Ora mover 2 discos acabámos de ver que gera 3 movimentos, então $3 + 1 + 3 = 7$ movimentos; ter 4 discos implica mover 3 discos, 1 disco e 3 discos, ou seja, $7 + 1 + 7 = 15$ movimentos; 5 discos geram $15 + 1 + 15 = 31$ movimentos; seis, 63; sete, 127; oito, 255, e assim por diante.

O leitor mais dado a *bits e a bytes* já reconheceu as potências de base dois (menos 1). Para concluirmos, o número ótimo de movimentações para jogar com 64 discos é de $2^{64} - 1$, ou seja, 18446744073709551615 movimentos. Se os monges vietnamitas tivessem velocidade super-humana e conseguissem movimentar 100 discos por segundo, levariam 5849424173 anos a completar a tarefa, ou seja, pouco mais de 5,8 mil milhões de anos! É razão para dizer que venham mais profecias apocalípticas destas!