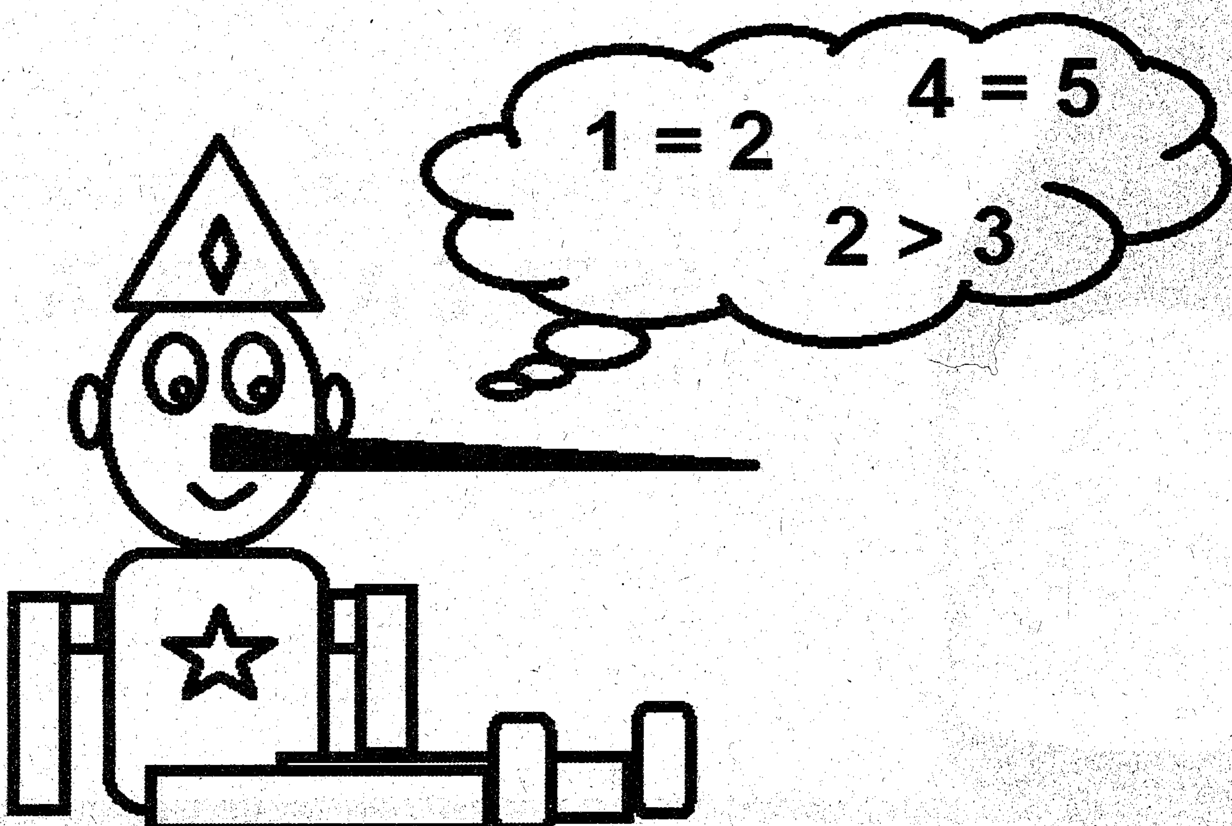
Falácias Matemáticas – Truques com números

Helena Sousa Melo*



Quem poderia imaginar que na Matemática, tão objetiva e sem margem para erros, pudesse haver falácias. O termo falácia tem origem na palavra latina fallere, que significa enganar, faltar. Normalmente denomina-se falácia um raciocínio falho, ou errado, que aparentemente parece verdadeiro. A falácia é na realidade um argumento logicamente inconsistente, e uma falácia matemática é um argumento que na tentativa da sua prova esconde a sua falha. Estas curiosidades matemáticas, que tentam ludibriar o mais atento observador, são pequenos truques de magia, que iludam os que desta arte, da matemática, não estão tão à vontade. Há falácias matemáticas numéricas e também há geométricas.

De todas as falácias matemáticas numéricas, a mais conhecida é a que "demonstra" que $1 = 2$. Vejamos então esta prova.

Iniciamos o raciocínio considerando duas letras quaisquer, a e b, por exemplo, e a seguinte igualdade:

$a = b$

Depois, multiplicamos ambos os membros da igualdade por b, para que esta se mantenha, obtendo:

$a.b = b.b$

De seguida, multiplicamos a igualdade acima por (-1) e ao resultado adicionamos, a ambos os membros, o valor a.a, temos então:

$a.a - a.b = a.a - b.b$

Utilizando as propriedades algébricas, podemos colocar em evidência, no primeiro membro, a letra a, obtendo a seguinte escrita:

$a.(a - b) = a.a - b.b$

Recorrendo ao conhecimento dos casos notáveis, mais especificamente à diferença dos quadrados de dois números (a.a – b.b), podemos reescrever o segundo membro como o produto da adição, (a + b), pela subtração, (a – b), desses dois números considerados, obtemos assim a igualdade:

$a.(a - b) = (a + b).(a - b)$

Como em ambos os membros da igualdade temos a mesma expressão (a – b), podemos simplificá-la, dividindo-a por esta expressão, obtendo então:

$a = a + b$

Como partimos do princípio que $a = b$, e substituindo nesta última igualdade, temos:

$a = 2a$

E dando o valor 1 para a, segue que $1 = 2$, como queríamos demonstrar.

Apesar da aparente demonstração, nada ficou provado. E a suposta explicação possui uma incorrecção que permite esta conclusão.

A falha encontra-se no momento em que ocorre a simplificação da igualdade, ou seja, a divisão de ambos os membros por (a – b). Recordando o início desta justificação, temos que ao considerar $a = b$, o valor de (a – b) é "zero". E bem sabemos que o "zero" não pode ser divisor de um número, pois não existe nenhum número que multiplicado por "zero" produza um número diferente de "zero". Foi esta inadvertência que proporcionou a aparição desta falácia matemática.

Vamos a mais uma falácia matemática numérica, "mostrando" que $2 > 3$.

Para "demonstrar" esta falácia vamos necessitar do conceito de logaritmo.

O logaritmo, que deriva de duas palavras gregas: (logos) que significa razão e (arithmos) que significa número, é uma função que faz corresponder ao número x um número y, tal que a potência de base b e expoente y é igual a x, ou seja, $b^y = x$, onde b é a sua base, sendo um valor maior que zero e diferente de 1. Por outras palavras, o logaritmo é o expoente que uma determinada base deve ser elevada para obter certa potência. Normalmente escrevemos o logaritmo de base b, por $\log(b)\ x = y$. Aparecendo a base (b) em índice inferior. Por exemplo, sabemos que $2^3 = 8$, assim, o $\log(2)\ 8 = 3$.

Observamos também que se $4 < 8$, temos que $\log(2)\ 4 < \log(2)\ 8$, visto que $4 = 2^2$ e $8 = 2^3$, e $2 < 3$. Por palavras mais simples, também é válido que o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos dos valores envolvidos, por exemplo, vamos considerar 2^9 onde $\log(2)\ 2^9 = 9$. Façamos $2^9 = (2^2).(2^3).(2^4)$ e vamos calcular o logaritmo na base 2. Assim, $\log(2)\ 2^9 = \log(2)\ ((2^2).(2^3).(2^4)) = \log(2)\ (2^2) + \log(2)\ (2^3) + \log(2)\ (2^4) = 2 + 3 + 4 = 9$. Se estendermos esta propriedade a uma base qualquer e em relação à potência, temos que o $\log(b)\ (n^p) = p \log(b)\ n$.

Conhecido o conceito e algumas das suas propriedades, vamos partir da seguinte desigualdade, irrefutável:

$(1/2)^2 > (1/2)^3$

Se o número 2 estivesse no numerador da fração, obviamente que o quadrado de 2 ($2^2 = 2.2$) é menor que o cubo de 2 ($2^3 = 2.2.2$), ou seja, $2^2 < 2^3$, mas tratando-se de estar no denominador, sabemos que o número fracionário representado pela fração 1/4 é maior que o número fracionário representado pela fração 1/8, resultantes da operação indicada.

Aplicando o logaritmo nesta desigualdade temos:

$\log(b)\ (1/2)^2 > \log(b)\ (1/2)^3$

Utilizando uma das propriedades dos logaritmos segue:

$2 \log(b)\ (1/2) > 3 \log(b)\ (1/2)$

E fazendo a divisão em ambos os membros da desigualdade por $\log(b)\ (1/2)$ que é um número diferente de "zero", temos:

$2 > 3$, como queríamos apresentar.

Novamente a "explicação" possui uma falha. Desta vez não é a divisão por "zero" a causadora da falácia, mas sim uma particularidade na função logarítmica. Esta função, para valores de abcissa compreendidos entre "zero" e "um", assume valores de ordenadas negativos. E quando multiplicamos uma desigualdade por um valor negativo, afetamos o sinal da desigualdade, invertendo-o. Assim, no final deveríamos ter $2 < 3$, que é o correto.

Das várias falácias matemáticas, apresentamos mais uma. Esta falácia matemática envolve mais um caso notável. O caso notável agora em questão é o quadrado da diferença de dois números, ou seja, $(a - b)^2 = a^2 - 2\ a.b + b^2$.

Vamos então "provar" que $4 = 5$.

Comecemos considerando a seguinte igualdade:

$16 - 36 = 25 - 45$

Vamos adicionar a ambos os membros (81/4), temos:

$16 - 36 + (81/4) = 25 - 45 + (81/4)$

Sabendo que $16 = 4^2$, $25 = 5^2$ e $81/4 = (9/2)^2$, e que $36 = 2 \times 4 \times (9/2)$, bem como, $45 = 2 \times 5 \times (9/2)$, a igualdade fica reescrita em função de 4, 5 e 9/2, obtendo-se:

$4^2 - 2 \times 4 \times (9/2) + (9/2)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times (9/2) + (9/2)^2$

E aplicando o conhecimento do caso notável relativo ao quadrado da diferença de dois números segue:

$(4 - (9/2))^2 = (5 - (9/2))^2$

Para continuar, vamos extrair a raiz quadrada em cada membro, obtemos assim:

$4 - (9/2) = 5 - (9/2)$

E como a mesma quantidade (9/2) foi diminuída em ambos os membros da igualdade, temos que $4 = 5$.

Mais uma vez, temos uma falácia decorrente da não observação de uma consideração matemática. Será capaz de encontrar onde está a falha desta "demonstração"? A dica está na raiz quadrada. Mas porquê?

*hmelo@uac.pt
Professora Auxiliar
Centro de Matemática Aplicada
e Tecnologias de Informação
Departamento de Matemática
Universidade dos Açores