A era em que 0,999...= 1

Por: João Cabral
jcabral@uac.pt
Doutorado em Matemática,
pela Universidade dos Açores

$$
\begin{aligned}
0.nnn\ldots &= n(n+1)^{-1} + n(n+1)^{-2} + n(n+1)^{-3} + \cdots \\
&= \lim_{m\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{m} n(m+1)^{-k} \\
&= \lim_{m\to\infty} n \textstyle\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k} \\
&= \lim_{m\to\infty} n \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^{m+1} - \left(\frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{n+1}\right) - 1} \\
&= \lim_{m\to\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)^{m}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

0.(1) = 1 na Base Binária **0,(7) = 1 na Base Octal** **0.(9) = 1 na Base Decimal**

Hoje é dia 31 de julho de 2014, dia dedicado a Santo Inácio de Loyola, fundador da Companhia de Jesus, cujos membros são conhecidos por Jesuítas. Atualmente é a maior ordem religiosa católica no mundo, sendo o atual papa Francisco um dos seus membros. Os ideais difundidos por Santo Inácio provocaram uma reforma profunda no seio da igreja católica da altura (séc. XV), quase comparável ao que o atual governo português, mais propriamente o Ministério da Educação, está a tentar fazer com os programas, com os conteúdos curriculares de disciplinas como a Matemática, Português, Física, entre outras. Assim, assumi que hoje era um bom dia para falarmos um pouco sobre o que se anda a passar nas escolas portuguesas. Claro, que como sou professor profissionalizado em Matemática, com estágio, num curso de cinco anos, e já com alguma experiência nos vários níveis de ensino, vou dedicar a minha atenção à reforma da Matemática.

Nos últimos meses os grupos disciplinares em cada escola desdobraram-se em sessões e ações de formação, e esclarecimento, sobre os novos programas a aplicar na Matemática, já a partir do próximo ano letivo. Sobre todo este processo faço um elogio aos meus colegas do ensino básico e secundário pela sua resiliência a esta tal força de stress oriunda do Ministério da Educação. Ao Ministério da Educação faço a crítica de ter deixado de fora a perspetiva de uma adaptação regional do mesmo programa aos Açores, pois as realidades dos alunos são bem distintas dos que vivem em território continental. Lembro que a nossa Universidade dos Açores, através do Departamento de Matemática, formou mais de 80% dos atuais quadros de professores de Matemática, que lecionam nas nossas escolas, durante o período de 1988 a 2005, trabalho esse que teima em ser esquecido até pelos governantes locais.

Qualquer pessoa que queira consultar as novidades para o futuro da Matemática no país pode sempre aceder ao Caderno de Apoio às Metas Curriculares de Matemática, que se encontra disponível no local da DGE, na internet. Neste caderno tenta-se clarificar as Metas Curriculares, com exemplos e mais exemplos, introduzindo de vez em quando, sugestões metodológicas para introdução dos conceitos que se querem implementar, para que os alunos consigam interiorizar melhor os seus conteúdos. Não é leitura fácil para quem não esteja familiarizado com os programas de Matemática, mas não foi certamente também leitura de digestão fácil para os professores já habituados a estas andanças, pois o documento das Metas apresenta a introdução de conteúdos que não estão enquadrados com as idades, com o desenvolvimento mental, que as crianças apresentam em certos níveis etários. Por isso a melhor forma que tenho para classificar este documento são os termos "arrojado" e "ambicioso", mas facilmente também podia usar os termos "ilusório" e "utópico".

Sem querer entrar em muitos detalhes, na análise do documento, vou partilhar com os leitores uma troca de opiniões que nasceram de facto de que no novo programa ser agora obrigatório dizer aos nossos miúdos, a nível básico, que 0,999... = 1, em escrita simplificada 0,(9)=1. Escrever 0,999... significa que estamos a lidar com uma dízima infinita periódica, ou seja um número decimal em que existe uma repetição periódica dos dígitos que compõem as respetivas classes decimais. Neste caso, o nove repete-se de forma infinita. Um outro exemplo é o resultado da divisão de quando tentamos dividir o um por três, 1:3=0,333.... Normalmente usa-se o parêntesis para destacar o caráter infinito da repetição do dígito, ou conjunto de dígitos.

Uma das formas que são usadas para mostrar que de facto 0,(9)=1 é muito simples e fácil de entender. Vamos fazer x=0,999... logo temos que 10x=9,999... e assim 10x-x=9x, se subtrairmos ambos os primeiros membros destas duas últimas equações. Do segundo membro se fizermos a subtração teremos 9,999...-0,999...= 9, obtendo assim 9x=9, e assim concluindo que o valor de x só pode ser um! Logo 0,999...= 0,(9) = 1. Ora, tudo isso bate certo se ignorarmos todos os princípios de equivalência de equações (que foram concebidos para entidades finitas e numeráveis). Intrigado, procurei mais demonstrações, já conhecidas ou não, diferentes desta, e infelizmente só encontrei esta e muitas outras, que introduzem o já velhinho conceito de limite. Eu, como sou professor de Análise Numérica, uma disciplina lecionada a futuros Engenheiros, na Universidade dos Açores, sei que é uma luta enorme os alunos universitários perceberem como é que este tipo de números funcionam, fiquei de cabelos em pé quando vejo a introdução, sem apelo nem agravo, de um conceito que pode baralhar a cabeça a muitas crianças por este país fora, se for mal explicado ou até mal introduzido.

Resolvi solicitar alguns esclarecimentos diretamente à equipa Nacional das Metas Curriculares, aqueles meus colegas, professores universitários, e não só, que percorreram o país a explicarem os detalhes destas Metas. Num primeiro email, resolvi explorar o que poderia soar estranho a um aluno e assim escrevi-lhes: "Caros Colegas, (...) nas metas curriculares de matemática, nos novos programas da matemática, existe um resultado estranho. No texto é dito que 0,(9)=1 perentoriamente. Acho que este resultado é estranho – dito desta forma assim tão seca - porque se assim fosse a reta real ficaria cheia de buracos. Ora vejamos, se o número imediatamente anterior ao número 1 é precisamente o 0,(9) – como a maioria dos alunos vai argumentar - dizer que estes dois números são iguais, significa que o número um é imediatamente inferior a si próprio (...). Por isso, solicito aos colegas que me possam argumentar, no seio da topologia, como é que este facto é possível, sem usar qualquer noção de limite."

A resposta não tardou, e o email de resposta veio agressivo, quase ressoando a insulto a uma pessoa que tem um doutoramento em Análise, que apenas escreveu umas questões pondo-se no lugar de um aluno. Ora vejam: "Caro colega, a sua mensagem causou-nos bastante perplexidade, pois trata-se de um resultado bem conhecido e muito elementar. Sugerimos que consulte o Caderno de Apoio às Metas Curriculares de Matemática, que se encontra disponível no site da DGE. Outra possibilidade é fazer uma simples procura por «0,(9)=1» num qualquer motor de busca, e encontrará certamente todo o tipo de demonstração deste facto, das mais intuitivas às mais rigorosas. Não podemos deixar de comentar a sua alusão ao «número imediatamente anterior ao número 1» na reta real, conceito que não faz qualquer sentido. Se x fosse um tal número, (x+1)/2 estaria estritamente entre x e 1, contradizendo a afirmação de que «x é o número imediatamente antes do 1». Também este raciocínio é elementar e bem conhecido. Note que este facto não cria «buracos» na reta real (nem se vê que relação a igualdade em questão possa ter com esse assunto). (...) A equipa das Metas Curriculares"

Claro, que um email deste tipo exigia uma resposta da minha parte e foi assim : "Agradeço a vossa rápida resposta. Apesar de conhecer já há algum tempo as demonstrações que falam, nunca considerei que explicar a um miúdo da secundário, muito menos aos meus alunos de cálculo numérico, alunos universitários, que o resultado 0,(9)=1 fosse assim tão trivial. Não o é. Para mim, introduzindo este resultando, como dizem, tão elementar, e tão simples, vai abrir uma caixa de Pandora no raciocínio matemático para o qual alunos e professores não estão preparados.(...) em minha opinião, não conseguiram com as vossas ações de formação, dotar os professores de defesas suficientes de resposta, para o mundo que querem abrir na mente dos nossos jovens."

Depois veio o pedido de desculpas da mesma equipa: "Caro colega, da sua mensagem inicial depreendemos que nos estava a colocar uma dúvida estritamente científica e não uma preocupação pedagógica, como refere nesta sua segunda mensagem. Se houve algum equívoco da nossa parte, disso pedimos desculpa. Do ponto de vista pedagógico, temos tido bom feed-back dos muitos professores que frequentaram as nossas formações ou as respetivas réplicas. Trata-se, aliás, de um assunto que já era muitas vezes tratado por vários professores, ainda que não constasse explicitamente do Programa anterior. Com os melhores cumprimentos, A equipa das Metas Curriculares."

Afinal, será ou não 0,(9)=1 ? O número 0,(9) não pode ser confundido com o número inteiro 1. Afinal os números inteiros não podem ser vistos como dízimas infinitas periódicas! A igualdade aqui refere-se apenas ao facto de que ambos os números representam a mesma quantidade. Aliás, isso acontece para qualquer base numérica, pois se tivermos uma base (n+1), o valor numérico quantitativo de 0.nnn...é sempre um! Com o auxílio de limites, claro ...