

# Do desafio das pizzas ao teorema de Pitágoras



Por: Ricardo Cunha Teixeira  
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade dos Açores  
ricardo.ec.teixeira@uac.pt

Imagine o leitor que resolve dedicar-se à confecção de pizzas de três tamanhos: pizza pequena, pizza média e pizza grande. Suponha que pretenda que a quantidade da pizza grande coincida com as quantidades combinadas das pizzas pequena e média. Em termos de porções, isto significa que comer uma pizza grande deverá proporcionar a mesma quantidade de pizza que comer uma pequena juntamente com outra média. Como deve calcular o tamanho da pizza grande a partir dos tamanhos das pizzas pequena e média? Adicionalmente, considere resolver este desafio para dois formatos diferentes de pizza: pizzas quadradas e pizzas circulares.

O conhecido teorema de Pitágoras permite obter a solução para este desafio. Ora, todos nós aprendemos na escola que, num triângulo retângulo (triângulo com um ângulo reto), o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos (o resultado está ilustrado na Figura A). No que diz respeito à terminologia usada, num triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto (ângulo de 90 graus) chamam-se catetos. Já o lado que se opõe ao ângulo reto é sempre o maior dos três lados e assume a designação de hipotenusa. As medidas dos lados de um triângulo retângulo obedecem, portanto, à igualdade determinada pelo teorema de Pitágoras. Quando os três valores são números inteiros, estes chamam-se ternos ou triplos pitagóricos. A Figura B apresenta uma lista de alguns ternos pitagóricos, sendo que existe um número infinito de ternos pitagóricos. Por exemplo, (3, 4, 5) é um terno pitagórico pois o quadrado do número maior é igual à soma dos quadrados dos números menores ( $3 \times 3 = 9$ ,  $4 \times 4 = 16$ ,  $5 \times 5 = 25$  e  $25 = 9 + 16$ ).

O teorema de Pitágoras é um exemplo notável de um resultado matemático que, passados milénios desde a sua descoberta, continua a ter impacto em termos das suas aplicações práticas. Sinal disso é que o teorema de Pitágoras ainda é ensinado na escola. Em Portugal, faz parte do currículo de Matemática do 8.º ano de escolaridade, sendo invocado nos anos seguintes sempre que necessário no contexto da sua aplicação em diversos cálculos matemáticos. Mas será Pitágoras o autor deste teorema? Antes de resolvermos o desafio que serve de mote a este texto, vamos fazer uma breve viagem pela nossa história, recuando à Babilónia e ao antigo Egipto.

A região da Mesopotâmia, localizada entre os rios Eufrates e Tigre, foi o local onde se desenvolveram várias civilizações antigas com impacto

na história da Humanidade, como os sumérios (entre 4000 e 2000 a.C.) e os babilónios (com destaque para a ascensão da cidade da Babilónia por volta de 1894 a.C. e para um período de grande influência até cerca de 539 a.C., quando a cidade foi conquistada pelos persas). Os arqueólogos encontraram muitos registos em argila dessas civilizações, destacando-se cerca de 300 tábuas de argila com conteúdos matemáticos. Uma dessas tábuas, a Plimpton 322, apresenta uma lista de ternos pitagóricos, o que mostra que os babilónios já dominavam alguma geometria elementar.

A cerca de 1000 quilómetros da Mesopotâmia, ao longo do vale do Nilo, desenvolveu-se outra civilização, o Antigo Egipto, desde cerca de 4500 a.C. até à conquista persa em 332 a.C. Os egípcios não usavam placas de argila, faziam antes os seus registos em papiros. Neste contexto, há a destacar o papiro de Rhind, datado de cerca de 1650 a.C., por ser o compêndio mais antigo de Matemática que se conhece. Contudo, este documento não faz qualquer referência ao resultado que mais tarde viria a ser conhecido como teorema de Pitágoras. Mesmo assim, sabe-se que os egípcios usavam cordas com nós equidistantes entre si, a fim de formarem triângulos de lados com 3, 4 e 5 unidades de medida, aplicando assim o princípio dos ternos pitagóricos para determinar ângulos retos em construções, como nas pirâmides.

Passamos agora para o tempo de Pitágoras, uma das figuras mais misteriosas da história. De facto, a informação que chegou ao presente é limitada e envolta em mistério, uma vez que muitos dos ensinamentos de Pitágoras foram passados oralmente antes de serem registados. Pensa-se que Pitágoras terá nascido na ilha de Samos, no mar Egeu, por volta de 570 a.C. O filósofo lendário terá feito inúmeros viagens, tendo visitado os maiores centros civilizacionais do mundo antigo, onde terá certamente contactado com o conhecimento prático associado aos ternos pitagóricos. Mais tarde, Pitágoras terá se instalado em Crotona, no Sul de Itália, onde desenvolveu e ensinou as suas ideias, tendo fundado a escola pitagórica.

A vivência dos membros da escola pitagórica era baseada em princípios de camaradagem, disciplina e num estilo de vida comunitário, seguindo regras rígidas de conduta. Os pitagóricos acreditavam numa forte relação entre os números e o universo, defendendo que tudo poderia ser compreendido através de propriedades matemáticas, o que influenciou profundamente a filosofia e a ciência ocidentais.

É possível que Pitágoras não tenha sido o primeiro ser humano a vislumbrar o teorema que hoje tem o seu nome, mas foi, sem dúvida, ele e os membros da sua escola os responsáveis por generalizar casos particulares conhecidos por várias civilizações antigas (como o triângulo retângulo de lados com 3, 4 e 5 unidades de medida) para um resultado demonstrável e válido para todo e qualquer triângulo retângulo.

O teorema de Pitágoras integra os Elementos de Euclides, uma obra clássica de Matemática escrita por volta de 300 a.C. e composta por treze volumes que abordam temas de geometria e teoria dos números, segundo um método lógico baseado em axiomas e postulados. Esta obra teve um impacto profundo no mundo ocidental, estabelecendo as bases da geometria euclidiana e promovendo a aplicação de métodos rigorosos de demonstração.

A Figura C apresenta uma versão simplificada da ilustração que consta nos Elementos de Euclides e que contextualiza o teorema de Pitágoras. Podemos observar três quadrados construídos a partir de cada um dos lados de um triângulo retângulo. De notar que o teorema de Pitágoras é apresentado habitualmente da seguinte forma: num triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos. Contudo, o recíproco também é válido, ou seja, se o quadrado de um dos lados de um triângulo for igual à soma dos quadrados dos outros dois então esse triângulo tem de ser retângulo. Este resultado está na base da utilização desde o Antigo Egipto da corda com nós equidistantes que permite, com a ajuda de estacas, obter um triângulo de lados

com 3, 4 e 5 unidades de medida (por exemplo, metros), pois os lados de menor comprimento (3 e 4 metros) formam necessariamente um ângulo reto entre si. Por conseguinte, se o leitor quiser fazer no seu quintal um canteiro retangular pode aplicar esta técnica e recorrer a estacas e a uma corda com estas características, de modo a garantir que os cantos dos canteiros são ângulos retos (ver Figura D).

Se voltarmos a observar a Figura C, verificamos que a partir dos valores dos catetos (a e b) podemos obter o valor positivo da hipotenusa (c). Além disso, a área ou porção de plano ocupada pelo quadrado maior determinado pela hipotenusa é igual à soma das áreas dos dois quadrados mais pequenos definidos pelos catetos. Assim, regressando ao nosso desafio inicial, se as pizzas forem quadradas e se, por exemplo, as pizzas pequena e média medirem, respetivamente, 20 cm e 30 cm de lado, então estes valores podem ser considerados as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, pelo que conseguimos determinar o valor da hipotenusa (Figura E) e concluir que a pizza grande deve ser um quadrado com cerca de 36 cm de lado.

Mas não nos ficamos por aqui. Se substituímos os quadrados por semicírculos tendo os lados de um triângulo retângulo como diâmetros, verificamos também que a área do semicírculo maior é igual à soma das áreas dos semicírculos menores (Figura F). Por conseguinte, esta propriedade também é válida para os círculos completos. Assim, se tivermos pizzas circulares e as pizzas pequena e média medirem de diâmetro, respetivamente, 20 cm e 30 cm, então a pizza grande, para ter como área a soma das áreas de uma pizza pequena e de outra média, deve também ter como diâmetro cerca de 36 cm. E podemos estender este resultado para outras figuras planas, considerando figuras semelhantes proporcionais aos lados de um triângulo retângulo.

É questão para se dizer que o velho teorema de Pitágoras ainda nos continua a surpreender!

