

Aplicações, Funções e as Transformações na Matemática



João Cabral*

A 5 de dezembro de 1901, na cidade de Illinois, Chicago, nos Estados Unidos da América, nasceu Walt Disney, conhecido produtor cinematográfico, cineasta, diretor, co-fundador da "Walt Disney Company" e criador das famosas personagens Mickey Mouse e Pato Donald entre outros grandes feitos no mundo da sétima arte. O seu lema de vida era "Keep moving forward" – siga em frente! Dois anos mais tarde, em 1903, também a 5 de dezembro nasceu em Bellano, Cecil Frank Powell, físico britânico laureado em 1950 com o prémio Nobel da Física, pelo desenvolvimento do método fotográfico que permite elaborar estudos de processos nucleares. Avançando no tempo, a 5 de dezembro de 1911, nasceu em Varsóvia, o famoso pianista polaco Wladyslaw Szpilman, cuja biografia deu origem ao filme "O pianista", realizado pelo realizador Roman Polanski.

Aproveitando o facto de que estas três grandes personalidades nasceram no mesmo dia do ano, a 5 de dezembro, hoje resolvi falar-vos num aspeto da Matemática que os liga entre si.

Quando Walt Disney começou a elaborar os seus primeiros desenhos à mão numa folha de papel, criando personagens, que já ocuparam, mesmo por breves momentos, a infância de todos nós, como o Rato Mickey e o Pato Donald, criando um mundo imaginário fantástico, e mais tarde realizando sequências de animação, usando métodos fotográficos de "frame to frame" para produzir os primeiros filmes da família Disney, nunca imaginaria Walt Disney que a companhia criada por si iria adquirir a Dream Works, famosa empresa produtora de filmes no domínio digital. No fundo os seus herdeiros deram seguimento, com mais ou menos dificuldade, ao seu lema "Keep moving forward". Ora, uma das mais importantes ferramentas matemáticas para construir desenho digital, usando o computador, são as chamadas transformações. Os novos "artistas digitais" são criativos que trabalham em empresas como a Dream Works, criando mundo fabulosos que saltam da imaginação dos escritores, são programadores que dominam técnicas matemáticas embebidas no mundo das transformações lineares, que em Portugal só no ensino superior começam a ser ensinadas, especialmente em cursos relacionados com ciências, em disciplinas como Álgebra Linear ou Cálculo. No entanto, apesar de Walt Disney não ser contemporâneo dos modernos computadores, executava os seus desenhos com um grafismo de qualidade, executando manualmente técnicas de desenho, que ainda hoje são a base de muitos criadores de desenho animado, com regra e esquadro, seguindo aspetos formais que fazem parte da



Walt Disney



Cecil Powell



Szpilman

Moderna Teoria das Transformações na Matemática. Simular um movimento de uma figura de banda desenhada, uma rotação no ponto de vista da imagem, ou até mesmo simular movimento que contenha rotações em simultâneo é o que permite o próprio desenho criar vida no papel. Técnicas, que à luz da Matemática, são conhecidas por translação, rotação e translação refletida, respetivamente.

Obviamente, quanto a Cecil Powell, durante o seu trabalho como Físico, teve de usar as Transformações matemáticas para colocar no papel todo o desenvolvimento científico do seu trabalho. São as transformações matemáticas que codificam os passos do raciocínio quando lidamos com entidades abstratas e difíceis de compreender à luz do simples cálculo matemático. Os físicos foram os cientistas que mais contribuíram para a evolução da própria teoria das Transformações, pois têm de lidar com dimensões tão pequenas como as dimensões de um méson, constituindo a estrutura nuclear do átomo, bem como dimensões gigantescas como a dimensão de uma galáxia, adaptando e reestruturando as técnicas já existentes de modo a compreender melhor, com o contributo dos matemáticos, a Natureza que nos envolve.

Quanto a Szpilman, um dos mais produtivos compositores polacos de todos os tempos, usava o piano como poucos, fazendo dele um instrumento de comunicação universal através da música. Na composição musical de um pianista podemos extrair facilmente excertos dos seus sentimentos, do seu estado emocional, alegrias e tristezas. No fundo o artista musical funciona como um agente transformador do mundo que o envolve, processando através da música todos estímulos que os seus sentidos recebem do seu meio envolvente, construindo uma mensagem que será distribuída por todos os que escutarem a sua obra. Esta mensagem tem uma estrutura, uma forma, que dá origem a uma obra de arte musical que pode perpetuar no tempo, mesmo depois da morte do artista. Muitos outros compositores podem até usar pequenos excertos desta harmonia original, recriando outras melodias, dando origem ao seu próprio estilo de música. Mas, Szpilman, um génio criador de melodias extremamente belas, nem imaginava que no futuro os criado-

res poderiam conceber, usando uma simples mesa de mistura e um computador munido de um bom programa, melodias quase tão belas como as suas e quase sem o esforço físico que é o de dominar um piano durante um concerto. Só com o uso das Transformações matemáticas é que foi possível este salto tecnológico. Pois o computador, sendo uma máquina, cuja linguagem se baseia em código binário, de zeros e uns, não sabe interpretar, sem a ajuda de um humano, uma pauta musical. Esta interpretação é feita por programas, software próprio, criado para o efeito por programadores, usando todo um conhecimento herdado da teoria matemática. As misturas musicais, que são realizadas em mesas de mistura, só acontecem porque são equipamentos formados por componentes designados de filtros. Estes filtros são criados usando transformações matemáticas. São tão importantes no mundo digital, que nos cursos superiores existem disciplinas cujo conteúdo é apenas apenas constituído pelo entendimento matemático de como o fenómeno da filtragem se processa, como por exemplo a disciplina de Sistemas e Sinais.

Mas afinal, o que são as Transformações Matemáticas?

No âmbito do ensino básico e secundário, na disciplina de Matemática, fazemos o estudo de Aplicações. Uma aplicação na Matemática é uma relação que existe entre os elementos de dois conjuntos. Normalmente é designada por uma letra do alfabeto, sendo a mais usada a letra "f". Ao escolher dois conjuntos, um conjunto A e um conjunto B, quando escrevemos $f: A \rightarrow B$, estamos a dizer que existe uma relação entre os elementos do conjunto A e do conjunto B. Aos elementos do conjunto A chamamos de objetos e aos elementos do conjunto B chamamos de imagens. Se todos os elementos do conjunto A estão relacionados com algum elemento do conjunto B, então designamos o conjunto A por domínio da aplicação, caso contrário apenas dizemos que este é o conjunto de partida. Se todos os elementos do conjunto B estão relacionados com algum elemento do conjunto A, então dizemos que o conjunto B é o contradomínio da aplicação, caso contrário apenas dizemos que este é o conjunto de chegada. Quando os diferentes elementos do conjunto A, um por

um, estão relacionados com um e um só elemento do conjunto B, então mudamos o nome da relação para função. Assim, uma Função é uma aplicação, em que para um determinado objeto, elemento do conjunto A, só existe uma imagem, elemento do conjunto B. Uma imagem pode ser partilhada por dois objetos diferentes, que a aplicação não deixa de ser uma Função, mas nunca uma aplicação pode ser uma função se duas imagens diferentes partilharem o mesmo objeto. O conceito de domínio, contradomínio, conjunto de partida e conjunto de chegada para as funções é o mesmo do que nas aplicações. Usualmente, na escrita, para simplificar a linguagem, $f: A \rightarrow B$, o conjunto A, quando se lida com Funções, é tomado como sendo o domínio da função, por isso todos os elementos de A têm correspondência com algum elemento de B. Quando um elemento do conjunto A, um a um, está relacionado apenas com um e só elemento do conjunto B, ou seja, um objeto tem uma e uma só imagem pela função f, dizemos que a função é injetiva. Globalmente, em termos de escrita, escrevemos $f(x)=y$, para comunicarmos a mensagem de que estamos a relacionar um elemento "x", do conjunto A, com um elemento "y", do conjunto B, usando a função "f".

Na Matemática as funções apenas têm como domínio conjuntos formados por números, por exemplo, o conjunto dos números naturais; o conjunto dos números inteiros; o conjunto dos números racionais; o conjunto dos números reais; o conjunto dos números complexos, etc, ou partes destes conjuntos, que são designados por subconjuntos. Uma Transformação é uma função em que o seu domínio pode ser não apenas um conjunto de números, mas um conjunto qualquer no domínio do abstrato. Por esta existência, no abstrato, do domínio, podemos detetar o uso da Teoria das Transformações por Desenhistas, Físicos e até Músicos compositores, mesmo que estes não fizessem intenção de a usar!

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
jcabral@uac.pt