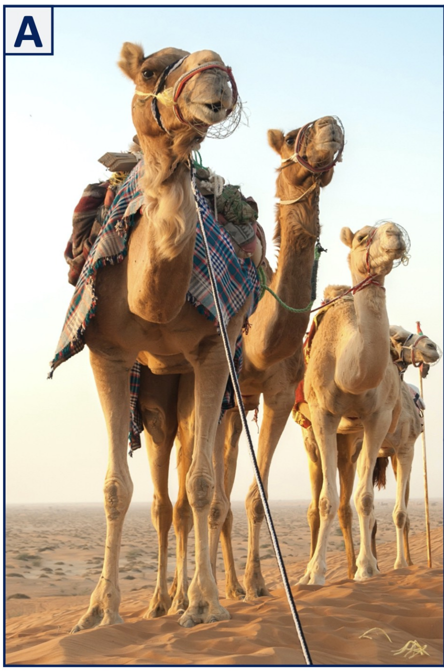
Heranças (im)possíveis de repartir

Ricardo Cunha Teixeira
Professor do Departamento
de Matemática e Estatística
da Faculdade de Ciências e
Tecnologia da Universidade dos
Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt

A



B

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9}{18}+\frac{6}{18}+\frac{2}{18}=\frac{17}{18}=1-\frac{1}{18}$$

C

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1-\frac{1}{d}$$

VARIANTE	*a*	*b*	*c*	*d*
1	2	3	9	18
2	2	3	8	24
3	2	3	7	42
4	2	4	8	8
5	2	4	6	12
6	2	4	5	20

D

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1+\frac{1}{d}$$

VARIANTE	*a*	*b*	*c*	*d*
1	2	3	3	6
2	2	3	4	12
3	2	3	5	30

Este texto é dedicado a um dos quebra-cabeças que contradizem a intuição mais conhecidos da Matemática Recreativa: o problema dos 17 camelos. Eis a versão mais comum que deixará o leitor surpreendido.

Um xeique árabe morreu deixando camelos de herança para serem repartidos pelos seus três filhos (figura A). No testamento, o xeique especificou que o filho mais velho devia receber metade dos camelos; por sua vez, o filho do meio devia receber um terço dos camelos; já o filho mais novo devia receber um nono dos camelos. Os filhos foram examinar a cáfila e descobriram que havia 17 camelos. Mas 17 não é divisível por 2, 3 ou 9 e os filhos ficaram perplexos. Na verdade, 17 camelos a dividir por 2 dá 8 camelos e metade de outro; por sua vez, 17 camelos a dividir por 3 dá 5 camelos e dois terços de outro; finalmente, 17 camelos a dividir por 9 dá 1 camelo e oito nonos de outro. Contudo, como os camelos eram valiosos vivos, os irmãos não queriam cortá-los em pedaços. Depois de muita discussão e de algumas desavenças entre os irmãos (não fossem as heranças um dos principais focos causadores de desavenças nas famílias), eles decidiram consultar o sábio local e mandaram chamá-lo.

O sábio chegou montado no seu camelo e ouviu o problema de repartição da herança. Depois de refletir sobre o assunto, o sábio encontrou uma forma de resolver o impasse. Ele disse aos irmãos que lhes emprestava o seu camelo para que as contas fossem feitas com18 camelos. Assim, o sábio atribuiu metade dos camelos ao filho mais velho, ou seja, 9 camelos (18 a dividir por 2 é igual a 9); depois, um terço dos camelos ao filho do meio, ou seja, 6 camelos (18 a dividir por 3 é igual a 6); por fim, um nono dos camelos ao filho mais novo, isto é,2 camelos (18 a dividir por 9 é igual a 2). Os irmãos nada tiveram a reclamar. Cada um deles acabou por ficar com mais camelos do que os que receberia antes (pois os valores da divisão de 17 camelos por 2, 3 e 9 acabaram por ser arredondados para o número inteiro mais próximo). Todos lucraram com a solução apresentada pelo sábio.

Curioso é que, depois da repartição da herança estar concluída, os três irmãos constataram, com alguma perplexidade, que tinham ficado ao todo com 9+6+2=17 camelos! Ou seja, sobrou 1 camelo, precisamente o camelo que o sábio tinha emprestado para desbloquear o impasse. Assim, o sábio recuperou o seu camelo e partiu rumo ao pôr do Sol!

A chave deste quebra-cabeças reside no facto de a soma das três frações da herança não ser igual a 1, mas sim inferior à unidade em 1/18 (figura B). Normalmente quem ouve ou lê o problema não repara neste detalhe, daí ficar surpreendido com a solução apresentada pelo sábio no final.

Este quebra-cabeças é uma variante de uma tipologia antiga de problemas sobre partilhas que se caracterizam pela soma das partes não ser igual à unidade. O exemplo mais antigo que se tem conhecimento remonta ao Papiro de Amósis, datado de 1650 a.C., envolvendo 700 pães e as frações 2/3, 1/2, 1/3 e 1/4.

A primeira ocorrência da repartição de animais envolvendo o empréstimo de um animal e as frações 1/2, 1/3 e 1/9 remonta aparentemente ao ano de 1872. A obra "Livro dos truques de conjuração fáceis e difíceis" apresenta o desafio com 17 elefantes. Cerca de uma década depois, surge a versão envolvendo 17 cavalos. O seu autor, Richard Proctor, afirma que se trata de um quebra-cabeças familiar sobre um agricultor, com pouco conhecimento dos números, que deixa 17 cavalos aos seus três filhos. Para além da versão tradicional, Richard Proctor apresenta uma variante envolvendo as mesmas frações, mas 35 animais. Qual o impacto da alteração no número de animais, de 17 para 35?

Vamos retomar o desafio apresentado no início deste texto, mas agora considerando 35 camelos. Os três irmãos continuam com problemas em repartir a herança, pois 35 não é divisível por 2, 3 ou 9. Chamam o sábio e este empresta o seu camelo aos irmãos, que ficam com 36 camelos ao todo. Metade dos camelos pertence ao filho mais velho, que herda 18 camelos; o filho do meio fica com um terço dos camelos, ou seja, com 12 camelos; eo filho mais novo herda um nono dos camelos, isto é, 4 camelos. Depois da repartição da herança estar concluída, os três irmãos ficam no total com 18+12+4=34 camelos! Ou seja, sobram 2 camelos. Um deles pertence ao sábio, que tinha emprestado o seu camelo aos três irmãos para permitir a partilha da herança. Mas ainda resta um camelo! Como agradecimento por ter resolvido o contencioso entre os três irmãos relativo à herança (im)possível de repartir, o sábio recebe de oferta o camelo adicional e fica com 2 camelos! Esta variante acaba por ter um desfecho ainda mais interessante, pois o sábio não só recupera o seu camelo como recebe um camelo extra de oferta.

Há quem considere que o problema dos 17 camelos possa ter origem árabe, hindu ou chinesa, mas não há evidências consistentes nesse sentido. O século XX foi muito fértil para esta tipologia de problemas, pois surgiram numerosas variantes em jornais e livros dedicados a quebra-cabeças, que envolveram a repartição de itens variados desde camelos, cavalos, elefantes e vacas até dinheiro, poços de petróleo e automóveis Rolls-Royce! Em geral, 17 é o número mais usado, mas também há variantes com outros números (como a versão acima que envolve 35 camelos). As frações também podem variar, bem como o número de herdeiros. David Singmaster (1938-2023), matemático de renome conhecido pela sua paixão pela Matemática Recreativa, estudou as variantes que podem surgir, perante um determinado número de herdeiros, em termos do total de itens a considerar e das respetivas frações unitárias (frações de numerador 1). Na figura C, mostram-se algumas das variantes para três herdeiros identificadas por David Singmaster. De notar que a tabela deve ser lida da seguinte forma: cada variante envolve d-1 itens para repartir e as frações unitárias a aplicar a cada irmão são 1/a, 1/b e 1/c. Por exemplo, a primeira variante da tabela corresponde a 18-1=17 itens e às frações unitárias 1/2, 1/3 e 1/9 (ou seja, o exemplo apresentado no início deste texto). De notar que podemos também duplicar o valor apresentado na coluna da letra d. A consequência é que o sábio, para além de ter o seu item de volta, recebe um item adicional. E o que acontece se triplicarmos o valor da coluna d? A resposta fica a cargo do leitor!

Em todas as situações analisadas anteriormente, a soma das frações é um valor inferior à unidade (de forma mais precisa, a soma das frações é igual à unidade menos uma fração unitária). Há também variantes em que a soma das frações é superior à unidade, sendo igual à unidade mais uma fração unitária. A figura D apresenta as variantes estudadas por David Singmaster para três herdeiros. A tabela deve ser lida da seguinte forma: cada variante envolve d+1 itens para repartir e as frações unitárias a aplicar a cada irmão são 1/a, 1/b e 1/c. Por exemplo, a segunda variante envolve 12+1=13 itens e as frações 1/2, 1/3 e 1/4. Podemos reformular o problema apresentado no início deste texto, considerando 13 camelos e as frações um meio, um terço e um quarto. A primeira ocorrência deste problema é atribuída a Jonathan Always, em 1971. Ora, continuamos a ter uma situação em que 13 não é divisível por 2, 3 e 4. Mas, quando o sábio é convocado pelos três irmãos, em vez de emprestar o seu camelo, ele pede um dos camelos da herança. Assim, os irmãos passam a ter 12 camelos, ficando o mais velho com metade (6), o irmão do meio com um terço (4) e o irmão mais novo com um quarto (3). Ao atribuir a herança ao último irmão, chega-se à conclusão que falta um camelo. Nesse momento, o sábio devolve o camelo que tinha pedido emprestado, ficando o terceiro irmão com os seus três camelos! E o camelo do sábio não entra nas contas.

Esta tipologia de problemas tem sido usada, de forma recorrente, em discursos motivacionais com vista à resolução "fora da caixa" de problemas e conflitos. Por exemplo, William Ury, no seu discurso no TEDxMidwest em 2010, partilhou com a audiência o desafio dos 17 camelos. Para William Ury, este problema lembra-lhe as negociações difíceis em prol da paz que integrou nas últimas décadas: "Elas começam com 17 camelos e sem qualquer solução. De alguma forma, o que temos de fazer é recuar em situações assim, como fez o sábio, ver a situação com um novo olhar e surgir com o 18.º camelo". Encontrar o 18.º camelo pode, portanto, fazer toda a diferença na resolução de conflitos mundiais!