

# Quadrados Mágicos

## - Quadrado de Durer



Helena Sousa Melo\*

Como vimos na semana passada, um quadrado mágico é uma tabela de números inteiros, com a mesma quantidade de linhas e colunas, cuja soma, de todos os valores de cada linha, de cada coluna, ou de cada diagonal, é sempre a mesma. Esse resultado invariável é chamado constante do quadrado e o número de quadrículas de uma linha, ou de uma coluna, é denominado a ordem do quadrado.

Conhecidos desde a antiguidade, vêm intrigando várias pessoas, desde matemáticos, artistas e o homem comum.

No texto anterior foram referenciados os quadrados mágicos planetários. O quadrado de ordem 3 está associado a Saturno, o de ordem 4, associado a Júpiter, o de ordem 5, a Marte, o de ordem 6, associado ao Sol, o de ordem 7, associado a Vénus, o de ordem 8, associado a Mercúrio e o de ordem 9 associado a Lua. Cada qual com o respetivo número místico, soma de todos os elementos do quadrado, e a rota, soma de uma linha, ou coluna, do quadrado. Assim, temos para Saturno os valores 45 e 15, para Júpiter, 136 e 34, para Marte, 325 e 65, para o Sol, 666 e 111, para Vénus, 1225 e 175, para Mercúrio, 2080 e 260, e para a Lua, 3321 e 369, respetivamente o número místico e a rota de cada quadrado mágico planetário. Podemos então constatar que a rota pode ser definida, sem precisar recorrer a grandes fórmulas matemáticas, pelo quociente entre o número místico e a ordem do quadrado mágico. Por exemplo, relativo ao quadrado mágico associado ao Sol temos que  $111 = 666 / 6$ .

O número místico também pode ser obtido calculando o valor da metade do produto do número de quadrículas pelo número de quadrículas adicionadas de uma unidade. Por exemplo, para o cálculo do número místico do quadrado associado a Marte, ordem 5, fazemos primeiro o produto de vinte e cinco por vinte e seis e depois dividimo-lo por dois, simbolicamente,  $[25 \times (25 + 1)] / 2 = 325$ . Isto é certo porque os números existentes nesse quadrado, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 e 25, formam uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 1 e de razão igual a 1.



Fonte: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:D%C3%BCrer\\_Melancholia\\_I.JPG](http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:D%C3%BCrer_Melancholia_I.JPG)



Façamos um aparte para sabermos o que é uma progressão aritmética.

Uma progressão aritmética é uma sequência de números em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior com uma constante, chamada de razão ou diferença comum da progressão aritmética. Numa progressão aritmética cada termo, exceto os extremos, é a média aritmética do termo anterior e do termo posterior ao considerado. Por exemplo, na progressão aritmética 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, temos que  $3 = (2+4)/2$ , ou  $7 = (6+8)/2$ . Todos os outros quadrados mágicos planetários também são formados pelo mesmo tipo de progressão aritmética, com o primeiro termo é igual 1 e a razão 1.

Voltemos aos nossos quadrados mágicos.

Para que os quadrados planetários sejam perfeitos, ou seja, mágicos, a soma de cada linha, coluna, ou diagonal, deverá ter o mesmo valor, ou seja, ter a mesma rota ou direção. Assim, para termos a rota de cada planeta, que no texto anterior foi encontrada de modo experimental pela soma de uma linha, ou coluna, ou diagonal, devemos considerar a metade do número de quadrículas, adicionadas de uma unidade e depois multiplicá-la pela ordem do quadrado. Por exemplo, para o planeta Júpiter, de ordem 4, fazemos  $[(16+1)/2] \times 4 = 34$ . Como sabemos, o quadrado mágico planetário de Júpiter tem rota igual a 34 e número místico igual a  $34 \times 4 = 136$ . Esse quadrado mágico é composto pelos números: na primeira linha 4, 14, 15 e 1; na segunda linha 9, 7, 6 e 12; na terceira linha 5, 11, 10 e 8 e na última linha 16,

2, 3 e 13. Se adicionarmos qualquer uma das linhas, ou colunas, ou diagonal, obtemos 34. Por exemplo, consideremos a 2ª linha, temos que  $9+7+6+12 = 34$ .

Um quadrado mágico de ordem 4 admite até 48 formações diferentes, uma delas encontra-se no canto superior direito da gravura Melancholia, obra do pintor, ilustrador e teórico de arte alemão Albrecht Dürer (1471 — 1528), também com interesse em outras áreas, nomeadamente a matemática, a geometria, a geografia e a arquitetura. Esse quadrado mágico é composto na primeira linha pelos números 16, 3, 2 e 13, na segunda pelos números 9, 10, 11 e 8, na terceira pelos números 6, 7 e 12 e a quarta e última linha pelos números 4, 15, 14 e 1. Se repararmos bem, estamos perante o quadrado mágico planetário associado a Júpiter onde após a troca das duas colunas centrais, escrevemo-lo invertendo a disposição das linhas, ou seja, a última linha do quadrado planetário é a primeira linha no quadrado da gravura, a penúltima é a segunda, a antepenúltima é a terceira e a primeira linha do quadrado planetário é a sua última.

Um facto curioso é que este quadrado mágico de ordem 4, utilizando os números de 1 até 16, possui a particularidade de na sua última linha, e nas duas quadrículas centrais, estando lado a lado os números 15 e 14 que formam 1514, data da realização da obra. Observamos também que nessa mesma linha, nas casas extremas, estão os números 4 e 1. Se associarmos as letras do alfabeto a estes números temos a correspondência da letra D ao número 4 e da letra A ao número 1, que são as iniciais

do autor dessa gravura.

Como propriedades deste quadrado mágico, também conhecido como quadrado de Durer, temos que a soma dos números de qualquer uma das linhas, colunas, ou diagonais é sempre 34, o mesmo valor que a rota do quadrado mágico associado a Júpiter, bem como, o mesmo para a soma dos quatro números que estão nas quatro quadrículas centrais, isto é,  $10+11+6+7 = 34$ , ou para a soma dos dois números centrais da linha do alto com os dois centrais da linha de baixo, ou seja,  $3+2+15+14 = 34$ , ou para a soma dos números das duas quadrículas adjacentes à casa extrema esquerda em cima com aqueles das duas adjacentes à casa extrema direita em baixo, isto é,  $16+5+12+1 = 34$ , ou para as quatro quadrículas alternadas que contêm os números 2, 8, 9 e 15, cuja soma é 34. Outras somas, envolvendo quatro números desse mesmo quadrado mágico, resultam também 34. Experimente encontrá-los e deslumbre-se com a sua magia inerente.

Há muitos outros tipos de quadrados mágicos, relacionados com a arte, com personalidades da história, com matemáticos, com jogos de tabuleiro, que ocultam todo um fascínio ao redor da sua formação e das duas propriedades, mas esses serão temas para outros encontros

\* hmelo@uac.pt

CMATI - Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação  
Departamento de Matemática  
Universidade dos Açores