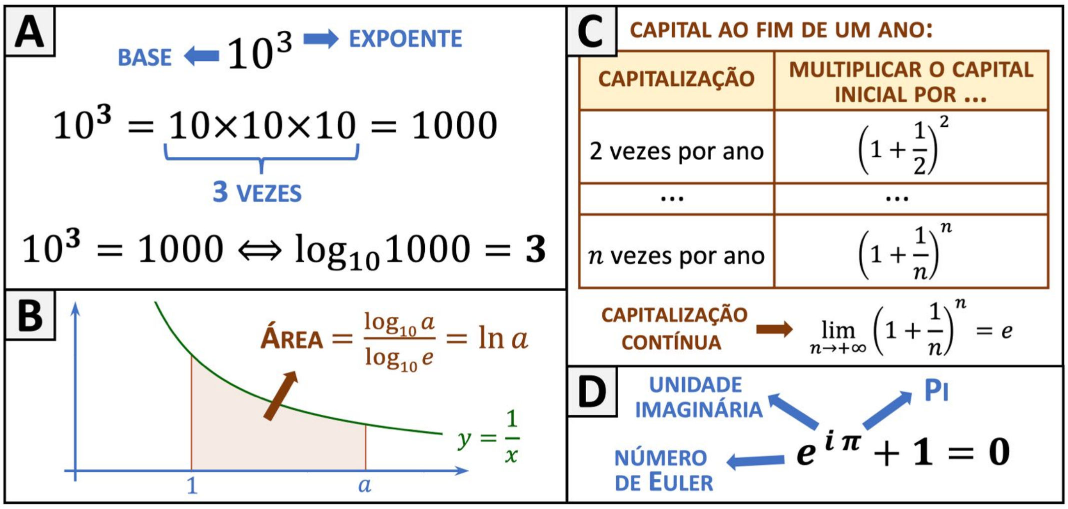
e de Emblemático

Por: Ricardo Cunha Teixeira
Professor Associado da Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade dos Açores
ricardo.ec.teixeira@uac.pt



Em toda a história da Matemática, poucos números tiveram um impacto tão profundo e abrangente como a constante representada pela letra e. Conhecida como o número de Euler, em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), esta constante possui propriedades verdadeiramente extraordinárias que a tornam essencial em diversos ramos da Matemática. Ao explorarmos o papel deste número ao longo dos tempos, somos mergulhados numa aventura de descoberta sobre como um único número pode ser tão relevante para a compreensão do mundo que nos rodeia.

O número de Euler tem as suas origens ligadas ao desenvolvimento dos logaritmos, uma inovação crucial no cálculo matemático. Explicar o conceito de logaritmo a alguém que não seja especialista em Matemática pode ser feito através de uma analogia simples. Imagine que um logaritmo é uma espécie de "detetive de expoentes". Quando escrevemos uma potência, por exemplo, 10^3 = 1000, significa que estamos a multiplicar o número 10 por ele próprio três vezes para obter 1000. O "detetive" logaritmo faz a seguinte pergunta: "Quantas vezes devemos multiplicar 10 por ele próprio para obter 1000?" A resposta é três e, por isso, dizemos que o logaritmo de 1000 na base 10 é 3 (Figura A). De uma forma geral, o logaritmo responde à pergunta: "Dada uma potência com uma determinada base, qual é o expoente que devemos considerar para obter um certo valor?".

Nos séculos XVI e XVII, o matemático suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o escocês John Napier (1550-1617) desempenharam um papel fundamental na criação de tabelas de logaritmos, que visavam simplificar cálculos complexos, especialmente na astronomia e na navegação (numa altura em que ainda não existiam calculadoras eletrónicas). Bürgi desenvolveu uma tabela de progressões aritméticas e geométricas que, embora publicada mais tarde, mostrou uma abordagem inicial ao conceito de logaritmo. Quase simultaneamente, John Napier publicou o que é considerado o primeiro tratado sobre logaritmos, introduzindo esta ferramenta poderosa aos matemáticos europeus. A busca por simplificar multiplicações e divisões através da transformação em adições e subtrações levou ao primeiro "vislumbre" do número e. Nos seus cálculos, Bürgi e Napier obtiveram, respetivamente, valores aproximados deste número e do seu inverso (1/e). Tal como aconteceu com tantos outros processos de descoberta ao longo da história, Bürgi e Napier não tiveram consciência que estavam muito próximos de identificar esta fascinante constante matemática.

Mais tarde, o físico holandês Christiaan Huygens (1629-1695) lançou as bases para o desenvolvimento do cálculo integral, que se revelaria fundamental em muitos campos da ciência e da engenharia. Nos seus trabalhos, Huygens colocou uma questão interessante relacionada com a representação gráfica de uma hipérbole. De notar que a representação gráfica de funções no plano cartesiano, através de um sistema de coordenadas, foi uma inovação introduzida separadamente por dois matemáticos franceses do século XVII, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665). A questão de Huygens resumia-se a descobrir qual o valor da área sob a hipérbole de equação y=1/x, entre x=1 e x=a, em que a abcissa a é um valor superior a 1. O físico recorreu às tabelas de logaritmos decimais, que já se encontravam generalizadas nessa altura, e chegou à conclusão de que o valor dessa área é igual ao quociente entre o logaritmo na base 10 da abcissa a e um certo número, que calculou com 17 casas decimais. Atualmente sabemos que esse número é o logaritmo na base 10 da constante e, sendo que a área em causa, que resulta da divisão dos dois logaritmos na base 10, coincide com o logaritmo natural da abcissa a (ou seja, com o logaritmo na base e da abcissa a; veja-se a Figura B). Mais uma vez, o emblemático número e estava à espreita!

Este número acabou por ser descoberto por Jacob Bernoulli (1654-1705), um matemático suíço que fez contributos fundamentais para o cálculo diferencial e para a física matemática. Bernoulli estudou também a famosa "espiral maravilhosa", que é explorada no livro "Das calçadas aos ananases: investigar o mundo com um olhar matemático", da editora Letras Lavadas, disponível para venda em letraslavadas.pt.

Como é que Bernoulli descobriu o número e? É interessante constatar que esta descoberta decorreu do cálculo de juros! Ao estudar os juros compostos contínuos, Bernoulli considerou o que acontece quando o número de períodos de capitalização num ano aumenta indefinidamente (Figura C). O limite estudado por Bernoulli é precisamente a constante e, que é aproximadamente igual a 2,71828. A descoberta de Bernoulli proporcionou uma fundamentação matemática para o cálculo de juros contínuos e lançou as bases para o estudo desta constante e das suas aplicações.

Como já foi referido no início deste texto, a atribuição da letra e para representar esta constante matemática deve-se a Leonhard Euler, um dos matemáticos mais influentes do século XVIII. Euler começou a usar esta letra em 1731 numa carta dirigida ao matemático alemão Christian Goldbach (1690-1764). A escolha da letra e pode ter sido simplesmente uma decisão prática, já que as primeiras letras do alfabeto eram frequentemente usadas para variáveis ou outras constantes. Além disso, a letra e não estava fortemente associada a nenhum outro conceito matemático na época, tornando-a uma escolha conveniente. Euler não explicou explicitamente por que escolheu a letra e, mas esta notação passou a ser amplamente utilizada devido à enorme influência de Euler e ao impacto dos seus trabalhos na Matemática.

O número e é irracional pois não pode ser representado por uma fração de dois números inteiros. A primeira prova de que e é irracional foi apresentada por Euler, numa publicação de 1748. A prova baseou-se em mostrar que o número e se obtém através de uma fração contínua infinita, que se traduz numa sequência infinita de operações de adição e divisão (o que inviabiliza a sua representação por uma simples fração de números inteiros). Como consequência, a constante e é uma dízima infinita não periódica, o que significa que tem um número infinito de casas decimais e que não há um padrão de repetição que permita descrever a sequência das suas casas decimais. Mas, será que há algarismos que surgem mais vezes na sequência de casas decimais do número de Euler do que outros? Em princípio, a resposta a esta pergunta é negativa, pois conjetura-se que e seja um número normal (ou seja, as sequências de n algarismos têm a mesma probabilidade de ocorrer no desenvolvimento decimal de e, para cada natural n). Contudo, a prova de que o número de Euler é normal ainda se encontra em aberto.

Ao longo da história, vários foram os entusiastas que dedicaram o seu tempo a calcular um número cada vez maior de casas decimais de e. No século XVIII, Euler deu um passo impressionante ao calcular as primeiras 18 casas decimais deste número. Com o avanço do cálculo e da análise infinitesimal nos séculos seguintes, vários matemáticos foram capazes de calcular um número significativo de casas decimais de e com recurso nomeadamente a séries infinitas. A introdução dos computadores no século XX revolucionou o cálculo de casas decimais de e, pois passou a ser possível efetuar em segundos cálculos que antes levavam semanas, meses ou mesmo anos. Em 2020, com um cálculo recorde, passou a conhecer-se mais de 30 biliões de casas decimais de e!

O número e faz parte da célebre identidade de Euler (Figura D) que, em 1988, foi eleita pelos leitores da revista "Mathematical Intelligencer" como a fórmula matemática mais bela da história. Esta equação é admirada pela sua simplicidade e pela forma inesperada como integra conceitos de álgebra, geometria e análise complexa, e como relaciona cinco dos números mais emblemáticos da Matemática.

Existem dois "Dia do e" que são celebrados por alguns entusiastas da Matemática. Note-se que a notação norte-americana para as datas é MM/DD e não DD/MM, como acontece em muitos outros países. Ora, se considerarmos os dois primeiros algarismos da representação decimal de e (2,71828...), obtemos 2/7. Assim sendo, quem segue a primeira notação celebra o número de Euler a 7 de fevereiro e quem segue a segunda notação celebra esta constante a 2 de julho.

Atualmente, o número de Euler marca presença obrigatória na modelação de fenómenos naturais e das ciências biológicas e da saúde, como a desintegração de isótopos radioativos, a projeção do crescimento de uma população e a medição da concentração de um medicamento no sangue. Da economia às engenharias, passando pelas ciências da computação, as suas imensas aplicações destacam a importância deste emblemático e extraordinário número.