Progressões aritméticas e geométricas

Maria do CarmoMartins*

No nosso quotidiano é frequente usarmos a expressão "e assim sucessivamente" quando queremos dar a entender que algo percetível se repete naturalmente. Independentemente de estarmos a lecionar matemática ou português damos a ideia de continuidade de um processo que se prolonga indefinidamente. Esta ideia de repetição de um determinado padrão ou regularidade na Matemática dá azo às sucessões ou sequências de números.

Todos nós (ou quase todos) temos saudades da nossa escola primária, aquele sítio por excelência onde crescemos a aprender a língua portuguesa, a matemática e tantas outras disciplinas. No campo social criámos amizades para toda a vida, fazendo justiça à melodia "nós somos grandes amigos/ amigos da brincadeira/ nós vamos todos crescer/ e ficar amigos para a vida inteira". Esquecida ou recordada toda esta nostalgia que nos invade dessa felicidade infantil, o leitor certamente recordará que o primeiro conjunto de números que aprendeu foi o dos números naturais. Aprendemos a contar pelos dedos das mãos e então depressa associamos um dedo ao 1, dois dedos ao 2 e assim por diante. Nesta sucessão dos números naturais cada termo, isto é, cada número, a partir do segundo, é obtido a partir do termo anterior adicionando uma unidade. No universo das sucessões, este tipo de sequência é conhecido por progressão aritmética (P.A.) e a constante que se adiciona ao termo anterior para obter o novo termo é chamada razão da progressão aritmética, normalmente representada por r. Outros exemplos de P.A. são:

(a) 2, 4, 6, 8, ..., onde o primeiro termo é 2 e r=2;

(b) 15, 15, 15, ..., onde r=0;

(c) -1, -3, -5, -7, ..., onde r=-2.

Perdoe-me o leitor pouco familiarizado com a matemática, pois as sucessões têm uma linguagem própria. Deste modo, o n-ésimo termo ou termo geral de ordem n de uma P.A, denotado por an (lê-se "a índice n"), pode ser obtido por meio da fórmula an= a1+ (n-1)r, em que a1 é o primeiro termo e r é a razão da P.A..

Em termos de classificação, as P.A. podem ser constantes, crescentes ou decrescentes. Uma P.A. constante é aquela em que todos os termos são iguais, sendo consequentemente a razão igual a zero. É, por exemplo, o caso descrito em (b). Uma P.A. diz-se crescente se cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede, sendo portanto a razão positiva. Como exemplo desta P.A. temos a sequência descrita em (a). Finalmente uma P.A. é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede, pelo que a razão é menor do que zero. É a situação em (c).

As progressões aritméticas são fáceis de perceber e geralmente o aluno até acha piada. Há uma série de atividades, que podem ser trabalhadas e exploradas na sala de aula com materiais acessíveis e pouco dispendiosos, como fósforos e o geoplano (um quadrado de madeira na qual são fixados pequenos pregos, cuja distância entre eles é a mesma formando uma malha quadrada).

No caso particular das P.A., podemos calcular, além do seu termo geral, a soma de um número finito dos seus termos. Reza uma história que o prodigioso matemático, Carl Friedrich Gauss (1777-1835)(imagem extraída da Wikipédia), carinhosamente apelidado de "o príncipe da matemática", tinha cerca de 10 anos quando, numa aula de aritmética, descobriu a fórmula que permite calcular a soma de um número finito de termos de uma P.A.. O seu professor J. B. Buttner propôs aos alunos escreverem todos os números de 1 a 100 e calcular a sua soma. Convencido que os seus pupilos não o incomodariam durante algum tempo, foi surpreendido por Gauss que, passados poucos segundos, colocou a sua ardósia com o resultado em cima da secretária do professor, enquanto os colegas continuavam à procura do resultado. No final da aula, os resultados foram examinados e a maior parte deles estava errada. Porém, na ardósia de Gauss encontrava-se o resultado correto, ou seja, 5050. Gauss teve de explicar ao professor Buttner como é que tinha chegado a este resultado, ao qual justificou: "então, 1+100=101, 2+99=101, 3+98=101, e por aí em diante, até finalmente 49+52=101 e 50+51=101. Isto dá um total de 50 pares de números cuja soma dá 101. Portanto, a soma total é 50x101=5050." Este raciocínio que hoje comodamente ensinámos aos nossos alunos foi feito pelo "grande matemático desde a antiguidade" Gauss. Filho de um humilde casal Gerhard Diederich (jardineiro e pedreiro de profissão) e Dorothea Benze (analfabeta), Gauss que foi um matemático, astrónomo e físico alemão, que contribuiu muito em diversas áreas da ciência, nomeadamente em Teoria dos Números, Análise Matemática, Geometria Diferencial, Geofísica, Astronomia e Ótica.

Se queremos calcular a soma total de n termos consecutivos de uma P.A, devemos adicionar o primeiro termo com o último termo e multiplicar esta soma parcial pela metade do número de termos que queremos adicionar dessa P.A, seguindo assim, a ideia de Gauss.

Outro tipo de progressões são as geométricas (P.G.). Aqui, cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante, chamada razão da P.G., geralmente representada pela letra q (letra inicial da palavra quociente). Alguns exemplos de P.G.:

d) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 1024, ..., onde q=2;

e) 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128, 1/256, ... , onde q=1/2;

f) 15, 15, 15, 15, 15, ..., onde q=1;

g) -3, 9, -27, 81, -243, 729, -2187, ..., onde q=-3.

Notemos que uma P.G., fica totalmente definida conhecido o seu primeiro termo, a1, e a sua razão q, onde o termo de ordem n da P.G. é dado por an=a1 q^(n-1). Em alguns contextos, pode ser conveniente considerar que o termo inicial da P.G. tem índice zero (a0). Neste caso, o termo de ordem n é an=a0 q^n. À semelhança das P.A. podemos querer calcular a soma dos n termos de uma dada progressão geométrica. No caso em que q é diferente de 1, a fórmula da soma dos termos de uma P.G, a partir do primeiro, é definida por Sn=a1(1 - q^n)/(1 - q). Segundo uma lenda hindu, conta-se que um rei satisfeito com o criador do jogo de xadrez, perguntou-lhe o que queria como recompensa. O pedido do criador do jogo foi o seguinte: 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda, 4 grãos pela terceira e assim por diante, duplicando sempre, até à última das 64 casas que compõem um tabuleiro de xadrez. Passado algum tempo, o soberano foi informado pelos seus assessores que jamais conseguiria satisfazer aquele pedido aparentemente despretensioso, por ser uma quantidade fabulosa de trigo.

Sem querer entrar em grandes detalhes matemáticos, trata-se de obter a soma dos 64 termos de uma P.G. em que o primeiro termo é 1 e a razão é 2. Deste modo, o número de grãos de trigo que o rei teria de dar ao criador do tabuleiro de xadrez é 18446744073709551615, um número verdadeiramente astronómico que se fosse em euros levaria à excentricidade!

Finalizando este artigo, agora que já sabemos o que é uma P.A e P.G., percebemos a preocupação de Thomas Malthus (1766-1834) sobre a causa da miséria: "enquanto a população humana cresce em progressão geométrica, a produção de alimentos cresce em progressão aritmética".

*Professora do Departamento de Matemática
da Universidade dos Açores
mika@uac.pt