A PROPAGAÇÃO DE RADIAÇÃO ELECTROMAGNÉTICA ATRAVÉS DE UM MEIO TURBULENTO — COERÊNCIA DE ONDA COMO UMA FUNÇÃO DO ESPECTRO DA TURBULÊNCIA

por
FREDERICK P. WHEELER
Universidade dos Açores

RESUMO

Apresenta-se a propagação duma onda electromagnética plana através dum meio claro e turbulento. Deduz-se a função de coerência de segunda ordem em termos dum espectro generalizado de turbulência. Mostra-se que os espectros duma forma relativamente plana afectam a coerência da onda de uma maneira diferente do que os espectros que decrescem rapidamente. Obtêm-se comprimentos característicos para ambas as formas dos espectros.

ABSTRACT

The propagation of a plane, electromagnetic wave through clear, turbulent media is discussed. The second-order coherence function of the wave field is deduced in terms of a generalized

spectrum of turbulence. It is shown that relatively flat spectra effect wave coherence differently than do steeply decreasing spectra. Characteristic wave coherence lenghts are obtained for both types of turbulence.

1. INTRODUÇÃO

Se a radiação electromagnética se propagar através dum meio no qual existem mudanças pequenas e irregulares no valor do índice de refracção, a radiação será espalhada. A radiação espalhada contém informação do meio espalhador. Um conhecimento das relações entre o carácter do meio e a coerência da radiação espalhada permite o uso da radiação espalhada como uma sonda do meio. As mudanças irregulares no meio seriam referidas como turbulência. Na secção 2 apresentam-se alguns elementos essenciais da teoria da propagação de ondas eelctromagnéticas através dum meio turbulento e claro. A descrição do meio como claro implica a ausência de absorção e a ausência de partículas espalhadoras. Mostra-se na secção 3 a maneira de incorporar os efeitos dum espectro generalizado de turbulência na fórmula da função de coerência de segunda ordem do campo de ondas. Apresentam-se formas aproximadas e úteis desta função de coerência e também comprimentos característicos da coerência.

2. A PROPAGAÇÃO DUMA ONDA ELECTROMAGNÉTICA ATRAVÉS DUM MEIO TURBULENTO E CLARO

Se a radiação electromagnética se propagar através dum meio claro e turbulento no qual as variações do índice de refracção se dão a uma escala muito maior do que o comprimento das ondas electromagnéticas, então pode-se descrever a propagação por uma equação escalar. Especificamente cada componente rectangular, ψ (x, y, z; t) dos vectores do campo electromagnético satisfaz a equação

$$\nabla^2\psi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = 0 \tag{1}$$

Aqui n é o índice de refracção e c é a velocidade de luz.

Em aplicações tais como a propagação óptica através do ar turbulento e claro, o índice de refracção desvia-se muito pouco do seu valor médio. Deixe-se n_o representar o valor médio do índice de refracção e δn a diferença pequena entre o valor actual e esse valor médio. Então,

$$n = n_o + \delta n, \text{ onde } \delta n \ll 1.$$

A substituição: $n^2 \simeq n_o^2\ (1 + 2\ \delta n/n_o)$, na equação 1 dá

$$\nabla^2\psi - \frac{n^2_o}{c^2}\ (1 + 2\ \delta n/n_o)\ \frac{\partial^2\ \psi}{\partial\ t^2} = 0 \tag{2}$$

Uma onda que se propaga na direcção crescente do eixo do x pode ser representada pela função de onda

$$\psi\ (x, y, z; t) = u(x, y, z)\ \exp[i(kx - \omega t)]. \tag{3}$$

Aqui, u (x, y, z) é uma amplitude complexa e o número de onda, k, está relacionado com a frequência, ω, através de: $k = n_o\,\omega/c$. Se se considerar existir a turbulência no meio para $x > 0$, uma onda incidente plana, por exemplo, seria representada por

$$u\ (O, y, z) = \text{constante} = u_o\ .$$

Então, a amplitude u seria complexa para $x > 0$, uma vez que o meio turbulento espalha a potência da onda incidente e as ondas espalhadas estão em quadratura com a onda incidente.

A função de onda (3) pode ser substituída na equação 2 e o resultado é a seguinte equação independente do tempo:

$$\nabla^2 u + 2\,i\,k\ \partial u/\partial x + 2\,(\delta n/n_o)\ k^2 u = 0\ . \qquad (4)$$

Em muitas aplicações o comprimento de onda da radiação é muito mais pequeno do que mesmo as irregularidades mais pequenas da turbulência, de tal modo que o espalhamento ocorre principalmente dentro de um ângulo sólido estreito cujo centro está alinhado com a direcção de propagação. Nestes casis a reflecção da onda, que é representada pelo termo $\partial^2 u/\partial x^2$ na equação 4, é negligível (KLYATSKIN e TATARSKII, 1970). Se esse termo for desprezado obtém-se a chamada equação parabólica

$$\nabla_\perp^2 u + 2\,ik\ \partial u/\partial x + 2\,\varepsilon\, k^2 u = 0\ , \qquad (5)$$

onde

$$\nabla_\perp = (\partial/\partial y,\ \partial/\partial z) \quad \text{e} \quad \varepsilon = \delta n/n_o\ .$$

O interesse de (5) vem de que, em princípio, as propriedades estatísticas de u podem ser derivadas da equação uma vez que as propriedades estatísticas de ε sejam especificadas. As propriedades estatísticas de u podem ser definidas em termos das suas funções de coerência. Deixe-se $\underset{\sim}{\rho}_i = (y_i,\ z_i)$ ser um vector espacial e transverso, e deixe-se o símbolo $\langle\ \rangle$ representar a média de ensemble. A forma geral duma função de coerência a uma distância x é dada por

$$\Gamma_{m,n}\,(x, \underset{\sim}{\rho}_1, \underset{\sim}{\rho}_2, \ldots, \underset{\sim}{\rho}_m, \underset{\sim}{\rho}_1{}', \ldots, \underset{\sim}{\rho}_n{}') = \langle u\,(x, \underset{\sim}{\rho}_1)$$
$$\ldots u(x, \underset{\sim}{\rho}_m)\, u^*(x, \underset{\sim}{\rho}_1{}') \ldots u^*(x, \underset{\sim}{\rho}_n{}') \rangle \qquad (6)$$

Uma equação integro-diferencial pode ser obtida para $\Gamma_{m, n}$ pelo uso da equação parabólica (5). Essa, então pode ser simplificada numa equação diferencial por causa da forma especial dos integrais de ε. Essa simplificação, porém, precisa uma aproximação do tipo Markov.

A função aleatória ε (x, y, z) seria correlacionada para uma certa escala $l_{//}$ na direcção da propagação de onda. Se a escala longitudinal de coerência de u (x, y, z) for muito maior do que $l_{//}$, então u, como uma função de x, pode ser considerado com um processo Markov. Essa aproximação é válida em muitas aplicações práticas e aplicar-se-ia aqui também. As correcções surgidas dessa aproximação foram discutidas por TATARSKII (1971).

A aproximação é equivalente a representar a correlação longitudinal efectiva de ε por uma função delta, assim:

$$< \varepsilon(x, \underset{\sim}{\rho_1})\, \varepsilon(x+x', \underset{\sim}{\rho_2}) > \simeq 2\, \delta(x')\, A(x, \underset{\sim}{\rho_1}, \underset{\sim}{\rho_2}), \qquad (7)$$

onde,

$$A(x, \underset{\sim}{\rho_1}, \underset{\sim}{\rho_2}) = \int_{-\infty}^{\infty} < \varepsilon(x, \underset{\sim}{\rho_1})\, \varepsilon(x+x', \underset{\sim}{\rho_2}) > dx'. \qquad (8)$$

Assume-se também que ε é uma função aleatória e estatisticamente homogénea tal que:

$$A(x, \underset{\sim}{\rho_1}, \underset{\sim}{\rho_2}) = A(\underset{\sim}{\rho}), \text{ onde, } \underset{\sim}{\rho} = \underset{\sim}{\rho_1} - \underset{\sim}{\rho_2}$$

Outros autores têm apresentado derivações das equações diferenciais para $\Gamma_{m, n}$ utilizando a aproximação Markov (KLYASTKIN, 1969; LEE e JOKIPII, 1975). No caso do trabalho presente interessa apenas a função de segunda ordem, pela qual n = m = 1. Essa função é

$$\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho_1}, \underset{\sim}{\rho_2}) = < u(x, \underset{\sim}{\rho_1})\, u^*(x, \underset{\sim}{\rho_2}) >.$$

Obedece à equação diferencial

$$2\,i\,k\,\partial\,\Gamma_2/\partial x + (\nabla_1^2 - \nabla_2^2)\,\Gamma_2 + 2\,i\,k^3\,[A(O) - A(\underset{\sim}{\rho})]\,\Gamma_2 = O, \qquad (9)$$

onde, $\nabla_i = (\partial/\partial y_i\,,\ \partial/\partial z_i)$.

No caso duma onda plana que incide no meio, isto é, $\Gamma_2\,(O, \underset{\sim}{\rho}_1, \underset{\sim}{\rho}_2) =$ constante $= |\,u_o\,|^2$, desaparece na equação 9 o segundo termo e obtêm-se facilmente uma solução, que é:

$$\Gamma_2\,(x, \underset{\sim}{\rho}) = |\,u_o\,|^2\ \exp\ \{-k^2\,x\,[A(O) - A(\underset{\sim}{\rho})]\,\}\ . \qquad (10)$$

3. A COERÊNCIA DE ONDA COMO UMA FUNÇÃO DO ESPECTRO DE TURBULÊNCIA

Necessita-se especificar as correlações de ε se se quiser desenvolver (10). Pode-se exprimir essas correlações em termos do espectro de três dimensões espaciais, $\varphi_\varepsilon\,(p, \underset{\sim}{q})$, que se define por

$$\varphi_\varepsilon\,(p, \underset{\sim}{q}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle \varepsilon\,(x, \underset{\sim}{\rho}_1)\,\varepsilon\,(x + x', \underset{\sim}{\rho}_1 + \underset{\sim}{\rho}) \rangle \ \exp\,\{\,-\,i\,(px' + \underset{\sim}{q}\,.\,\underset{\sim}{\rho})\}\ dx'\,d^2\rho \qquad (11)$$

Segue-se de (8) que $\varphi_\varepsilon\,(p, \underset{\sim}{q})$ está relacionado com $A\,(\underset{\sim}{\rho})$ por

$$A\,(\underset{\sim}{\rho}) = (1/4\,\pi^2) \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon\,(O, \underset{\sim}{q})\,\exp\,\{\,i\,\underset{\sim}{q}\,.\,\underset{\sim}{\rho}\,\}\ d^2q \qquad (12)$$

Portanto obtém-se $\Gamma_2\,(x, \underset{\sim}{\rho})$ uma vez que se especificou $\varphi_\varepsilon\,(p, \underset{\sim}{q})$.

Seria conveniente, em primeiro lugar, obter o expoente em (10). Portanto defina-se

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) = k^2 x\,[A(O) - A(\underset{\sim}{\rho})] \quad . \tag{13}$$

Então a fórmula de $\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho})$ segue directamente uma vez que se especificou a fórmula de $E(x, \underset{\sim}{\rho})$.

Uma fórmula geral dum espectro dum meio turbulento pode ser expresso como:

$$\varphi_\varepsilon(\underset{\sim}{K}) = C_\nu^2\,(1 + K^2\, l_o^2)^{-\nu/2} \exp(-K^2\, l_1^2) \, . \tag{14}$$

Esse espectro tem quatro parâmetros, sendo ν, l_o e l_1 parâmetros que descrevem a forma do espectro e C_ν^2 que define a grandeza das flutuações no índice de refracção. O espectro tem uma dependência decrescente, seguindo o índice de espectro ν. O caso $\nu = 11/3$ corresponde ao espectro utilizado para descrever as variações no índice de refracção do ar turbulento para frequências ópticas (veja-se, por exemplo, TATARSKII, 1971). HILL e CLIFFORD (1981) utilizaram um espectro modificado que se pode descrever apropriadamente por uma combinação de componentes da forma dada pela equação 14. Um valor do índice de espectro entre 3 e 4 talvez se aplique ao plasma inter-estrelar às frequências de rádio (WOLSZCZAN e outros, 1981, ARMSTRONG e outros, 1981).

O espectro é plano para $K \ll l_0^{-1}$ e decresce abruptamente para $K > l_1^{-1}$. As escalas l_0 e l_1 têm o significado duma escala exterior e uma escala interior, respectivamente, do meio turbulento, sendo uma hierarquia contínua das escalas intermédias. O caso $\nu = 0$ corresponde a uma forma Gaussiana, isto é uma forma na qual existe uma só escala de predominância, l_1, no meio.

Determine-se a constante, C_ν^2 por integração, utilizando a definição (11). O resultado depende do valor de ν. Portanto, no caso de $\nu < 3$ obtêm-se

$$C_\nu^2 \Big|_{\nu<3} = [4\pi^2/\Gamma((3-\nu)/2)]\; l_o^\nu\; l_1^{3-\nu} \langle \varepsilon^2 \rangle . \qquad (15A)$$

Se $\nu > 3$, por outro lado, convém assumir a condição $l_1 \ll l_o$, o que acontece normalmente nas aplicações práticas. Portanto, nesse caso, obtém-se

$$C_\nu^2 \Big|_{\nu>3} = [8\,\pi^{3/2}\,\Gamma(\nu/2)/\Gamma((\nu-3)/2)]\; l_o^3 \langle \varepsilon^2 \rangle . \qquad (15B)$$

Precisa-se executar a transformação de (12) em duas dimensões e substituí-la na equação 13 para obter a função $E(x, \underset{\sim}{\rho})$. Se fosse para observar coerência para separações muito pequenas em comparação com as irregularidades maiores, isto é $\rho \ll l_o$, seria possível fazer $Kl_o \gg 1$ na equação 14. A função $E(x, \underset{\sim}{\rho})$ é então dada pelo integral

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) = [4\pi]^{-1}\, k^2\, x\, C_\nu^2 \int_o^\infty dK\, K\, (Kl_o)^{-\nu}$$
$$\exp(-K^2\, l_1^2)\,[1 - J_o(K\rho)]. \qquad (16)$$

A função de Bessel em (16) pode-se expandir numa série. Seja $t = K^2\rho^2$ e obtém-se

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) = [4\pi]^{-1}\, 2^{-\nu}\, k^2\, x\, C_\nu^2\, \rho^{\nu-2}\, l_o^{-\nu}$$

$$\sum_{S=1}^{\infty} (-)^{S+1} \int_o^\infty (s!)^{-2}\, (t/4)^{S-\nu/2} \exp[-(l_1/\rho)^2\, t]\, dt. \qquad (17)$$

Os integrais em (17) são formas da definição de Euler da função gama, desde que $\nu < 4$, portanto,

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) = [4\pi]^{-1} k^2 x C_\nu^2 l_o^{-\nu} l_1^{\nu-2}$$

$$\sum_{S=1}^{\infty} (-)^{s+1} (s!)^{-2} \Gamma(s+1-\nu/2) (\rho^2/4l_1^2)^s. \qquad (18)$$

A expansão à direita dessa equação é imediatamente identificada como uma função hipergeométrica confluente. Portanto a fórmula para $E(x, \underset{\sim}{\rho})$ é

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) = [\Gamma(1-\nu/2)/4\pi] k^2 x C_\nu^2 l_o^{-\nu} l_1^{\nu-2}$$

$$\{ 1 - M(1-/\nu 2, 1, -\rho^2/4l_1^2) \} . \qquad (19)$$

Mostra-se por examinação da equação 18 que $E(x, \underset{\sim}{\rho})$ terá uma forma quadrática se a separação, ρ, for muito menor do que a escala interior da turbulência, $\rho \ll 2l_1$. Nesse caso a função de coerência, $\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho})$, aproxima-se por

$$\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho}) \sim |u_o|^2 \exp[-(\rho/2\rho_s)^2] , \qquad (20A)$$

onde a escala característica, ρ_s, é dada por

$$\rho_s = [4\pi/\Gamma(2-\nu/2)]^{1/2} k^{-1} x^{-1/2} C_\nu^{-1} l_o^{\nu/2} l_1^{2-\nu/2} \qquad (20B)$$

No caso duma separação que seja muito maior do que a escala interior, $\rho \gg 2l_1$, a forma assimptótica da função hipergeométrica confluente, M (a, b, z), para valores grandes de z resulta em

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) \simeq [\Gamma(1-\nu/2)/4\pi] k^2 x C_\nu^2 l_o^{-\nu} l_1^{\nu-2}$$

$$\{ 1 - [\Gamma(\nu/2)]^{-1} (\rho/2 l_1)^{\nu-2} + \ldots \} . \qquad (21)$$

Portanto, se o índice ν tiver um valor menor do que 2, o segundo termo entre chavetas será muito menor do que 1. Por outro lado se $2 < \nu < 4$ o segundo termo será muito maior do que 1, mas os restantes termos na expansão serão pequenos.

Então, se $\nu < 2$,

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) \approx [\Gamma(1 - \nu/2)/4\pi]\, k^2\, x\, C_\nu^2\, l_0^{-\nu}\, l_1^{\nu-2}$$
$$\left\{ 1 - [\Gamma(\nu/2)]^{-1} (\rho/2\, l_1)^{\nu-2} \right\} \tag{22A}$$

Por outro lado, se $2 < \nu < 4$,

$$E(x, \underset{\sim}{\rho}) \sim [-\Gamma(1-\nu/2)/4\pi\, \Gamma(\nu/2)]$$
$$k^2\, x\, C_\nu^2\, l_0^{-\nu} (\rho/2)^{\nu-2} . \tag{22B}$$

As relações acima escritas implicam as seguintes formas para a função de coerência : quando $\nu < 2$ e $2l_1 \ll \rho \ll l_0$,

$$\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho}) \sim |u_0|^2 \exp\left\{ -\Gamma(\nu/2)\, (\rho_L/l_1)^{2-\nu} \right\}$$
$$\exp\left\{ (2\rho_L/\rho)^{2-\nu} \right\} ; \tag{23A}$$

quando $2 < \nu < 4$ e $2l_1 \ll \rho \ll l_0$,

$$\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho}) \sim |u_0|^2 \exp\left\{ -(\rho/2\,\rho_L)^{\nu-2} \right\} . \tag{23B}$$

Nessas relações a escala característica é

$$\rho_L = [\, |\Gamma(1-\nu/2)| \,/\, 4\pi\, \Gamma(\nu/2)\,]^{-1/(\nu-2)}$$
$$(k^2\, x\, C_\nu^2)^{-1/(\nu-2)}\, l_0^{\nu/(\nu-2)} . \tag{23C}$$

Note-se que ρ_L é uma função da quantidade $k^2 x C_\nu^2$. Esta quantidade determina a amplitude da função $E(x, \underset{\sim}{\rho})$, desde que l_0 e l_1 tenham valores fixos. Portanto determina a grandeza das flutuações da fase na função de onda. Se o índice de espectro, ν, for menor do que dois, então ρ_L diminuirá à medida que as perturbações da fase aumentam.

Note-se também, da equação 20, que ρ_s é uma função decrescente da quantidade k^2xC_v Portanto o valor de ρ_s diminuiria com perturbações da fase aumentadas, mas este comportamento não seria dependente do valor do índice de espectro.

4. CONCLUSÕES

Apresentaram-se formas analíticas da função de coerência de segunda ordem, $\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho})$, em termos dos parâmetros dum espectro generalizado de turbulência. Como consequência mostrou-se que, em geral, existem duas escalas características para a função de coerência, $\Gamma_2(x, \underset{\sim}{\rho})$. Essas escalas, ρ_s e ρ_L, referem às correlações para pontos cujas separações são, respectivamente, menores ou maiores do que a escala interior de turbulência l_1.

Mostrou-se também dois grupos de espectros. O primeiro constitui os espectros relativamente planos para os quais $\nu < 2$. Para esses espectros a função de coerência caracteriza-se principalmente por correlações com a escala ρ_s, mas correlações fracas desenvolvem-se com uma escala mais comprida, ρ_L, através do desenvolvimento das perturbações fortes da fase.

O segundo grupo, para o qual $2 < \nu < 4$, constitui dos espectros rapidamente decrescentes. Para esse grupo a escala de coerência é ρ_L, enquanto as perturbações da fase forem fracas, mas a escala diminui para a escala ρ_s quando as perturbações da fase forem fortes.

REFERÊNCIAS

ARMSTRONG, J. W., CORDES, J. M. & RICKETT, B. J., 1981 : « Density power spectrum in the local interstellar medium », *Nature,* v. 291, pp. 561-564.

HILL, R. J. & CLIFFORD, S. F., 1981 : « Theory of Saturation of optical scintillation by strong turbulence for arbitrary refractive--index spectra », *J.Opt.Soc.Am.,* v. 71, pp. 675-686.

KLYATSKIN V. I., 1969 : «Applicability of the approximation of a Markov random process in problems relating to the propagation of light in a medium with random inhomogeneities », *Sov.Phys.JETP,* v. 57, pp. 520-523.

KLYATSKIN, V. I. & TATARSKII, V. I., 1970 : « The parabolic equation approximation for propagation of waves in a medium with random inhomogeneities », *Sov.Phys.JETP,* v. 58, pp. 335-339.

LEE, L. C. & JOKIPII, J. R., 1975 : « Strong scintillations in astrophysics. I. The Markov approximation, its validity and application to angular broadening », *Astrophys.J.,* v. 196, pp. 695-707.

TATARSKII, V. I., 1971 : *The Effects of the Turbulent Atmosphere on Wave Propagation,* Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 472 pp.

WOLSZCZAN, A., BARTEL, N. & SIEBER, W., 1981 : « Spectrum of the interstellar plasma turbulence in the direction of the pulsar PSR 0329 + 54 », *Mon.Not.R.astr.Soc.,* v. 196, pp. 473-480.