

Bases dos sistemas de numeração



João Cabral*

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$189_{10} = 10111101_2$$

$$a_n \dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots a_{-n} = \sum_{i=-n}^n a_i b^i$$

Após a folia do carnaval, das diversas celebrações de amizade, entramos agora na época da quaresma, uma época de renovação espiritual. O mundo cristão entra numa época em que realiza um acto de contrição sobre a sua vivência e procura erguer-se das suas cinzas, que o atormentam, para uma celebração de vida e renascimento.

Assim, no mundo matemático, falar de renascimento é o mesmo que voltar às origens, e nada melhor do que falarmos hoje sobre os números, que são uma pedra basilar da Matemática. O conjunto formado pelos simpáticos 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, que todos os dias se cruzam connosco em inúmeras situações. Para facilitar a compreensão do que se segue, vamos designar este conjunto por $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

O conjunto S é formado por símbolos que nos são familiares, tendo, cada um deles, um valor específico em termos de quantidade. Quando estão escritos de forma crescente, representando o "0", zero quantidades, o "1", uma quantidade, e assim sucessivamente, dizemos que o conjunto S forma uma base numérica, e os seus elementos são designados de dígitos ou algarismos. A base numérica é o pilar da contagem, estabelecendo um sistema de numeração, ou sistema numeral, que nos permite através do seu uso associado, de uma forma consistente, fazer corresponder qualquer tipo de quantidade a um determinado número escrito, um numeral. Por exemplo quando desejamos: "Eu quero ganhar 100 euros", sabemos a ordem de grandeza que ocupa o nosso desejo, por termos a noção exata de quanto vale o numeral 100 em termos de quantidade. O sistema de numeração, que usamos, é chamado de sistema posicional pois o numeral vai representar quantidades diferentes quando trocamos alguma posição na sua escrita. Por exemplo, ao usarmos os algarismos 3 e 4, podemos escrever "34", que vale trinta e quatro unidades de algo, enquanto que "43" vale quarenta e três unidades de algo. Acho que ninguém duvida que 43 é diferente de 34 em termos de quantidade. Note-se que, num qualquer sistema de numeração posicional, só os números que fazem parte da base é que são iguais aos numerais que representam, por isso têm o nome especial de algarismos.

A base numérica S é designada de "base dez", pois contém exatamente dez algarismos. Na Matemática, dizer que um conjunto S tem dez elementos é o mesmo que dizer que o cardinal de S é 10, e

representa-se por $\#S=10$. Existem outras bases posicionais, igualmente famosas, tais como a base $B=\{0,1\}$, designada por base binária, ou "base dois", $\#B=2$, que é a base onde assenta todo o cálculo computacional realizado pelos computadores, ou até mesmo a base $H=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$, designada por base hexadecimal ou "base dezasseis", $\#H=16$. Uma das regras, que temos de saber, quando lidamos com diversas bases, é que quanto maior o número de algarismos que fizerem parte da base, menor vai ser os algarismos necessários para escrever um determinado número, que represente uma determinada quantidade. Por exemplo, se quisermos escrever o número 34567, que está escrito em base dez, na base dois, este fica 1000011100001000 e em base hexadecimal, 8708. Ou seja, precisamos de dezasseis algarismos para escrever 34567 na base dois; cinco algarismos para escrever 34567 na base dez, e de quatro algarismos para escrever 34567 na base dezasseis. Destaque-se o facto de que ABCD na base 16 é um número que vale 43981 na base 10! Na base 16, usando apenas os símbolos tradicionais, estes revelaram-se insuficientes para quantificar todas as quantidades presentes na base, logo começou-se a usar a letra A, que tem o peso de 10 quantidades, a letra B, que tem o peso de 11 quantidades, e assim sucessivamente.

Relembremos a estrutura do algoritmo da divisão, ou seja $m=qxn+r$, sendo "m" o dividendo, "q" o quociente, "n" o divisor, e "r" o resto. Por exemplo, para a divisão $23:5$, temos $23=4x5+3$.

Para mudar o número 14, que está escrito em base 10, para base dois, basta dividir o número 14 por dois, guardar o 1º resto, depois dividir o quociente obtido por dois e guardar o 2º resto, e assim sucessivamente, até que um dos quocientes seja inferior a dois. Depois, toma-se o último quociente e os restos obtidos por ordem inversa e temos o número em base dois! Ou seja, $14:2=7$, resta 0, depois faz-se $7:2=3$, resta 1, depois faz-se $3:2=1$, resta 1. Assim, 14, em base dez, vale 1110 em

base dois.

Relembremos as classes dos números inteiros, muito importantes num sistema posicional. Da direita para a esquerda, temos a unidade, como primeira posição, a dezena, como segunda posição, a centena, como terceira posição, o milhar, como quarta posição, e assim sucessivamente, a dezena de milhar; a centena de milhar; o milhão; a dezena de milhão; a centena de milhão; o milhar de milhão, etc.

Os nomes das classes estão associados a uma potência numérica, que tem por base o valor cardinal de cada base, e o expoente é o valor da classe, sendo as unidades representadas por expoente zero. Assim, as unidades têm expoente zero, as unidades expoente 1, as centenas expoente 2, e assim sucessivamente. Por exemplo, na base dez, os milhares são associados à potência 10^3 , enquanto que os milhões são associados à potência 10^6 . Na base dois, os milhares estão associados à potência 2^3 , enquanto que os milhões são associados à potência 2^6 . O numeral 14 assume o valor de uma dezena e quatro unidades, ou catorze unidades, no sistema de base dez, mas em base dois já toma o valor de um milhar, uma centena, uma dezena e zero unidades, ou seja mil cento e dez unidades! Podemos verificar que $14=1x10^1+4x10^0$ e que $14=1x2^3+1x2^2+1x2^1+0x2^0$.

No fundo, quando estamos a ler um número como, por exemplo, o 231, lemos "duzentos e trinta e um", mas não especificamos o valor de cada uma das classes, ou seja, duas centenas, três dezenas e uma unidade, que é o mesmo que representar esse número como $231=2x10^2+3x10^1+1x10^0$. Podemos até expandir o nosso raciocínio e dizer que o número 231 é uma espécie de vetor, uma entidade abstrata no mundo matemático dos espaços vectoriais, com coordenadas (2,3,1) na base S , a base 10. Mas, que numa base dois iria ter as coordenadas (1,1,1,0,0,1,1,1), pois $231=1x2^7+1x2^6+1x2^5+0x2^4+0x2^3+1x2^2+1x2^1+1x2^0$, e teríamos que o ler como "onze milhões, cem milhares, cento e onze unidades, leitura

completamente diferente da efetuada em base dez!

O nosso sistema de numeração tem uma origem bastante enraizada no facto de que temos dez dedos em ambas as mãos, possibilitando o rápido cálculo de quantidades, quando necessário. Mas, imaginemos agora que somos Marcianos, que estávamos no imaginário criado por H. G. Wells, no seu mais famoso romance de ficção científica de 1898, "A Guerra dos Mundos", em que os Marcianos tinham três dedos em cada mão. Seria natural pensar que o sistema de numeração, usado por estes seres, estaria assente numa base seis. O que significa que a base numérica era formada por $M=\{0,1,2,3,4,5\}$. Os símbolos até podiam ser outros, mas o seu valor quantitativo tinha de ser o mesmo que nós damos aos nossos algarismos. Assim, o número 231, na nossa base dez, seria interpretado pelos nossos invasores marcianos como sendo 1023, "mil e vinte e três unidades", pois $231=1x6^3+0x6^2+2x6^1+3x6^0$. O que poderia até ser uma grande quantidade para eles, para nós, terrestres, poderia ser interpretado como insignificante.

As bases não só possibilitam a escrita de números inteiros, mas também permitem escrever números decimais, como para nós é óbvio no sistema de base dez. Na escrita do numeral apenas temos de ter o cuidado de separar a parte do número inteiro, da parte decimal por um ponto, ou por uma vírgula. As classes que se referem à parte decimal, agora lidas da direita para esquerda, são a classe da décima, a classe da centésima, da milésima, etc, e os expoentes das potências são agora números negativos, respetivamente, -1, -2, -3, ..., etc. Assim, por exemplo, um número como o 0.999 que é lido "novecentos e noventa e nove milésimas", é representado em base 10 como sendo $0.999=9x10^{-1}+9x10^{-2}+9x10^{-3}$, mas em base dois seria representado por 0.111111110..., ou seja, $0.999=1x2^{-1}+1x2^{-2}+\dots$, sendo uma dízima infinita, impossibilitando, até a sua correta leitura! Agora, neste artigo, não temos espaço para explicar como se faz a conversão de um valor decimal, em base dez, para base dois, mas o leitor pode procurar na internet, que logo encontrará o algoritmo, que no lugar de se usar a divisão e o resto, usa-se agora a multiplicação.

Uma das aplicações mais importantes, do uso dos sistemas de cálculo em bases diferentes da decimal, é sem sombra de dúvida, na área do controle do erro numérico. Controlar o erro na sociedade moderna é importante, pois um simples um erro de arredondamento pode provocar prejuízos de milhões!

*Professor do Departamento de Matemática da Universidade dos Açores
jcabral@uac.pt