

# Problemas clássicos da Geometria



Helena Sousa Melo\*

Hoje em dia, com a diversidade de software de geometria e programas de construções gráficas, perdeu-se a satisfação de um traçado, utilizando uma régua sem escala e um compasso.

Sabemos que a régua é usada para traçar partes de retas pela união de quaisquer dois dos seus pontos, uma vez que a reta é infinita nos seus dois sentidos, bem como, a construção de semirretas, de segmentos de reta e de muitas outras configurações associadas, e o compasso é utilizado para construir circunferências, onde todos os pontos de uma mesma circunferência têm a mesma distância, o raio, a um mesmo ponto, o seu centro.

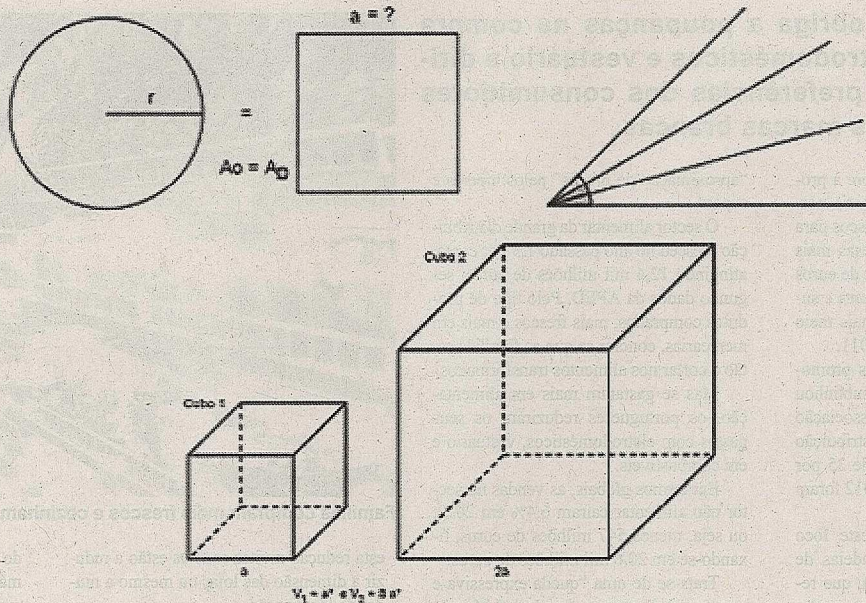
Mas onde está o fascínio e o desafio destes instrumentos?

Voltemos atrás no tempo, por volta da época de Tales de Mileto (cerca de 640 a.C. — 550 a.C.), Pitágoras de Samos (cerca de 580 a.C. — 500 a.C.), Euclides de Alexandria (cerca de 360 a.C. — 295 a.C.), Arquimedes de Siracusa (cerca de 287 a.C. — 212 a.C.), entre outros sábios da Antiga Grécia, em que as construções, envolvendo a régua e o compasso, tiveram um papel desafiador na resolução de determinados problemas de geometria.

Surgem, por estas alturas, três problemas que desempenharam um papel importante na geometria da Antiga Grécia. Algumas das soluções apresentadas para esses problemas deram origem a várias teorias, curvas e construções, mas nenhuma dessas soluções utilizou uma régua ou um compasso.

Estes famosos problemas clássicos da geometria grega são a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Mas porque são tão importantes e o que há de desafiador neles?

A quadratura do círculo foi um problema proposto inicialmente pelo filósofo grego Anaxágoras de Clazómenas (cerca de 499 a.C. — 428 a.C.) e consistia em construir um quadrado com a mesma área de



um círculo, utilizando apenas uma régua e um compasso.

Como sabemos, a área de um círculo é calculada pela fórmula  $A_c = \pi r^2$ , onde  $\pi$  (Pi) é a famosa constante, aproximadamente 3,14, e  $r$  é o raio do círculo. Por sua vez, a área de um quadrado é obtida multiplicando dois de seus lados, que são iguais, ou seja,  $A_q = a^2$ . Assim, para que a área de um quadrado seja igual à área de um círculo, o lado do quadrado terá que ser  $a = r\sqrt{\pi}$ . Ora, é impossível obter o segmento  $a$  por meio da régua e do compasso.

A trissecção do ângulo foi outro problema clássico da geometria grega envolvendo construções com a régua e o compasso e baseia-se em obter, dado um ângulo qualquer, um outro ângulo com um terço da amplitude do ângulo dado.

O problema da trissecção surge naturalmente após o da bissecção do ângulo. Os gregos sabiam trissectar alguns ângulos, entre eles, o ângulo de amplitude igual a  $90^\circ$  e o ângulo de amplitude igual a  $180^\circ$ .

Notemos que se o ângulo dado for de amplitude igual a um múltiplo de  $45^\circ$  o problema tem solução, pois algebricamente a amplitude da trissecção desse ângulo é também igual a um múltiplo de  $15^\circ$ . Por exemplo, se a amplitude do ângulo inicial for igual a  $135^\circ = 3 \times 45^\circ$ , a amplitude do ângulo trissectado será igual a  $45^\circ = 3 \times 15^\circ$ . Facilmente, com a régua e o compasso, conseguimos construir o ângulo resultante da trissecção dos ângulos múltiplos de  $45^\circ$ , mas algumas das soluções ob-

tidas não são por construção direta dessa trissecção.

Se o ângulo for diferente de um múltiplo de  $45^\circ$ , o problema torna-se mesmo impossível de ser obtido pela construção com a régua e o compasso, mesmo que indiretamente. Hoje em dia sabemos que, por exemplo, um ângulo de  $60^\circ$  não pode ser trissectado apenas utilizando esses instrumentos.

A impossibilidade da resolução com a régua e o compasso deste problema foi provada em 1837 pelo matemático francês Pierre Laurent Wantzel (1814 — 1848), apoiando-se nos resultados do matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777 — 1855), publicados em 1801.

A duplicação do cubo foi mais um problema de geometria euclidiana que não possui solução por meio da régua e do compasso. O problema consiste em encontrar um método em que dada a aresta de um cubo obter, através desses instrumentos, a aresta de outro cubo cujo volume seja o dobro do volume do cubo inicial.

As origens deste famoso problema está relacionada com uma lenda ligada a Péricles (cerca de 495 a.C. — 429 a.C.), um dos principais líderes de Atenas, que morreu vítima da epidemia que assolou parte da população daquela cidade-estado. Desesperados por essa enorme perda, os habitantes consultaram o oráculo de Apolo em Delos para saber como podiam combater a doença. Em resposta foi-lhes dito que

deveriam duplicar o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo. Logo os atenienses dobraram as dimensões do altar, ou seja, as arestas passaram a ter o dobro do comprimento inicial, mas isso não afastou a peste, porque o seu volume fora multiplicado por oito e não por dois.

Com essa lenda, este problema também ficou conhecido como problema de Delos ou problema deliano.

Para termos a solução correta a esta questão, isto é, obtermos o dobro do volume do cubo inicial, o comprimento da aresta deste novo cubo deverá ser igual à aresta

inicial multiplicada por  $\sqrt[3]{2}$ , ou seja,  $a\sqrt[3]{2}$ , onde  $a$  é o comprimento da aresta do primeiro cubo. Consequentemente, o seu volume será  $2$  vezes o dobro do volume do cubo original. É evidente que não conseguimos obter, com a régua e o compasso, o segmento  $a\sqrt[3]{2}$  e assim, o problema não tem solução por meio desses instrumentos.

Quase todo o caminho da geometria dos antigos gregos foi influenciado pelas tentativas de resolução desses problemas. Para as soluções obtidas neste período foram utilizadas outras curvas como, por exemplo, a trissectriz ou a quadratriz de Hípias, que servia tanto para trissectar um ângulo, bem como, para quadrar um círculo.

A reta e a circunferência, obtidas através da régua e do compasso, respetivamente, eram entendidas, segundo o filósofo grego Platão de Atenas (cerca de 427 a.C. — 347 a.C.), como curvas perfeitas e como tal deveriam ser suficientes para executar quaisquer construções. Talvez fosse esse um dos motivos da busca, pelos gregos, de uma solução usando apenas esses instrumentos.

É certo que estes três problemas desafiaram os géometras gregos, bem como, com o passar dos anos, as gerações de matemáticos.

\*hmelo@uac.pt  
Centro de Matemática Aplicada e Tecnologias de Informação  
Departamento de Matemática  
Universidade dos Açores