

# Matemática no quotidiano: Como ganhar notas de Euro com a ajuda da Matemática



**RICARDO CUNHA TEIXEIRA**  
Departamento de Matemática da Universidade  
dos Açores, rteixeira@uaac.pt

Ao escrever uma mensagem num computador ou num telemóvel, comete-se por vezes alguns erros de escrita. Contudo, um erro de escrita de uma determinada palavra é, em geral, facilmente detetável por outra pessoa que não tenha escrito esse texto: ou a palavra não faz parte da língua (por exemplo, “Maetmática” em vez de “Matemática”) ou o contexto da frase dar-lhe-á pistas para descobrir qual a palavra correta (por exemplo, “lama” em vez de “alma”). Em ambos os exemplos apresentados, cometeu-se um erro comum: a troca ou transposição de dois caracteres adjacentes. Isto acontece sempre que as teclas correspondentes às letras trocadas são premidas pela ordem errada. Outro erro que também é facilmente detetável surge quando acidentalmente se prime uma tecla errada (por exemplo, “falo” em vez de “faço”).

Mas o que acontece se cometermos um erro de escrita numa sequência de algarismos? Para quem não conheça essa sequência, à primeira vista não existe uma forma de detetar o erro cometido. Ora, se pensarmos na quantidade de sequências de algarismos que utilizamos no dia a dia (número de identificação civil ou número do bilhete de identidade, número de contribuinte, número de identificação bancária, entre outros), apercebemo-nos que é fundamental algum tipo de proteção contra este tipo de erros. Um exemplo curioso que ilustra esta necessidade data de 1990 e foi relatado por um jornal do Michigan, nos Estados Unidos da América. As autoridades locais haviam autorizado a demolição de uma casa localizada numa determinada avenida, com o número 451. Devido a um erro de transposição na escrita do número da casa por parte de um dos elementos da equipa de demolição, constatou-se que a casa entabuada com o número 451 continuava de pé após a intervenção solicitada. Contudo, um pouco mais abaixo, da casa número 415 já só restava a cave!

Foi para evitar situações deste género que, desde meados do século passado, se criaram sistemas de deteção de erros sempre que se lida com números com vários algarismos. A ideia é a de incorporar no final da própria sequência de algarismos um ou mais algarismos suplementares, ditos algarismos de controlo ou dígitos de verificação, que permitem detetar se o número em questão é válido ou se, pelo contrário, foi algures cometido pelo menos um erro de escrita, leitura ou transmissão dos algarismos.

Explora-se neste artigo um exemplo deste tipo de números de identificação com algarismo de controlo: o número de série das notas de Euro.

Com a entrada em circulação da moeda úni-



ca, o Banco Central Europeu teve a preocupação de introduzir vários sistemas de segurança nas notas de Euro como forma de evitar a sua falsificação. Alguns desses sistemas são conhecidos: a marca de água (visível na parte da frente de uma nota, à esquerda, quando se segura a nota contra a luz); o filete de segurança (linha escura, na vertical e ao centro, incorporada no papel da nota); a banda holográfica (nas notas de 5 a 20 Euros, localizada na parte da frente da nota, à direita); um elemento holográfico (nas notas de 50 a 500 Euros, localizado também à direita); a banda iridescente (nas notas de 5 a 20 Euros, localizada no verso da nota, na vertical e próxima do centro); e um elemento que muda de cor (nas notas de 50 a 500 Euros, se inclinarmos a nota, no canto inferior direito do verso, os algarismos relativos ao valor da nota mudam de cor).

No dia 2 de maio de 2013, a nova nota de 5 Euros entrou em circulação e inaugurou uma segunda série de notas com elementos de segurança mais robustos, por forma a reduzir a ocorrência de fraudes. A nova nota de 10 Euros foi lançada a 23 de setembro de 2014. As restantes notas da nova série serão lançadas gradualmente. Já as notas antigas continuarão em circulação por mais algum tempo.

Destacam-se várias novidades nas novas notas de 5 e 10 Euros: a marca de água e a banda holográfica passam a incluir um retrato de Europa, a figura da mitologia grega que dá nome a esta segunda série de notas de Euro; há um novo elemento de segurança na parte da frente da

nota, no canto inferior esquerdo: o valor da nota (5 ou 10) em verde-esmeralda que, dependendo do ângulo de observação, muda de cor para azul-escuro; ainda na parte da frente da nota, nas margens esquerda e direita, figuram pequenas linhas impressas em relevo, destinadas a facilitar a identificação das notas, especialmente por parte de cegos e pessoas com baixa visão.

O número de série, que nas notas da primeira série aparecia duas vezes no verso da nota, passa a constar nas novas notas uma só vez (no canto superior direito). Os seus 6 últimos algarismos aparecem também na vertical, sensivelmente a meio das novas notas. Ao todo, o número de série é composto por 12 caracteres: 1 letra e 11 algarismos nas notas antigas e 2 letras e 10 algarismos nas novas notas.

A primeira letra do número de série (tanto nas notas antigas como nas novas) identifica o país em que a nota foi emitida: D (Estónia); E (Eslováquia); F (Malta); G (Chipre); H (Eslovénia); L (Finlândia); M (Portugal); N (Áustria); P (Holanda); S (Itália); T (Irlanda); U (França); V (Espanha); X (Alemanha); Y (Grécia); Z (Bélgica). Ao Luxemburgo foi atribuída a letra R, apesar de, até ao momento, ainda não ter emitido qualquer nota.

Já a segunda letra do número de série é uma novidade das notas da segunda série, uma vez que antes aparecia um algarismo no seu lugar. Esta letra não tem um significado especial, destina-se apenas a ser usada de forma sequencial, como de resto acontece com os algarismos que

aparecem a seguir às letras. Há apenas uma consequência a destacar: ao substituir um algarismo (0-9) por uma letra (A-Z), aumenta-se para mais do dobro a quantidade de números de série disponíveis para cada país.

Como se pode, então, verificar a validade de um número de série? O método é idêntico para as notas antigas e para as novas. A cada letra é associado um valor numérico: A (2); B (3); C (4); D (5); E (6); F (7); G (8); H (9); I (1); J (2); K (3); L (4); M (5); N (6); O (7); P (8); Q (9); R (1); S (2); T (3); U (4); V (5); W (6); X (7); Y (8); Z (9). Basicamente, a ideia é atribuir o valor 2 ao A; o valor 3 ao B; e assim sucessivamente; ao chegar ao 9, volta-se ao 1 para a atribuição dos valores.

Substituindo a(s) letra(s) pelo seu valor numérico, obtemos um número com 12 algarismos. Para ser válido, esse número deve ser um múltiplo de 9, o que equivale a afirmar, por um conhecido critério de divisibilidade, que a soma de todos os seus algarismos tem que ser um múltiplo de 9 (recorde-se que os múltiplos de 9 se obtêm adicionando sucessivamente o número 9: 9, 18, 27, 36, 45, ...). Dito por outras palavras, tem de se verificar “noves fora nada”.

A título de exemplo, verifique-mos se é válido o número de série: PA0626068043. Substituindo P por 8 e A por 2, obtemos o número 820626068043. Se adicionarmos todos os seus algarismos, temos  $s=45$ ,

que é um múltiplo de 9. Um método alternativo consiste em adicionar sucessivamente os algarismos, retirando “noves” sempre que possível. No final deve obter-se 0 (significa que o número de série é um múltiplo de 9, ou seja, que o resto da sua divisão por 9 é zero). Tem-se  $8+2=10$ ; como se ultrapassou as nove unidades, retira-se 9 e fica-se com 1; em seguida,  $1+0=1$ ;  $1+6=7$ ;  $7+2=9$ ; retiram-se nove unidades, obtendo-se 0; segue-se  $0+6=6$ ;  $6+0=6$ ;  $6+6=12$ ; retiram-se nove unidades, ficando com 3; prossegue-se com  $3+8=11$ ; retiram-se nove unidades e fica-se com 2; por fim,  $2+0=2$ ;  $2+4=6$ ; e  $6+3=9$ ; retiram-se nove unidades, obtendo-se 0, o que prova que o número de série é válido.

O último algarismo (designado por algarismo de controlo) é escolhido de forma a que a soma de teste seja sempre um múltiplo de 9. O leitor pode mesmo tirar proveito desta informação para ganhar algumas notas de Euro. Basta fazer uma aposta com o dono de uma nota, desafiando-o a tapar o último algarismo do número de série. Se conseguir “adivinhar” qual é esse algarismo, a nota será sua! Só tem que recordar os valores que são atribuídos às letras e aplicar um dos dois métodos indicados. Para o exemplo PA062606804?, obtém a soma parcial  $s=42$ . Ora, para 45, que é o próximo múltiplo de 9, faltam 3 unidades! Se optar por retirar sucessivamente os noves, obtém 6. Para poder retirar nove unidades e obter 0 são necessárias mais 3 unidades!