

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

jornal das Primeiras

# MATEMÁTICAS



QUADRADO



CÍRCULO



TRIÂNGULO  
ISÓSCELES



RETÂNGULO



HEXÁGONO



ELIPSE



PENTÁGONO

Número 8  
Julho 2017

**aeme**  
ASSOCIAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA ELEMENTAR



**Ludus**

# Problemas e Desafios

---

## A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO 2.º ANO DE ESCOLARIDADE: UMA SEQUÊNCIA DE APRENDIZAGEM DO MODELO DE BARRAS

Ana Maria Lima, Carlos Pereira dos Santos,  
Conceição Lima Vaz, Ricardo Cunha Teixeira

EBS Tomás de Borba, CEAFEL-Universidade de Lisboa,  
EBI da Praia da Vitória, NICA-Universidade dos Açores

ana.msr.lima@edu.azores.gov.pt, cmfsantos@fc.ul.pt,  
maria.cml.vaz@edu.azores.gov.pt, ricardo.ec.teixeira@uac.pt

**Resumo:** Neste artigo, apresenta-se uma proposta para uma primeira sequência de trabalho com o modelo de barras, no contexto da resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade. Esta sequência de aprendizagem foi implementada pela Equipa de Coordenação do Guia de Apoio à Ação do Docente de Matemática numa turma do 2.º ano de escolaridade pertencente à EBI da Praia da Vitória, Ilha Terceira – Açores. O trabalho desenvolvido ao longo do ano letivo de 2016/17 inseriu-se no âmbito da oficina Matemática Passo a Passo: Estratégias de Superação de Dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico, da Universidade dos Açores, e do projeto Prof DA do programa ProSucesso – Açores pela Educação, da Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores.

**Palavras-chave:** resolução de problemas, modelo de barras, 2.º ano de escolaridade, oficina Matemática Passo a Passo, projeto Prof DA, ProSucesso – Açores pela Educação.

### 1 O ensino da Matemática em Singapura e o modelo de barras

Singapura é uma Cidade-Estado localizada na ponta sul da Península Malaia, no Sudeste Asiático. É um país insular constituído por mais de 50 ilhas, que está separado da Malásia pelo Estreito de Johor, a norte, e das Ilhas Riau (Indonésia) pelo Estreito de Singapura, a sul.

A visão oficial do Ministério da Educação de Singapura é expressa pela máxima

*Thinking School, Learning Nation* (Escola que pensa, Nação que aprende) e pretende traduzir o objetivo de preparar cidadãos empenhados que saibam pensar e que sejam capazes de contribuir para o contínuo crescimento e prosperidade da sociedade.

Se analisarmos os principais estudos internacionais que avaliam o desempenho dos alunos a Matemática, Singapura é claramente um caso de sucesso. É o que acontece, por exemplo, com o TIMSS (*Trends in International Mathematics and Science Study*), que consiste numa avaliação internacional do desempenho dos alunos dos 4.º e 8.º anos de escolaridade a Matemática e Ciências, desenvolvida pela International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), uma associação internacional independente. A avaliação em Matemática é desenhada tendo em consideração duas dimensões: uma diz respeito ao conteúdo e explicita as áreas avaliadas (Números, Formas Geométricas e Medida, Apresentação de Dados); a outra abrange a dimensão cognitiva e especifica os processos mentais mobilizados pelos alunos (Aplicar, Conhecer e Raciocinar).

O TIMSS 2015 foi a 6.ª edição deste estudo de avaliação e Singapura voltou a ocupar o primeiro lugar do ranking internacional, como vem sendo habitual [9, 10]. Desde 1995, os testes TIMSS são aplicados de quatro em quatro anos com a finalidade de gerar informação de qualidade sobre os resultados do desempenho dos alunos e sobre os contextos em que estes aprendem. Para além dos bons resultados de Singapura no TIMSS, destaca-se o elevado nível de aprovações nos exames nacionais, como é o caso do exame final do ensino primário de Singapura (6.º ano de escolaridade). É um facto que não deve ser desvalorizado.

Inspiradas nestes resultados, escolas de vários países do Mundo têm vindo a adotar as metodologias de aprendizagem da Matemática de Singapura, habitualmente designadas por *Singapore Math*, em português *Método de Singapura*. Esta adaptação para outros países tem sido bem-sucedida precisamente porque as grandes vantagens do método de Singapura prendem-se com um número significativo de pormenores de ordem científica e didática, muito bem articulados, e não com questões de ordem cultural. Há uma preocupação constante com os “aspetos microscópicos” do ensino da Matemática, pequenos pormenores que fazem toda a diferença.

O documento *Mathematics Syllabus – Primary One to Five* [14], do Ministério da Educação de Singapura, sistematiza a estrutura curricular de Singapura, no que diz respeito ao ensino da Matemática. O quadro conceptual do currículo de Matemática de Singapura foi publicado em 1990 e tem sido objeto de pequenos afinamentos desde então. As alterações pontuais aos programas resultam de um feedback constante da sua implementação em contexto de sala de aula. A elaboração dos manuais de Singapura também é muito cuidada.

Os documentos normativos de Singapura excedem a usual enumeração de conceitos e conteúdos matemáticos, destacando outros aspetos inerentes ao ensino da Matemática. A Figura 1 ilustra o Modelo Pentagonal do Currículo de Matemática de Singapura, presente nos principais documentos normativos [14]. A resolução de problemas ocupa uma posição central neste modelo e está dependente de cinco componentes relacionadas entre si: os conceitos, os procedimentos,



Figura 1: MODELO PENTAGONAL DO CURRÍCULO DE MATEMÁTICA DE SINGAPURA.

os processos, a metacognição e as atitudes. Este modelo coloca o ensino da Matemática num patamar em que as crianças participam ativamente nas suas aprendizagens, indo muito além da aquisição isolada de conceitos, procedimentos e processos.

As cinco componentes do modelo pentagonal são parte integrante da aprendizagem matemática e da resolução de problemas. O objetivo deste modelo é ajudar o professor a se concentrar nestas componentes, no contexto das suas práticas diárias, de modo a proporcionar um ambiente de aprendizagem mais envolvente e centrado no aluno e a promover uma maior diversidade e criatividade na aprendizagem. O Modelo Pentagonal do Currículo de Matemática de Singapura constitui, por isso, um contributo relevante para a forma como se equaciona a aprendizagem da Matemática na sala de aula.

A *abordagem concreto-pictórico-abstrato* (abordagem CPA), que remonta aos trabalhos do psicólogo americano Jerome Bruner [2, 3], é uma das teorias edificadoras do currículo de Matemática de Singapura. Todos os temas devem ser introduzidos partindo do concreto. Nesse sentido, é importante utilizar objetos do dia a dia ou fotografias desses objetos. O aluno deve perceber que a Matemática pode ser usada para interagir com o meio que o rodeia e para resolver problemas da vida real. É importante recorrer a um leque diversificado de materiais, dos materiais manipuláveis estruturados aos não estruturados. Os exemplos pictóricos constituem representações de materiais concretos que ajudam os alunos a visualizarem conceitos matemáticos e a esquematizarem o seu raciocínio. Já no âmbito do abstrato, o trabalho formal com os símbolos permite mostrar aos alunos que existe uma maneira mais rápida e eficaz de representar um determinado conceito. O significado de cada símbolo deve estar firmemente enraizado em experiências com objetos reais.

No contexto da abordagem CPA, o modelo de barras é um dos exemplos mais marcantes do Método de Singapura. Foi introduzido em 1983 por uma equipa de investigadores liderada por Kho Tek Hong. O objetivo foi o de melhorar a capacidade de resolução de problemas dos alunos ao fornecer uma representação pictórica que ajudasse na visualização das diferentes relações matemáticas e que levasse os alunos a habituarem-se a estabelecer um plano durante o processo de resolução [4, 5, 6, 11, 13, 17].

Com o modelo de barras, os alunos aprendem a resolver problemas, desenhando modelos todo-partes ou de comparação para representar as quantidades descritas no enunciado do problema. Segundo Mei e Li [11], o modelo de barras tem uma natureza pictórica, estabelecendo uma ponte entre o concreto e o abstrato; permite que os alunos visualizem e compreendam o problema antes de avançar para o abstrato, onde os números e os símbolos são usados. O modelo de barras oferece aos alunos uma oportunidade para esquematizar a sua compreensão do problema usando uma representação visual. Esta representação visual dá aos alunos uma ideia mais clara de como se relacionam entre si as quantidades (conhecidas e desconhecidas) do enunciado do problema e aumenta a flexibilidade dos alunos na manipulação dos dados e na escolha das operações a serem utilizadas.

O modelo de barras pode (e deve) ser ensinado desde os primeiros anos de escolaridade, de modo a ser usado de forma consistente, ao longo do percurso escolar do aluno, como uma estratégia de resolução de problemas envolvendo não só as quatro operações aritméticas como também, por exemplo, frações ou percentagens. Constitui, portanto, uma importante ajuda para a construção do pensamento pré-algébrico e algébrico.

O modelo de barras é uma das muitas estratégias que os alunos de Singapura aprendem a aplicar na resolução de problemas de Matemática. Trata-se de uma variante da estratégia “fazer um desenho”, apresentada por Pólya no contexto da segunda fase do modelo de resolução de problemas proposto no seu livro de 1945, *How to solve it* [15]. O modelo de Pólya consiste em quatro fases:

1. Compreender o problema (o aluno lê atentamente o enunciado e procura identificar os dados, as conexões entre eles e o que é pedido);
2. Elaborar um plano de resolução (tendo por base os dados e o objetivo identificados na fase anterior, o aluno determina de que forma vai resolver o problema, selecionando a estratégia ou o conjunto de estratégias que deverá aplicar);
3. Executar o plano (o aluno põe em prática o plano estabelecido; se chegar a um impasse deve regressar à fase de planificação, ou seja, à fase anterior; não se deve ter receio de regressar à segunda fase, pois uma nova abordagem ao problema e uma nova estratégia conduzem muitas vezes ao sucesso);
4. Refletir sobre o que foi feito (a obtenção de uma solução, só por si, não constitui o fim do trabalho; é necessário voltar atrás e verificar se a solução satisfaz as condições apresentadas e o que foi pedido, se está de facto correta ou se foi cometido algum erro; nesta fase podemos ainda

averiguar quais as condições necessárias para podermos aplicar o plano que foi executado na resolução de novos problemas).

Segundo Pólya [15], o problema pode ser modesto, mas se desafiar a curiosidade e estimular a mobilização de conceitos e procedimentos, quem o resolver pelos seus próprios meios experimentará o prazer e o triunfo da descoberta. Tais experiências, desde tenra idade, poderão criar o gosto pelo trabalho mental e deixar, para o resto da vida, uma marca indelével na mente.

O modelo prescrito por Pólya continua a ser uma referência essencial para todos os investigadores na área da resolução de problemas. O modelo de barras é uma de várias estratégias que podem ser selecionadas na segunda fase do modelo de Pólya, sendo particularmente útil em problemas envolvendo uma ou mais operações aritméticas.

Neste artigo, apresenta-se uma proposta para uma primeira sequência de aprendizagem do modelo de barras, que pode ser iniciada no 1.º ano de escolaridade, tendo contudo sido projetada e minuciosamente testada no contexto do 2.º ano de escolaridade.

## 2 A oficina Matemática Passo a Passo e o projeto Prof DA

Decorre desde o início do ano letivo de 2015/16 a oficina de formação “Matemática Passo a Passo: Estratégias de Superação de Dificuldades para o 1.º Ciclo do Ensino Básico”, uma parceria entre a Universidade dos Açores e a Secretaria Regional da Educação e Cultura do Governo dos Açores, no contexto do programa ProSucesso – Açores pela Educação.

Nesta oficina participam os cerca de 50 Prof DA (professores qualificados na deteção, caracterização e resolução de dificuldades de aprendizagem no 1.º Ciclo do Ensino Básico), provenientes de todas as unidades orgânicas da Região que ministram o 1.º Ciclo, cuja ação no ano letivo de 2015/16 incidiu na superação de dificuldades a Matemática no 1.º ano de escolaridade, em estreita cooperação com os professores titulares. Já no ano letivo de 2016/17, a intervenção dos Prof DA incidiu no 2.º ano de escolaridade. Na Figura 2, apresenta-se um mosaico com todos os participantes do projeto Prof DA no ano letivo de 2016/17. Pretende-se que esta caminhada prossiga até ao 4.º ano de escolaridade.

O percurso do 1.º ano ao 4.º ano, desenvolvido ao longo de 4 anos letivos consecutivos, tem algumas vantagens. Por um lado, permite formar o grupo de Prof DA, que assim tem a oportunidade de se concentrar num ano de escolaridade de cada vez e nos temas, estratégias e materiais que podem potenciar aprendizagens significativas para esse ano de escolaridade. Por outro lado, reunindo todo o trabalho desenvolvido ao longo de um ano letivo, é possível constituir um guia de apoio à ação docente para o ano de escolaridade de incidência nesse ano letivo.





Figura 2: PARTICIPANTES DO PROJETO PROF DA NO ANO LETIVO DE 2016/17.

A ação do Prof DA tem por base estudos provenientes das neurociências cognitivas, que explicam como o nosso cérebro aprende Matemática, e alguns casos de sucesso do ensino da Matemática no Mundo, como é o exemplo da Finlândia, com um sistema de apoio de características similares, e de Singapura, que nos apresenta, como já foi referido na secção anterior, centenas de pequenos pormenores de ordem científica e didática amplamente testados em vários países.

Um objetivo fundamental do projeto Prof DA, no contexto do ensino da Matemática, centra-se na promoção de aprendizagens mais significativas, estimulando o cálculo mental, o raciocínio matemático e a resolução de problemas. Não se pode gostar daquilo que não se compreende. Daí que as estratégias promovidas visem uma compreensão profunda da matemática elementar.

No contexto do projeto Prof DA, foi implementada uma sequência de aprendizagem do modelo de barras numa turma do 2.º ano de escolaridade da EBI da Praia da Vitória, Ilha Terceira – Açores. Ao longo do ano letivo de 2016/17, esta sequência foi objeto de constante reflexão, sendo afinada de acordo com o feedback da sua implementação em ambiente de sala de aula. Para além dos autores deste artigo, esta caminhada contou com a reflexão do grupo de Prof DA da Região Autónoma dos Açores, em particular, da equipa de Prof DA da EBI da Praia da Vitória, Carla Laranjeira, Graziela Ribeiro e José Mendonça, que agradecemos pela sua disponibilidade e dedicação.

Apresentamos, de seguida, uma proposta para uma primeira sequência de aprendizagem do modelo de barras no contexto da resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade.

### 3 Os preparativos

Sugere-se que se combine com os alunos um *momento semanal de resolução de problemas* (num determinado dia da semana ou mesmo repartido por vários dias, com uma duração mais curta).

Os alunos podem ser desafiados a escolher um nome para este momento. Depois de seleccionadas algumas propostas, o nome favorito pode, então, ser votado pela turma. Os resultados da votação podem ser analisados recorrendo a esquemas de contagem (e.g., *tally charts*) e a pictogramas ou gráficos de pontos, aproveitando assim a oportunidade para desenvolver algum trabalho no âmbito da Organização e Tratamento de Dados.

Sugere-se igualmente a criação de um *caderno individual de resolução de problemas* por aluno. Este caderno pode ser levado semanalmente para casa, permitindo que os alunos partilhem com os pais e encarregados de educação as aprendizagens que estão a desenvolver no âmbito da resolução de problemas.

Na Figura 3, podemos observar dois alunos a efetuar o registo no seu caderno individual de resolução de problemas.



Figura 3: DOIS ALUNOS A EFETUAR O REGISTO NO SEU CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.



#### 4 Primeira etapa: problemas de adição (nos sentidos de acrescentar e de juntar)

Começa-se por convidar a turma a observar o esquema da Figura 4, exposto no quadro da sala de aula.

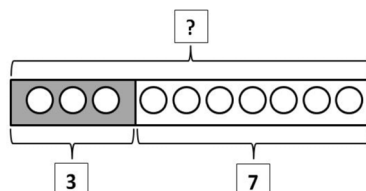


Figura 4: MODELO TODO-PARTES DE INTRODUÇÃO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE ADIÇÃO.

No decorrer da exploração pretende-se que a criança reconheça cada uma das partes e identifique o todo como o resultado da adição das partes, representado pelo ponto de interrogação. Em seguida, convida-se a criança a reorganizar a informação num esquema todo-partes e a escrever a expressão matemática respeitando a ordem da representação dos números no modelo de barras (veja-se a Figura 5). Por fim, a criança deve dar a resposta.



Figura 5: ESQUEMA TODO-PARTES E EXPRESSÃO MATEMÁTICA.

De notar que os autores entendem ser benéfico um trabalho prévio com os esquemas todo-partes, nomeadamente no decorrer do 1.º ano de escolaridade ou mesmo no final da educação pré-escolar (veja-se, por exemplo, [16] para alguma informação detalhada sobre os esquemas todo-partes).

Em seguida, apresentam-se os esquemas ilustrados na Figura 6.

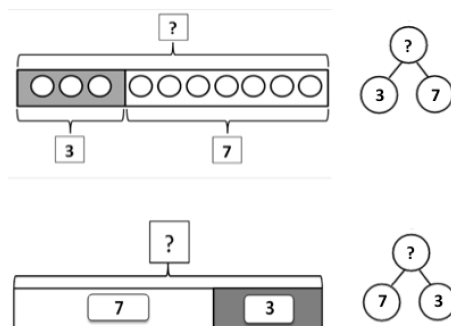


Figura 6: COMPARAÇÃO ENTRE DOIS ESQUEMAS.

Pretende-se que a criança compreenda que:

- os elementos pictóricos podem ser substituídos por numerais que representem essas quantidades;
- as partes podem ser trocadas no esquema sem alterar os dados do problema;
- a barra mais comprida representa sempre o número maior e a mais curta o número menor;
- a chaveta é desenhada de forma a unir as partes e a indicar o todo.

Apresenta-se um novo esquema (veja-se a Figura 7).

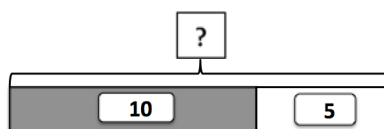


Figura 7: MODELO TODO-PARTES PARA CRIAR PROBLEMAS DE ADIÇÃO.

Deve-se dialogar com os alunos sobre o que poderá representar cada uma das partes da barra, encorajando-os a apresentar exemplos concretos. Procura-se salientar que as partes devem representar objetos com uma mesma natureza, apesar dessa natureza comum nem sempre ser evidente. Exemplos apresentados pelos alunos quando a natureza comum é evidente:

- 10 carrinhos vermelhos e 5 carrinhos azuis;
- 10 motas grandes e 5 motas pequenas;
- 10 vacas pretas e 5 vacas malhadas.

Exemplos apresentados pelos alunos quando a natureza comum não é evidente:

- 10 motas e 5 bicicletas (meios de transporte);
- 10 bananas e 5 laranjas (frutos);
- 10 lápis e 5 borrachas (material escolar).

Em seguida, incentiva-se o grupo de alunos a criar, oralmente, histórias que possam ser representadas pelo esquema exposto. Seguem-se algumas histórias criadas pelos alunos:

- Num jardim havia 10 aranhas. Depois vieram mais 5 aranhas. Quantas aranhas ficaram ao todo?
- Na savana estavam 10 zebras. Chegaram 5 leões. Quantos animais ficaram ao todo?
- O Carlos tinha 10 carrinhos. Recebeu no seu aniversário 5 motas. Com quantos brinquedos ficou o Carlos ao todo?

A caminhada realizada, passo a passo, permitiu que os alunos se fossem apropriando do modelo de barras de forma segura e progressiva. A criação de histórias orais e posteriormente escritas em forma de situação problemática, bem como os momentos de apresentação em grande grupo, contribuíram para que todos se envolvessem ativamente.

É importante que, no decorrer da atividade letiva, os alunos tenham oportunidade de discutir com os colegas e com o professor, de criar, escrever, argumentar, criticar e interagir de forma a haver uma partilha de ideias, estratégias e raciocínios matemáticos.

Apresenta-se o próximo momento de exploração do modelo de barras. Escolhe-se uma das histórias criadas pelos alunos, transformando essa história numa situação problemática. Com a colaboração dos alunos, seguem-se os seguintes passos em grande grupo:

1. Ler com atenção o enunciado do problema;
2. Sublinhar os dados;
3. Sublinhar o que se pretende calcular;
4. Compor o esquema, com o auxílio de barras manipuláveis (veja-se a Figura 8);

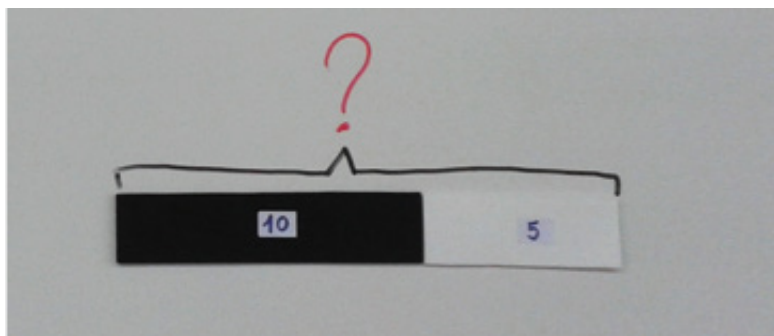


Figura 8: MODELO TODO-PARTES COM BARRAS MANIPULÁVEIS.

5. Colocar os dados e o ponto de interrogação no esquema;
6. Escrever a expressão matemática;
7. Escolher um auxiliar de cálculo e desenhá-lo ao lado da expressão;
8. Completar a expressão;
9. Escrever a resposta;
10. Verificar se a resposta é adequada.

Na Figura 9, apresenta-se o registo que, depois de explorado, permaneceu no quadro para orientar os alunos na resolução dos problemas que se seguiram.

De notar que este problema envolve uma adição no sentido de acrescentar (tipologia A), pois estamos a acrescentar 5 brinquedos ao conjunto dos 10 que já existiam.

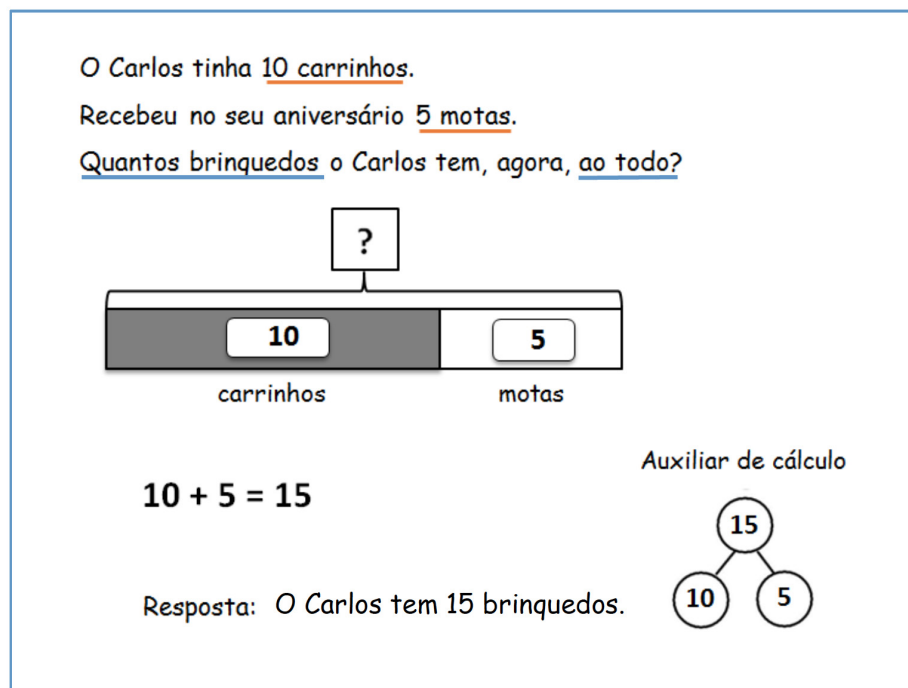


Figura 9: EXEMPLO DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO NO SENTIDO DE ACRESCENTAR (TIPOLOGIA A).

Entrega-se a cada par de alunos uma folha pautada e barras fotocopiadas. Propõe-se aos alunos que sigam os seguintes passos:

- lê e copia o problema;
- sublinha os dados;
- sublinha o que se pretende calcular;
- observa e escolhe as barras adequadas (repara que elas têm comprimentos e cores diferentes);
- resolve o problema, seguindo todos os passos expostos no exemplo do quadro.

Depois de explicados todos os passos, apresenta-se o seguinte problema, que envolve uma adição no sentido de acrescentar: “Havia 10 cabrinhas num cerrado. Chegaram outras 5 cabrinhas ao cerrado. Quantas cabrinhas ficaram, ao todo, no cerrado?”. Na Figura 10, apresenta-se um dos registos efetuados pelos alunos.

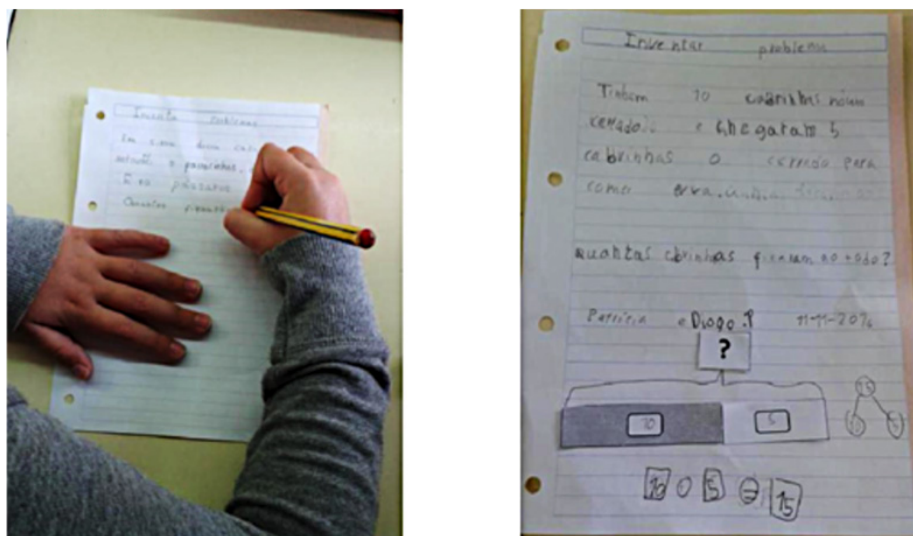


Figura 10: EXEMPLO DE UM REGISTO EFETUADO PELOS ALUNOS.

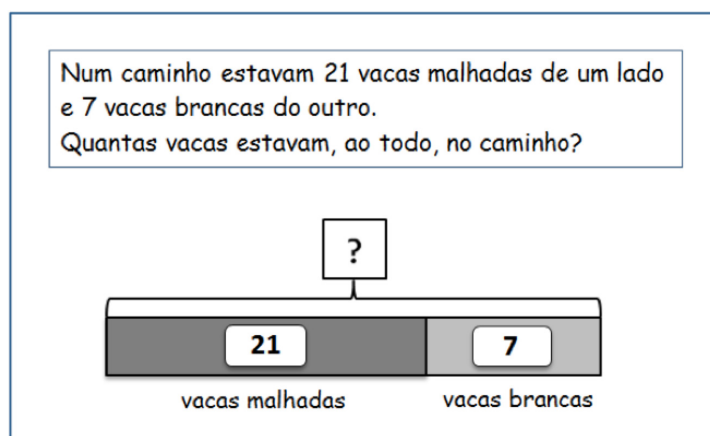


Figura 11: PROBLEMA ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO NO SENTIDO DE JUNTAR (TIPOLOGIA B).

De seguida, explora-se um problema envolvendo uma adição no sentido de juntar (tipologia B), por existirem dois conjuntos de vacas (veja-se a Figura 11).

Pretende-se, com isso, chamar a atenção para os dois sentidos da adição. Além disso, procura-se estabelecer algumas normas adicionais de utilização das barras:

- Nos problemas de acrescentar a barra escura representa a quantidade existente e a barra branca a que surge posteriormente;
- Nos problemas de juntar utilizam-se duas barras de cor (cinza claro e cinza escuro, por exemplo); ambas as quantidades estão presentes desde o início.

No momento que se seguiu, as crianças criaram, oralmente, situações problemá-

ticas para cada um dos sentidos da adição, inspirando-se nos esquemas expostos no quadro (ver Figuras 9 e 11). Posteriormente, escreveram, a pares, uma situação problemática, resolveram-na seguindo o percurso já conhecido e apresentaram a sua resolução à turma. No decorrer da atividade, procurou-se incentivar o diálogo e a interação. Pediu-se às crianças para identificarem o tipo de problema criado (adição no sentido de acrescentar ou de juntar) e para relacionarem esse problema com os esquemas expostos no quadro.

A maioria das atividades foi realizada em trabalho a pares, uma vez que os alunos com mais capacidade são fonte de motivação para os colegas: “Se ele consegue, eu também vou conseguir!”. Por outro lado, o professor fica atento e disponível para ajudar aqueles que em determinado momento precisam de um apoio mais sistemático, sem a ansiedade de ver alunos parados à espera de auxílio.

No contexto da resolução de problemas, procurou-se desenvolver a comunicação matemática através da participação ativa dos alunos, valorizando-se as histórias criadas oralmente e posteriormente escritas. Pretendeu-se que os alunos criassem imagens mentais consistentes. Para tal, recorreu-se à escrita de vários problemas, no quadro, e respetiva resolução (desenhando o esquema de barras na presença dos alunos) de acordo com a sequência já anteriormente explorada. Entendemos que esta abordagem passo a passo foi particularmente benéfica. De facto, na reta final do percurso de exploração da adição, os alunos foram desafiados a, individualmente, resolverem problemas desenhando as suas próprias barras. O resultado foi surpreendentemente positivo (veja-se a Figura 17).

A certa altura, instalou-se na sala de aula a “febre da resolução de problemas”, quer no âmbito da criação de problemas em pequeno grupo como da sua resolução. Para o tempo de estudo autónomo, foram disponibilizados num ficheiro diversos problemas, criados pelos alunos ou pela professora. Na Figura 12, apresentam-se as grelhas de registo correspondentes.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Celso												
Diogo Correia												
Diogo Pinheiro												
Érica												
Francisco												
Frederico												
Gustavo												
João												
Leonor												
Luís												
Madalena												
Patrícia												
Pedro												
Rafael												

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Celso												
Diogo Correia												
Diogo Pinheiro												
Érica												
Francisco												
Frederico												
Gustavo												
João												
Leonor												
Luís												
Madalena												
Patrícia												
Pedro												
Rafael												

Figura 12: GRELHAS DE REGISTO – CRIAR E RESOLVER PROBLEMAS.

No momento de apresentação dos registos escritos, um aluno mostrou um caderno com problemas que tinha feito durante o fim de semana. A ideia generalizou-se e conduziu à criação de um caderno de resolução de problemas para cada aluno (veja-se a Figura 3).



Nesta parte do percurso, procurou-se que os alunos se apropriassem das quatro fases do modelo de Pólya para a resolução de problemas, detalhadas na primeira secção deste artigo. Construiu-se o documento da Figura 13, dirigido ao professor, com o objetivo de orientar os alunos nas quatro fases do modelo de Pólya.

<b>1.ª fase - orientar os alunos para:</b> Lerem com atenção o problema. Sublinharem a informação importante (os dados e o objetivo do problema).	
<b>2.ª fase - orientar os alunos para:</b> Elaborarem um <u>esquema</u> que represente a situação, usando <u>barras</u> : <ul style="list-style-type: none"> <li>• desenhar a barra que representa o todo e dividi-la nas partes correspondentes, fazendo uma estimativa se houver uma parte desconhecida;</li> <li>• desenhar a chaveta que indica o todo;</li> <li>• registar os dados;</li> <li>• sombrear as barras de acordo com o problema;</li> <li>• ler, novamente, a pergunta e colocar o ponto de interrogação.</li> </ul>	
<b>3.ª fase - orientar os alunos para:</b> Escreverem uma <u>expressão matemática</u> que permita resolver o problema. Completarem a expressão matemática.	Recorrerem a um <u>auxiliar de cálculo</u> para completar a expressão matemática.
<b>4.ª fase - orientar os alunos para:</b> Verificarem se a resolução está correta e se o resultado obtido é adequado ao problema. Responderem ao problema.	

Figura 13: AS QUATRO FASES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVAM A UTILIZAÇÃO DE UM MODELO DE BARRAS (VERSÃO TODO-PARTES).

Sugere-se a resolução de problemas criados pelos alunos e apresentados em tiras desordenadas. Entrega-se, a cada par de alunos, papel pautado, barras de três cores distintas (cinza escuro, cinza claro e branco) e dois comprimentos diferentes, bem como um problema apresentado em tiras soltas. Reforça-se o percurso delineado para a resolução de problemas (Figura 13), lendo em grande grupo em que consiste cada fase. Em seguida, propõe-se a cada par de alunos que:

- leia com atenção a informação fornecida pelas tiras de papel, ordenando as tiras e colando-as no papel pautado;
- sublinhe a informação importante;
- cole as barras, de acordo com a informação recolhida, e siga o restante percurso delineado.

Na Figura 14, apresenta-se um exemplo de um registo feito por um par de alunos.

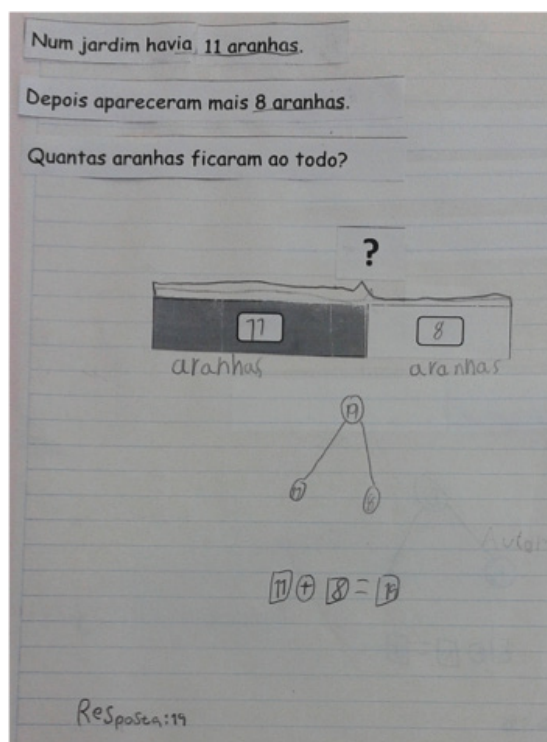


Figura 14: REGISTO DA RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA RESPEITANDO AS QUATRO FASES DO MODELO DE PÓLYA.

Numa fase posterior, sugere-se a repetição desta atividade, com uma pequena alteração: no conjunto de tiras de cada problema, a tira relativa à pergunta está desadequada em relação aos dados do problema (veja-se um exemplo na Figura 15). Cada par de alunos deve elaborar uma pergunta adequada e resolver o problema seguindo os passos aprendidos anteriormente.

Quantos pássaros estão no jardim zoológico?
Num jardim zoológico estão 12 tartarugas e 35 macacos.

Figura 15: EXEMPLO DE UM PROBLEMA COM UMA PERGUNTA DESADEQUADA.

Antes de concluir o percurso de exploração de problemas de adição, aconselha-se a resolução de problemas que envolvam expressões com três parcelas.

Deve-se começar por apresentar no quadro um exemplo de um problema desse tipo, fazer a exploração em grande grupo e resolver coletivamente seguindo os passos aprendidos anteriormente (veja-se a Figura 16).

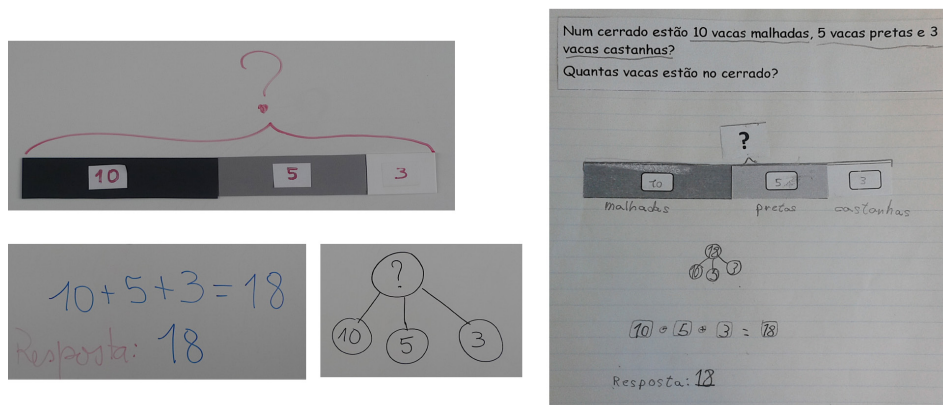


Figura 16: RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA QUE ENVOLVE UMA EXPRESSÃO COM TRÊS PARCELAS.

Nesta fase final da exploração dos problemas de adição, deve-se estimular as crianças a desenharem as suas próprias barras. Veja-se um exemplo na Figura 17.

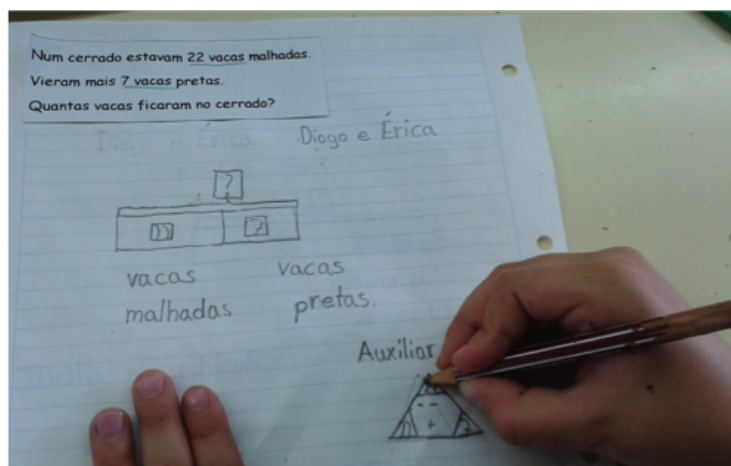


Figura 17: AS CRIANÇAS COMEÇAM A DESENHAR AS SUAS BARRAS.

Distribui-se a cada aluno uma situação problemática e propõe-se a sua resolução, individualmente. Esta exploração dos problemas de adição (com tipologias A e B) pode ter continuidade no tempo de estudo autónomo ou em rotinas semanais.

## 5 Segunda etapa: problemas de subtração (nos sentidos de retirar e de completar)

Deu-se início à caminhada delineada para a resolução de problemas envolvendo a operação subtração, com recurso ao modelo de barras. Esta caminhada surgiu depois da implementação do percurso de problemas de adição e quando os alunos já se tinham apropriado das quatro fases da resolução de problemas adaptadas do modelo de Pólya (veja-se a Figura 13).

Desde logo foi feito um trabalho de reflexão relativamente à segunda fase do modelo de Pólya, no que se refere ao desenho das barras, porque enquanto que nos problemas de adição se parte das partes para o todo, nos de subtração parte-se do todo e de uma das partes para a outra parte, pelo que os alunos teriam que começar por desenhar uma barra grande, representativa do todo, de que se conhece apenas uma das partes.

Esta mudança levou a outra preocupação que teve a ver com a cor da barra que representa o todo. Em termos de compreensão seria mais fácil partir de uma barra cinzenta representativa de uma quantidade que existe e está presente inicialmente. No entanto, isso iria dificultar a construção do esquema porque os alunos teriam que escurecer a barra e pouco depois apagar uma das partes (nas situações de retirar e de completar) ou clarear uma delas (nas situações de separar), o que seria pouco prático.

Para tal, criou-se uma barra manipulável, cinzenta de um lado e branca do outro (Figura 18). Esta opção veio facilitar a compreensão dos esquemas apresentados posteriormente e a sua construção de forma autónoma.

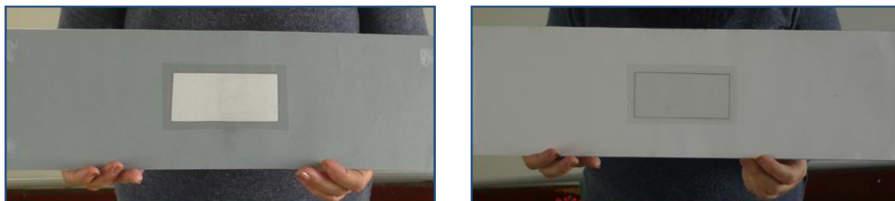


Figura 18: BARRA MANIPULÁVEL, CINZENTA DE UM LADO E BRANCA DO OUTRO.

O facto desta sequência estar pensada para ser implementada num 2.º ano de escolaridade, com crianças bastante jovens, envolvendo um processo com algum grau de dificuldade, o trajeto delineado deve ser constituído por pequenos passos, recorrendo-se a barras manipuláveis sempre que necessário, na certeza que estamos a lançar sementes que darão bons frutos nos anos seguintes.

Em primeiro lugar, deve-se apostar na compreensão do esquema de barras utilizado para a subtração. Em trabalho coletivo, a turma deve ler, interpretar e sublinhar a informação importante contida no enunciado do problema modelo registado no quadro, de acordo com a primeira fase da resolução de problemas proposta por Pólya (Figura 19).

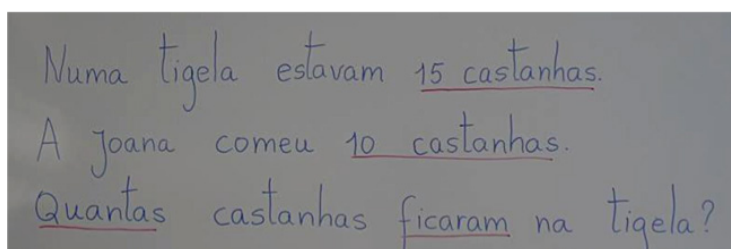


Figura 19: LER, INTERPRETAR E SUBLINHAR A INFORMAÇÃO IMPORTANTE CONTIDA NO ENUNCIADO DO PROBLEMA.

Nesta situação, conhece-se o todo e a parte que foi retirada e pretende-se descobrir a parte que ficou; além disso, o valor retirado é maior do que metade do todo (tipologia A1).

Em seguida, deve-se dar continuidade às restantes fases do modelo de Pólya:

- apresenta-se uma barra grande manipulável, de cor cinza, e pergunta-se o que deverá representar;
- fixa-se a barra no quadro e identificam-se as partes que constituem o todo.

Pretende-se que os alunos se apercebam que a barra cinzenta não é adequada para a situação apresentada, pois não permite representar a parte retirada (esta noção foi explorada, anteriormente, aquando dos problemas de adição no sentido de acrescentar). Prossegue-se a exploração:

- mostra-se a parte branca e salienta-se que, apesar da cor diferente, esta representa, de igual modo, o todo;
- fixa-se a barra branca no quadro e sobrepõe-se a barra cinzenta de acordo com os dados do enunciado do problema;
- registam-se os dados; lê-se novamente a pergunta e coloca-se o ponto de interrogação (Figura 20).

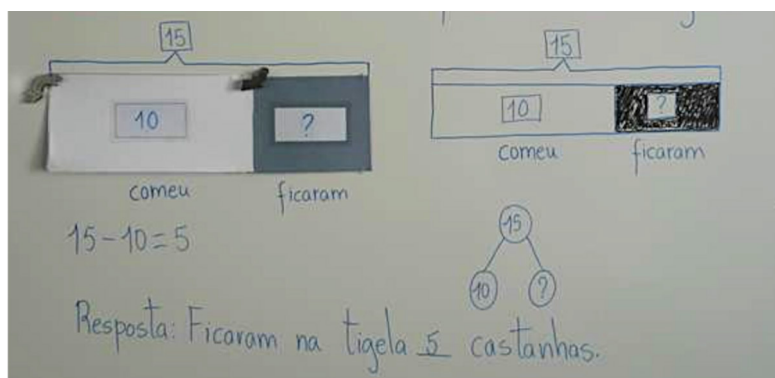


Figura 20: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA A1).

Ao lado do material manipulável, o professor deve desenhar o esquema, sombreando parte da barra que representa o todo. Em seguida, deve fazer todo o percurso de resolução do problema, na presença dos alunos, estimulando o diálogo e a partilha de ideias. Por último, projeta-se o problema modelo e compara-se com o resolvido no quadro. Cola-se a resolução no caderno individual de resolução de problemas. Esta poderá servir de orientação para a resolução de problemas semelhantes (Figura 21).

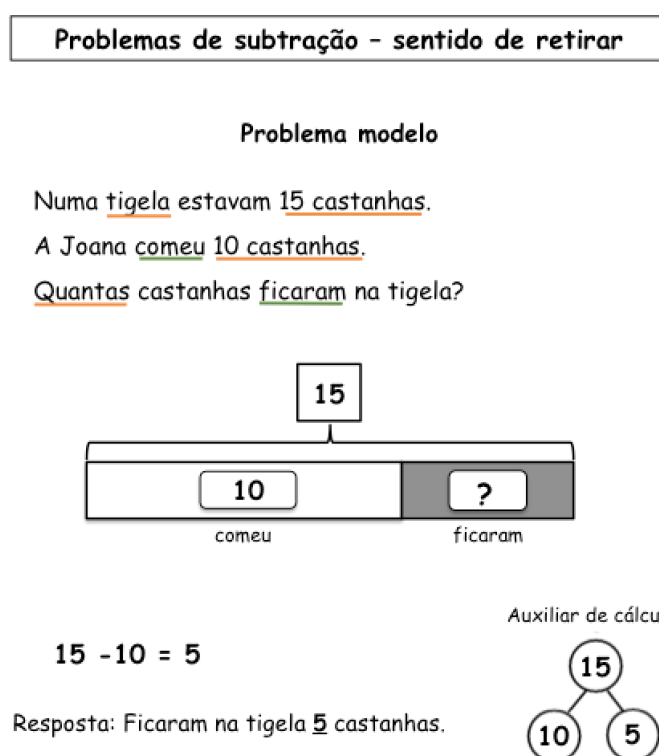


Figura 21: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA A1) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

O próximo passo a dar consiste em apresentar aos alunos uma situação problemática, em tudo semelhante ao problema modelo, com o esquema incompleto e propor que a resolvam a pares (veja-se um exemplo na Figura 22).

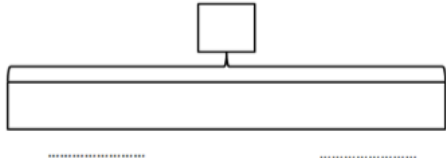
Na resolução deste problema verificou-se que os alunos tiveram alguma dificuldade em dividir a barra representativa do todo, uma vez que só dispunham de informação referente a uma das partes, pelo que não conseguiam perceber qual teria maior ou menor comprimento. Nos problemas de adição, esta situação não surgiu porque eram apresentadas as quantidades relativas a cada uma das partes, pelo que os alunos facilmente desenhavam a parte da barra com maior comprimento e a com menor, de acordo com os dados apresentados. Deste modo, foi necessário criar algumas situações que permitissem que os alunos fizessem



Num cerrado estavam 27 vacas. 2

Saíram 20 vacas.

Quantas vacas ficaram no cerrado?



Auxiliar de cálculo

$\bigcirc$   =

Resposta: Ficaram no cerrado..... vacas.

Figura 22: SEGUNDO PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA A1), COM O ESQUEMA INCOMPLETO.

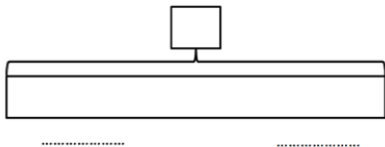
uma estimativa inicial do resultado e assim pudessem dividir a barra de acordo com os dados do problema, surgindo problemas em que a quantidade a retirar é menor do que metade do todo – problemas com tipologia A2: deve-se apresentar aos alunos uma situação problemática com o esquema incompleto e propor que a resolvam, a pares, seguindo as fases de resolução de problemas propostas por Pólya (Figura 23).

**Resolve o problema**


Num parque infantil estavam 29 pessoas. 3

Saíram 7 pessoas.

Quantas pessoas ficaram no parque infantil?



Estimativa



Auxiliar de cálculo

$\bigcirc$   =

Resposta: Ficaram no parque infantil ..... pessoas.

Figura 23: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA A2), COM O ESQUEMA INCOMPLETO.

Em seguida, recomenda-se a resolução, de forma autónoma, de problemas de subtrair no sentido de retirar (tipologias A1 e A2), desenhando o esquema sem que este esteja pré-construído (Figura 24).

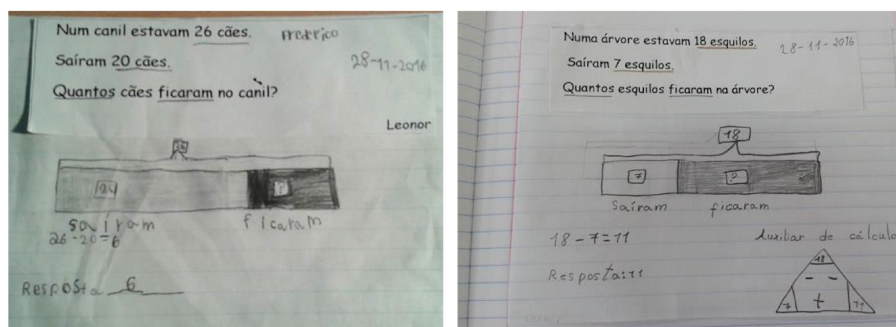


Figura 24: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SUBTRAIR NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIAS A1 E A2), DESENHANDO O ESQUEMA DE RAIZ.

Como se pode verificar no exemplo da Figura 23, a partir deste momento passou-se a incluir um espaço para a apresentação de uma estimativa do resultado, para que a criança fique com uma ideia do valor aproximado de cada parte, facilitando assim a divisão da barra representativa do todo em duas partes relativamente proporcionais aos dados do enunciado.

É importante que os alunos se apropriem das variantes do esquema utilizado para as situações de retirar, de modo a estabelecerem uma relação entre os dados do problema e o comprimento das respetivas partes da barra que representa o todo. Para tal, devem recorrer à estimativa. No entanto, esta pode não ser uma tarefa fácil. No trabalho que foi desenvolvido na turma da EBI da Praia da Vitória, alguns alunos, apesar de terem presente o valor estimado, continuavam a dividir a barra sem valorizarem essa informação. Quando terminavam era-lhes dito que alguma coisa estava errada (ou a solução ou o comprimento das partes em que o todo estava dividido). A tendência era achar que o erro estava na expressão matemática, mas como os dados envolviam quantidades pequenas diziam: “Acho que a professora não está a ver bem!”. Depois de verificarem o esquema, os alunos acabavam por chegar à conclusão que este não se adequava à solução e aumentavam ou diminuíam o comprimento de uma das partes.

Esta preocupação é pertinente porque na resolução de um determinado problema que envolva quantidades maiores alguns alunos poderão ser induzidos em erro, na fase de verificação, caso a divisão do todo não respeite aproximadamente a proporcionalidade dos valores relativos às partes.

Com o passar do tempo e com a resolução de vários problemas, a situação melhorou progressivamente e, a certa altura, quase todos os alunos já conseguiam dividir, desde o início, a barra de acordo com o problema apresentado.

Depois de consolidada a resolução de problemas de subtrair no sentido de retirar, com as tipologias A1 e A2 (em que se conhece o todo e a parte que foi retirada

e se pretende descobrir a parte que ficou – vejam-se os exemplos das Figuras 22 e 23), sugere-se a apresentação de novos problemas, em que é conhecido o todo e a parte que ficou, sendo que os alunos terão que descobrir a parte que foi retirada. Nestes casos, o ponto de interrogação surge do lado esquerdo.

Em trabalho coletivo, os alunos devem ler, interpretar e resolver o problema modelo registado no quadro, de acordo com as quatro fases da resolução de problemas propostas por Pólya (Figura 25). Nesta situação, o valor que se retirou é maior do que metade do todo (tipologia B1).

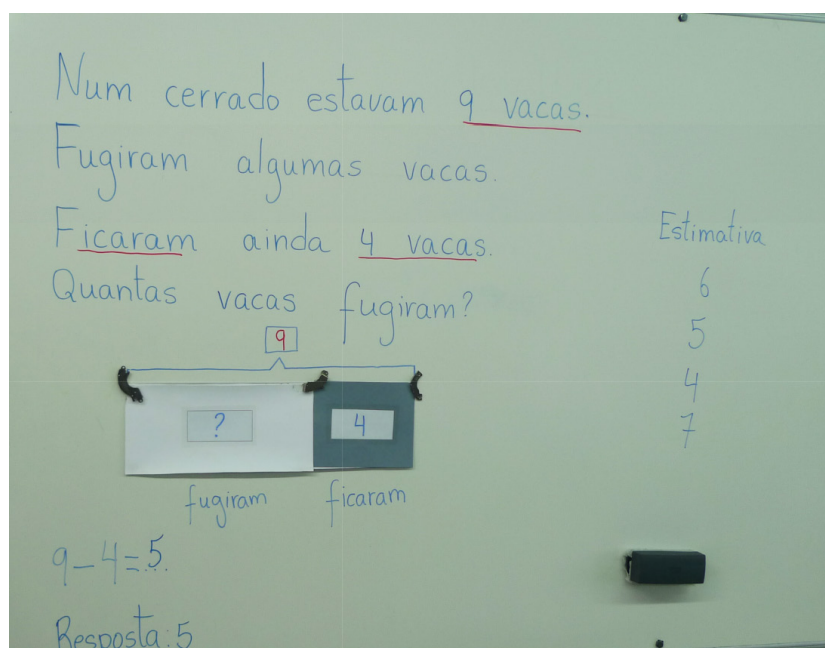


Figura 25: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA B1).

Projeta-se o problema modelo e compara-se com o resolvido no quadro. Cola-se a resolução no caderno individual de resolução de problemas. Esta poderá servir de orientação para a resolução de problemas semelhantes (Figura 26).

Num próximo momento, desafia-se os alunos a resolverem uma situação problemática com o esquema incompleto (Figura 27).

Continua-se a explorar a resolução de problemas em que é conhecido o todo e a parte que ficou, sendo que os alunos devem descobrir a parte que foi retirada, mas agora exploram-se situações em que o valor que se retira é menor do que metade do todo (tipologia B2). Veja-se o exemplo da Figura 28.

Por fim, recomenda-se a resolução, de forma autónoma, de problemas de subtrair no sentido de retirar (tipologias B1 e B2), desenhando o esquema sem que este esteja pré-construído (Figura 29).

### Problemas de subtração - sentido de retirar

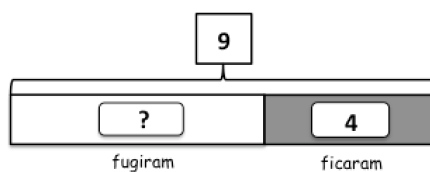
#### Problema modelo

Num cerrado estavam 9 vacas.

Fugiram algumas vacas.

Ficaram ainda 4 vacas.

Quantas vacas fugiram?



$$9 - 4 = 5$$

Resposta: Fugiram 5 vacas.

Auxiliar de cálculo

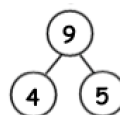


Figura 26: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA B1) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

#### Resolve o problema

Um jardim tinha 18 rosas.

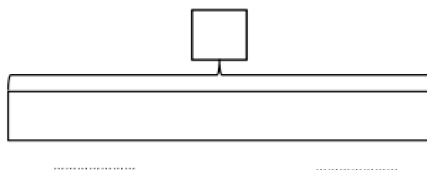
A Érica apanhou algumas rosas.

Ficaram no jardim 6 rosas.

Quantas rosas a Érica apanhou?

2

Estimativa



$$\square \bigcirc \square = \square$$

Auxiliar de cálculo

Resposta: A Érica apanhou ..... rosas.

Figura 27: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA B1), com o esquema incompleto.

### Resolve o problema

Numa livraria havia 28 livros.

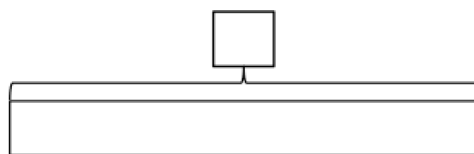
Venderam-se alguns livros.

Ficaram na livraria 20 livros.

Quantos livros foram vendidos?

3

Estimativa



Auxiliar de cálculo

$$\square \bigcirc \square = \square$$

Resposta: Foram vendidos ..... livros.

Figura 28: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIA B2), com o esquema incompleto.

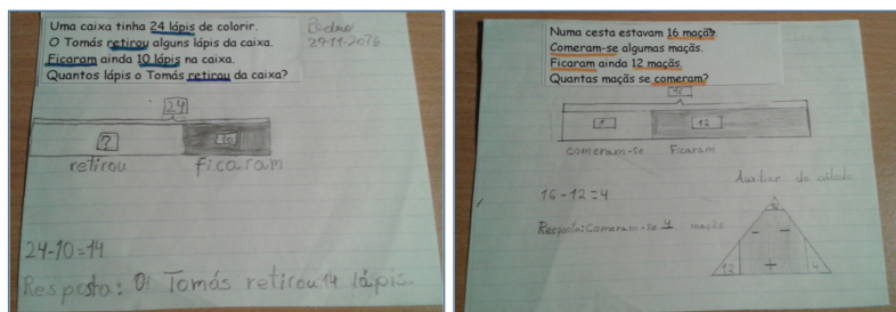


Figura 29: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SUBTRAIR NO SENTIDO DE RETIRAR (TIPOLOGIAS B1 E B2), DESENHANDO O ESQUEMA DE RAIZ.

Consolidados os problemas de subtrair no sentido de retirar, igual exploração pode ser feita com problemas de subtrair no sentido de completar. Vejamos alguns exemplos de acordo com as respetivas tipologias:

- Tipologia C1: conhece-se o todo e a parte que se tem; desconhece-se a parte que ainda está a faltar; a parte que está em falta é maior do que metade do todo (e.g., “A caderneta do João ficará completa quando ele tiver 50 cromos. Neste momento, o João tem 12 cromos. Quantos cromos faltam ao João para que fique com a caderneta completa?”);
- Tipologia C2: conhece-se o todo e a parte que se tem; desconhece-se a parte que ainda está a faltar; a parte que está em falta é menor do que metade do todo (e.g., “A caderneta do João ficará completa quando ele tiver 50 cromos. Neste momento, o João tem 42 cromos. Quantos cromos faltam ao João para que fique com a caderneta completa?”);
- Tipologia D1: conhece-se o todo e a parte que ainda está a faltar; desconhece-se a parte que se tem; a parte que está em falta é maior do que metade do todo (e.g., “A caderneta do João ficará completa quando ele tiver 50 cromos. Faltam 42 cromos para a caderneta ficar completa. Quantos cromos tem a caderneta do João, neste momento?”);
- Tipologia D2: conhece-se o todo e a parte que ainda está a faltar; desconhece-se a parte que se tem; a parte que está em falta é menor do que metade do todo (e.g., “A caderneta do João ficará completa quando ele tiver 50 cromos. Faltam 12 cromos para a caderneta ficar completa. Quantos cromos tem a caderneta do João, neste momento?”).

Nos problemas de subtrair no sentido de retirar a parte branca da barra corresponde à quantidade que se retirou. Por sua vez, nos problemas de subtrair no sentido de completar a parte branca da barra corresponde à quantidade que ainda está a faltar.

## 6 Terceira etapa: problemas de subtração (no sentido de separar)

Apesar de no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico [12] apenas encontrarmos referências a situações de subtração nos sentidos de retirar, completar e comparar (o sentido de comparar será objeto da nossa atenção na próxima secção deste artigo), há um outro sentido da subtração que vale a pena explorar. Trata-se do *sentido de separar*, abordado por exemplo no livro de Ron Aharoni [1].

Há dois motivos que justificam a exploração deste sentido da subtração. Por um lado, o sentido de separar traduz a essência do significado da operação subtração: um todo está dividido em duas partes/grupos; o número total de elementos e o número de elementos de um grupo são conhecidos e há que encontrar o número de elementos do outro grupo. No fundo, este sentido está intimamente ligado à construção do esquema todo-partes, quando o todo está dividido em duas partes. Por outro lado, é possível explorar com este sentido situações problemáticas



de subtração que não estão cobertas pelos restantes sentidos. Por exemplo, a situação problemática “Num grupo de 5 crianças, 2 são raparigas. Quantos são os rapazes?” traduz uma subtração no sentido de separar (temos um todo separado em dois grupos, o das raparigas e o dos rapazes) que não pode ser explorada segundo a ótica dos outros sentidos. De facto, esta situação não pode ser entendida como uma subtração no sentido de retirar, de completar ou de comparar.

Contudo, o recíproco é verdade. É interessante constatar que qualquer situação problemática que conduza a uma expressão envolvendo uma subtração pode ser convertida numa subtração no sentido de separar, apenas com uma reformulação do enunciado. Por exemplo, a situação de retirar “Numa tigela estavam 15 castanhas. A Joana comeu 10 castanhas. Quantas castanhas ficaram na tigela?” pode ser convertida facilmente numa situação de separar: “Numa tigela estavam 15 castanhas, que foram divididas em dois grupos: o grupo das castanhas que a Joana comeu e o grupo das castanhas que sobraram. O grupo das castanhas que a Joana comeu tinha 10 castanhas. Quantas castanhas tinha o outro grupo?”.

Apresenta-se, agora, a parte da caminhada delineada para a resolução de problemas envolvendo a operação subtração no sentido de separar, com recurso ao modelo de barras. Tal como anteriormente, procurou-se desenvolver, simultaneamente com a resolução de problemas, o raciocínio e a comunicação matemática através da participação ativa dos alunos, valorizando-se, sempre que possível, as situações criadas por estes. Frequentemente foi realizado o aperfeiçoamento dos textos escritos pelos alunos, em pequeno grupo ou a pares com a professora, adaptando-os ao tipo de problemas que se pretendia abordar.

Foram implementadas quatro tipologias de problemas: E1, E2, E3 e E4. De acordo com as características de cada grupo de alunos, o professor poderá optar por propor a resolução dos diversos problemas sem recurso aos esquemas incompletos apresentados ao longo desta secção. Estes são um auxiliar para os alunos que nesta fase ainda apresentem dificuldade em desenhar o esquema de barras. No entanto, importa salientar que em situações futuras os alunos devem ser capazes de o fazer autonomamente.

Começamos pelos problemas com a tipologia E1: são os problemas que envolvem dois tipos diferentes de elementos (e.g., rapazes e raparigas), os quais apresentam uma natureza comum (neste caso, alunos). O procedimento é análogo ao que foi adotado na secção anterior para os problemas de subtrair nos sentidos de retirar e de completar: explora-se um problema modelo no quadro (Figura 30); projeta-se a resolução do problema e compara-se com a que foi feita no quadro; a resolução do problema modelo é colada no caderno individual de resolução de problemas, pois pode orientar o aluno em próximas situações problemáticas semelhantes que tenha que resolver (Figura 31).

Repare-se que na Figura 31 o auxiliar de cálculo é uma variante do tradicional esquema todo-partes, que se designou por *triângulo da adição e subtração*, mas que apresenta o mesmo objetivo didático, por apelar à estreita relação entre as expressões  $4 + 10 = 14$ ,  $10 + 4 = 14$ ,  $14 - 4 = 10$  e  $14 - 10 = 4$ .

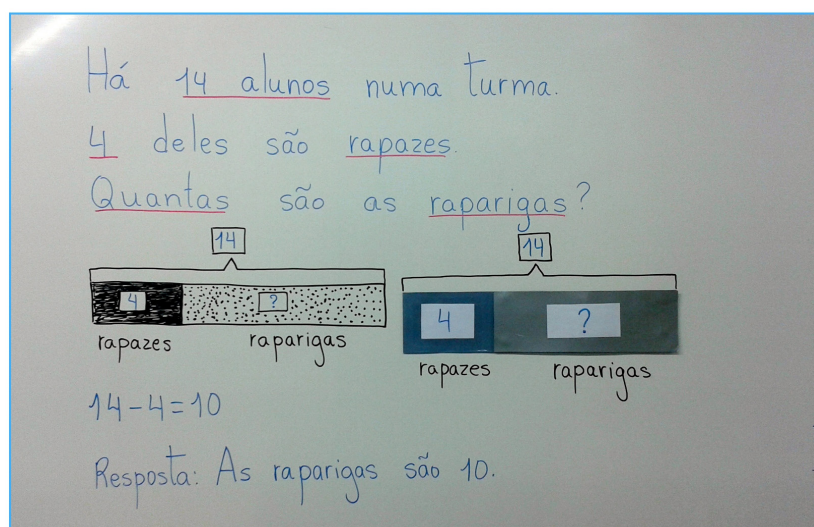


Figura 30: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE SEPARAR (TIPOLOGIA E1).

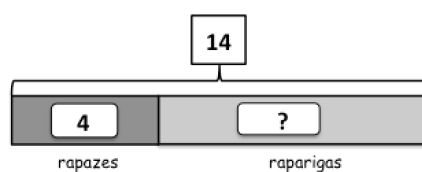
### Problemas de subtração - sentido de separar

#### Problema modelo

Há 14 alunos numa turma.

Destes, 4 são rapazes.

Quantas são as raparigas?



$$14 - 4 = 10$$

Resposta: As raparigas são 10.

Auxiliar de cálculo

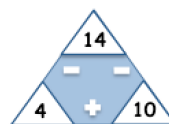


Figura 31: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE SEPARAR (TIPOLOGIA E1) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Em vez de colar a resolução do problema no caderno, o aluno pode efetuar o registo desenhando de raiz o esquema de barras, caso já demonstre algum à vontade no desenho das barras (Figura 34). Aconselha-se sempre a utilização de papel pautado.

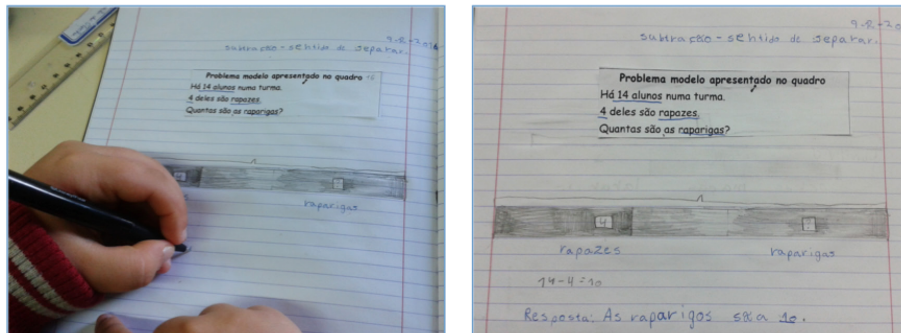


Figura 32: O ALUNO FAZ O REGISTO NO SEU CADERNO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE FORMA AUTÓNOMA.

Sugere-se que sejam propostos novos problemas, que podem apresentar o esquema de barras incompleto (Figura 33), ou então o aluno desenha as barras de forma autónoma.

**Resolve o problema**

2

Há 20 maçãs numa cesta, umas verdes e outras vermelhas.

Sabe-se que 7 maçãs são verdes.

Quantas maçãs são vermelhas?

Estimativa

Auxiliar de cálculo

○

=

**Resposta:** Na cesta existem ..... maçãs vermelhas.

Figura 33: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE SEPARAR (TIPOLOGIA E1), com o esquema incompleto.

Segue-se a exploração das restantes tipologias de problemas, com passos análogos ao trabalho desenvolvido para a tipologia E1:

- Tipologia E2: os problemas envolvem dois tipos de elementos, um deles está especificado em termos da sua quantidade (e.g., motos) e o outro é introduzido com a palavra “restantes” (e.g., carros), desconhecendo-se quantos elementos existem desse tipo (Figura 34);

**Resolve o problema**

O Daniel tem 16 brinquedos.

Deles, 4 são motos.

Os restantes são carros.

Quantos carros tem o Daniel?

3

Estimativa

Auxiliar de cálculo

○=

**Resposta:** O Daniel tem ..... carros.

Figura 34: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE SEPARAR (TIPOLOGIA E2), com o esquema incompleto.

- Tipologia E3: os problemas envolvem um tipo de elementos (e.g., vacas castanhas), subentendendo-se que existem outros tipos e uma natureza comum a todos (neste exemplo, vacas); a questão é apresentada na negativa (Figura 35);
- Tipologia E4: os problemas apresentam o mesmo tipo de elementos (e.g., bonecas) e duas personagens diferentes (e.g., Maria e Ana) (Figura 36).

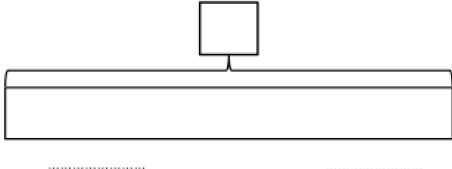
**Resolve o problema**

Num cerrado estão 18 vacas. 4

Destas, 13 são castanhas.

Quantas vacas não são castanhas?

Estimativa



Auxiliar de cálculo

$\bigcirc$   =

Resposta: Não são castanhas ..... vacas.

Figura 35: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE SEPARAR (TIPOLOGIA E3), com o esquema incompleto.

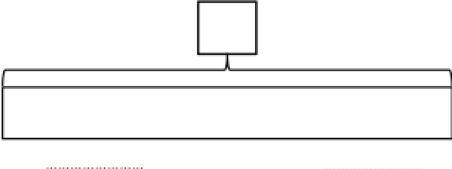
**Resolve o problema**

A Maria e a Ana têm 12 bonecas. 5

A Maria tem 5 bonecas.

Quantas bonecas tem a Ana?

Estimativa



Auxiliar de cálculo

$\bigcirc$   =

Resposta: A Ana tem ..... bonecas.

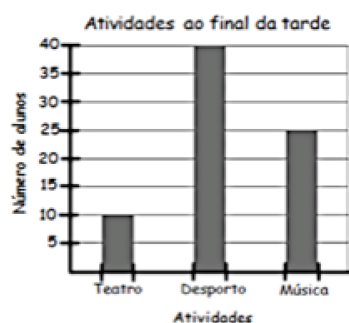
Figura 36: PROBLEMA DE SUBTRAÇÃO NO SENTIDO DE SEPARAR (TIPOLOGIA E4), com o esquema incompleto.

Nos problemas de adição e de subtração, independentemente do sentido explorado, é importante que a criança perceba que as partes têm sempre uma natureza comum, mesmo que essa natureza nem sempre seja evidente.

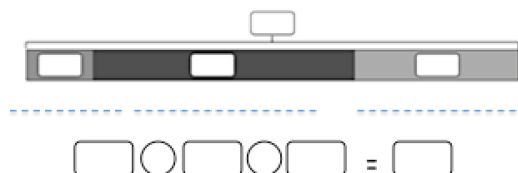
## 7 Quarta etapa: problemas de comparação

A introdução deste tipo de problemas foi feita partindo do trabalho realizado em Organização e Tratamento de Dados, nomeadamente, do estudo e análise de gráficos de barras. Veja-se um exemplo de exploração nas Figuras 37 e 38.

1. O gráfico seguinte mostra como os alunos da escola da Sofia se distribuem pelas atividades na terça-feira, ao final da tarde.

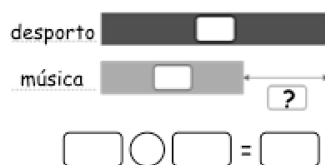


- a) Quantos alunos têm teatro na terça-feira? .....
- b) Quantos alunos têm desporto na terça-feira? .....
- c) Quantos alunos têm música na terça-feira? .....
- d) Quantos alunos, ao todo, têm uma atividade na terça-feira?



**Resposta:** Na terça-feira, ..... alunos têm uma atividade.

- e) Quantos alunos têm desporto a mais do que os alunos que têm música?



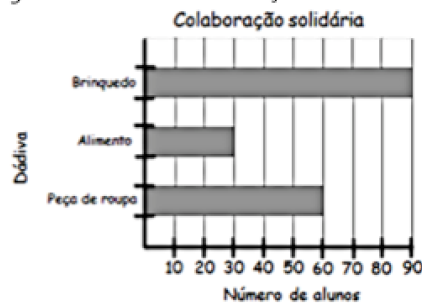
**Resposta:** ..... alunos têm desporto a mais do que os alunos que têm música.

Figura 37: INTRODUÇÃO AOS ESQUEMAS DE COMPARAÇÃO PARTINDO DA ANÁLISE DE GRÁFICOS DE BARRAS.

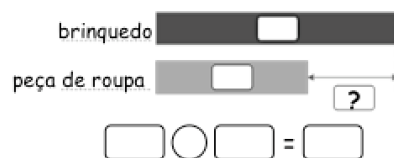


2. Os alunos da escola do Francisco vão colaborar com uma instituição de solidariedade. Cada criança irá trazer um brinquedo, uma peça de roupa ou um alimento.

O gráfico seguinte mostra a distribuição das dádivas.

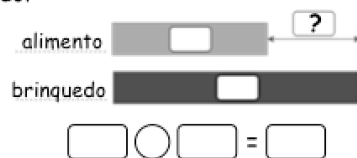


- a) Quantos alunos deram um brinquedo? ..... E um alimento? .....
- b) Quantos alunos deram um brinquedo a mais do que os alunos que deram uma peça de roupa?



**Resposta:** ..... alunos deram brinquedos a mais do que os alunos que deram uma peça de roupa.

- c) Quantos alunos deram um alimento a menos do que os alunos que deram um brinquedo?



**Resposta:** ..... alunos deram um alimento a menos do que os alunos que deram um brinquedo.

Figura 38: INTRODUÇÃO AOS ESQUEMAS DE COMPARAÇÃO PARTINDO DA ANÁLISE DE GRÁFICOS DE BARRAS.

A exploração patente nas Figuras 37 e 38 permitiu que os alunos comesçassem a familiarizar-se com este tipo de situações problemáticas e facilitou a compreensão dos esquemas de comparação que são mais complexos do que os trabalhados anteriormente.

Para os modelos de comparação, sugere-se o mesmo tipo de abordagem desenvolvida nas secções anteriores, com as devidas adaptações. Construiu-se o documento da Figura 39, dirigido ao professor, com o objetivo de orientar os alunos nas quatro fases do modelo de Pólya quando estão em causa problemas de comparação.

<p><b>1.ª fase - orientar os alunos para:</b></p> <p>Lerem com atenção o problema.</p> <p>Sublinharem a informação importante (os dados e o objetivo do problema).</p>	
<p><b>2.ª fase - orientar os alunos para:</b></p> <p>Elaborarem um <u>esquema</u> que represente a situação, usando <u>barras</u>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• desenhar duas barras horizontais e paralelas, de diferentes comprimentos, para representarem os dados do problema, prevendo se o comprimento de uma delas é maior ou menor, do que metade do comprimento da outra;</li> <li>• desenhar uma chaveta que evidencie a diferença de comprimento das barras;</li> <li>• escrever os rótulos e registar os dados;</li> <li>• sombrear as barras de cores diferentes;</li> <li>• ler, novamente, o problema e colocar o ponto de interrogação;</li> <li>• fazer uma estimativa do resultado.</li> </ul>	
<p><b>3.ª fase - orientar os alunos para:</b></p> <p>Escreverem uma <u>expressão matemática</u> que permita resolver o problema.</p> <p>Completarem a expressão matemática.</p>	<p>Recorrerem a um <u>auxiliar de cálculo</u> para completar a expressão matemática.</p>
<p><b>4.ª fase - orientar os alunos para:</b></p> <p>Verificarem se a resolução está correta e se o resultado obtido é adequado ao problema.</p> <p>Responderem ao problema.</p>	

Figura 39: AS QUATRO FASES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE ENVOLVAM A UTILIZAÇÃO DE UM MODELO DE BARRAS (VERSÃO PARA PROBLEMAS DE COMPARAÇÃO).

Em trabalho coletivo, deve-se ler, interpretar e sublinhar a informação importante contida no enunciado do problema modelo registado no quadro, de acordo com a primeira fase da resolução de problemas proposta por Pólya (veja-se a Figura 40).

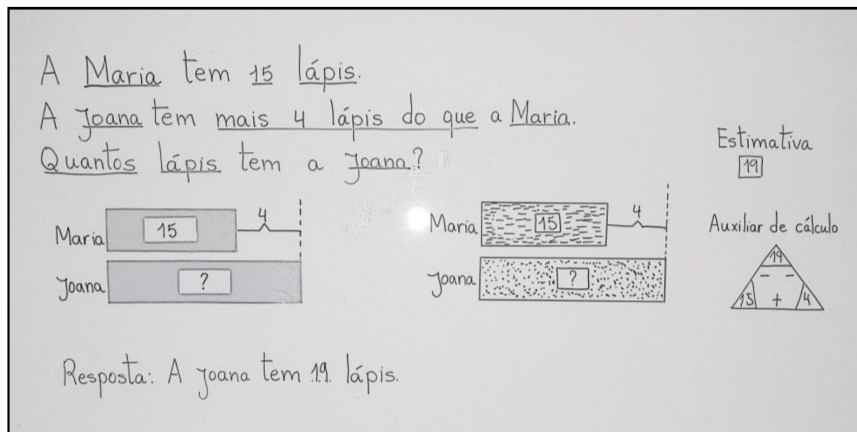


Figura 40: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO (TIPOLOGIA A1).

É importante que as crianças percebam que, nos modelos de comparação, há pelo menos duas barras, uma para cada personagem envolvida. No contexto do problema em análise, apresentam-se as duas barras manipuláveis e começa-se a compor o esquema. Pergunta-se:

- Quem tem mais lápis?/Quem tem menos lápis?
- Quem fica com a barra maior?/Quem fica com a barra menor?

Estas perguntas devem ser colocadas em todas as situações problemáticas que envolvam modelos de comparação, porque ajudam a identificar o que representa cada uma das barras. O professor deve desenhar ao lado o esquema e fazer todo o percurso de resolução do problema, na presença dos alunos, estimulando o diálogo e a partilha de ideias.

Por último, projeta-se a resolução do problema modelo e compara-se com o que foi escrito no quadro. Cola-se a resolução do problema no caderno de problemas. Esta poderá servir de orientação no futuro para a resolução de problemas semelhantes (Figura 41).

O problema das Figuras 40 e 41 apresenta a tipologia A1: conhecem-se os valores da barra menor e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra maior; é um problema que envolve a operação adição, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “mais”.

Os alunos devem ser desafiados a resolver algumas situações problemáticas com o esquema incompleto. Coletivamente, lê-se e interpreta-se o enunciado, sublinhando a informação importante. Monta-se o esquema com as barras manipuláveis e reproduz-se o seu desenho ao lado (Figura 42).


**Problemas de comparação**

A Maria tem 15 lápis.

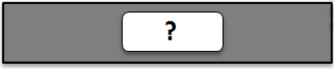
A Joana tem mais 4 lápis do que a Maria.

Quantos lápis tem a Joana?


Maria




Joana



Estimativa



Auxiliar de cálculo



Resposta: A Joana tem ..... lápis.

Figura 41: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO (TIPOLOGIA A1) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

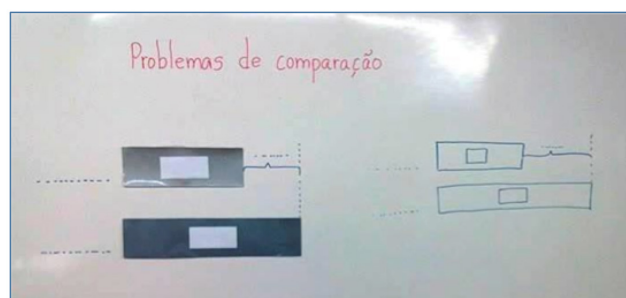


Figura 42: PREPARAÇÃO DO QUADRO PARA A RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, COM O ESQUEMA INCOMPLETO.

É importante dar a oportunidade aos alunos de manipularem as barras nos seus lugares. Entrega-se a cada aluno duas barras manipuláveis, semelhantes às utilizadas no quadro, e propõe-se que façam o esquema nos seus lugares. Os alunos devem resolver o problema seguindo as fases do modelo de Pólya, completando o registo no caderno (Figura 43).

Esta exploração é repetida para os problemas com a tipologia A2: conhecem-se os valores da barra menor e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra maior; é um problema que envolve a operação adição,

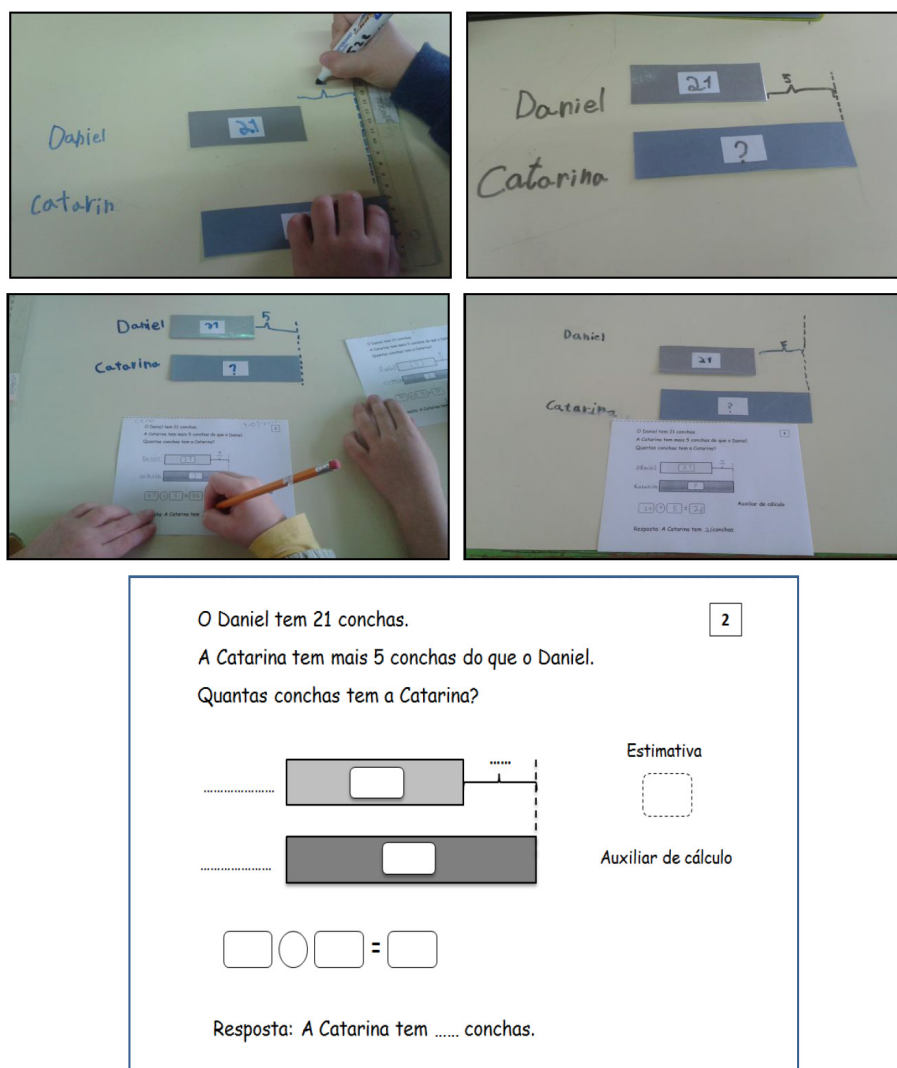


Figura 43: CADA ALUNO MANIPULA AS BARRAS NO SEU LUGAR E FAZ O REGISTO NO CADERNO.

sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “menos”.

Sugere-se, em primeiro lugar, a resolução de um problema no quadro, seguida pela resolução de um problema com o esquema incompleto (Figuras 44, 45 e 46). Coletivamente, lê-se e interpreta-se cada enunciado, sublinhando a informação importante.

Num próximo momento de resolução de problemas, as crianças devem ser convidadas a resolver, autonomamente, problemas de comparação (tipologias A1 e A2), desenhando o esquema sem qualquer auxílio.

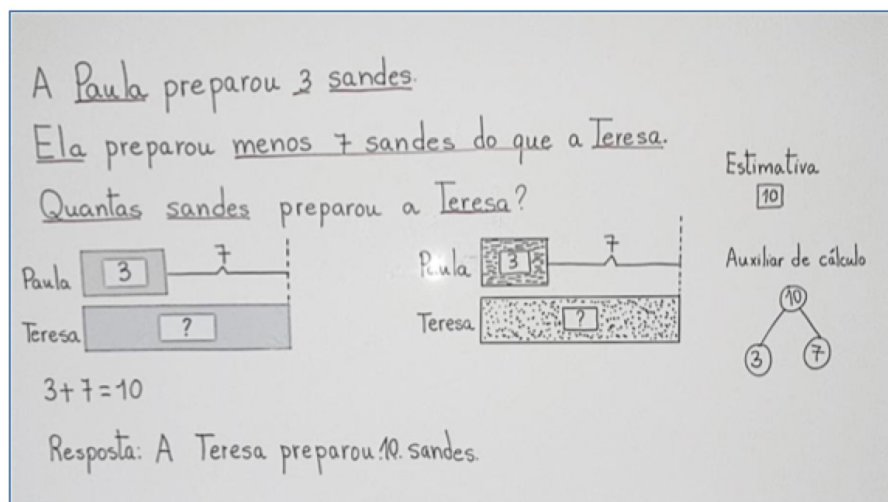


Figura 44: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO (TIPOLOGIA A2).

A Paula preparou 3 sandes.

Ela preparou menos 7 sandes do que a Teresa.

Quantas sandes preparou a Teresa?

Resposta: A Teresa preparou ..... sandes.

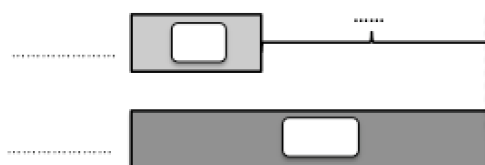
Figura 45: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO (TIPOLOGIA A2) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

O Simão pintou 6 balões.

2

Ele pintou menos 8 balões do que o Pedro.

Quantos balões pintou o Pedro?



Estimativa



Auxiliar de cálculo

$$\square \bigcirc \square = \square$$

Resposta: O Pedro pintou ..... balões.

Figura 46: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA ADIÇÃO (TIPOLOGIA A2), COM ESQUEMA INCOMPLETO.

Depois de consolidados os problemas com as tipologias A1 e A2, é chegado o momento de explorar mais duas tipologias, seguindo passos análogos:

- Tipologia B1: conhecem-se os valores da barra maior e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra menor; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “mais” (Figuras 47, 48 e 49).

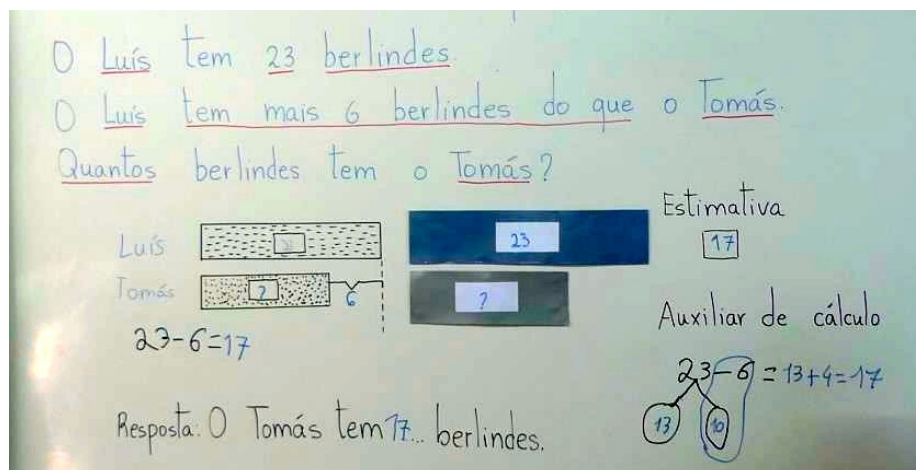


Figura 47: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA B1).



### Problemas de comparação

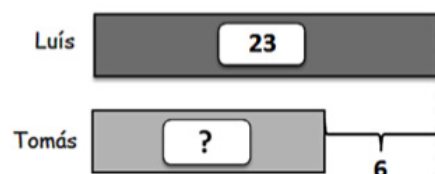
O Luís tem 23 berlindes.

O Luís tem mais 6 berlindes do que o Tomás.

Quantos berlindes tem o Tomás?

Estimativa

Auxiliar de cálculo



$$\square \bigcirc \square = \square$$

Resposta: O Tomás tem ..... berlindes.

Figura 48: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA B1) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

A Graça tem 27 galinhas na sua quinta.

Ela tem mais 8 galinhas do que a Fátima.

Quantas galinhas tem a Fátima?

2

Estimativa

Auxiliar de cálculo



$$\square \bigcirc \square = \square$$

Resposta: A Fátima tem ..... galinhas.

Figura 49: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA B1), COM ESQUEMA INCOMPLETO.

- Tipologia B2: conhecem-se os valores da barra maior e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra menor; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “menos” (Figuras 50, 51 e 52).

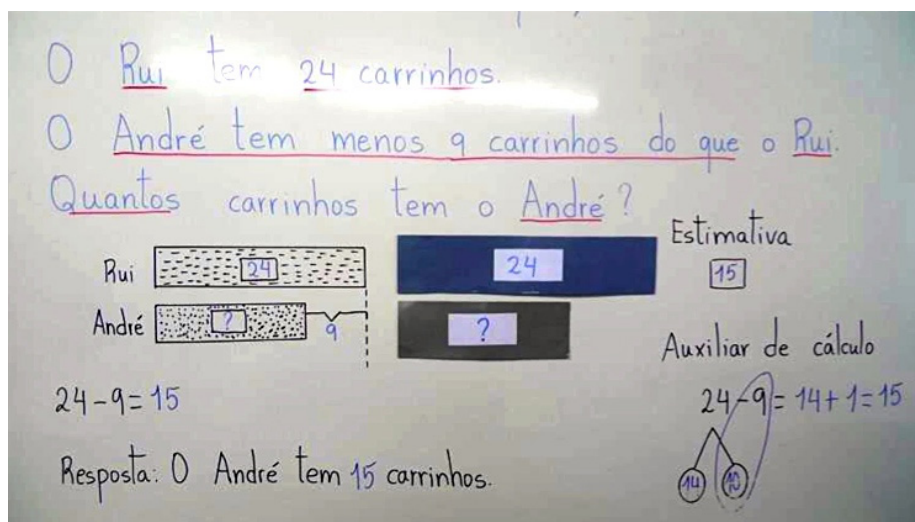


Figura 50: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA B2).

### Problemas de comparação

O Rui tem 24 carrinhos.

O André tem menos 9 carrinhos do que o Rui.

Quantos carrinhos tem o André?

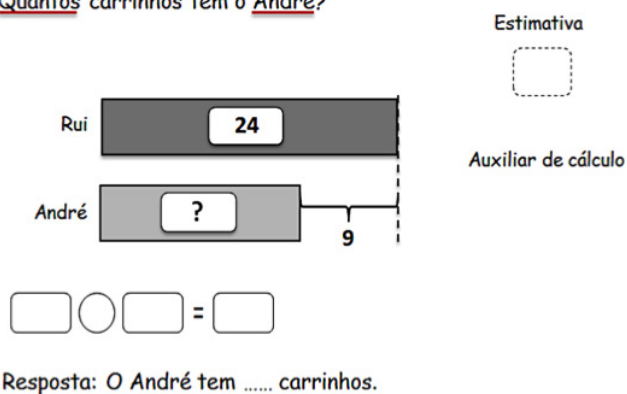


Figura 51: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA B2) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

A Beatriz tem uma caixa com 36 lápis de colorir. 2

A Lurdes tem menos 12 lápis do que a Beatriz.

Quantas lápis tem a Lurdes?

Estimativa   

Auxiliar de cálculo

   ○    =   

Resposta: A Lurdes tem ..... lápis de colorir.

Figura 52: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA B2), COM ESQUEMA INCOMPLETO.

Por fim, resta explorar as duas últimas tipologias, seguindo passos análogos:

- Tipologia C1: conhecem-se os valores da barra maior e da barra menor e pretende-se saber o valor da diferença entre as duas barras; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a pergunta é apresentada no enunciado com recurso à palavra “mais” (Figuras 53, 54 e 55).

A Margarida tem 18 moedas.

O Filipe tem 5 moedas.

Quantas moedas a Margarida tem a mais do que o Filipe?

Estimativa 13

Auxiliar de cálculo

Resposta: A Margarida tem mais 13 moedas do que o Filipe.

Figura 53: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA C1).

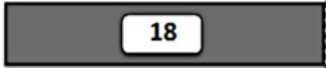
**Problemas de comparação**

A Margarida tem 18 moedas.


O Filipe tem 5 moedas.

Quantas moedas a Margarida tem a mais do que o Filipe?


Margarida



Filipe



Estimativa



Auxiliar de cálculo

○  =

**Resposta:** A Margarida tem mais ..... moedas do que Filipe.



Figura 54: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA C1) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

O Nuno tem 38 cromos na sua coleção.


2

O irmão tem 24 cromos.

Quantos cromos o Nuno tem a mais do que o irmão?

Estimativa



Auxiliar de cálculo

○  =

**Resposta:** O Nuno tem mais ..... cromos do que o irmão.

Figura 55: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA C1), COM ESQUEMA INCOMPLETO.

- Tipologia C2: conhecem-se os valores da barra maior e da barra menor e pretende-se saber o valor da diferença entre as duas barras; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a pergunta é apresentada no enunciado com recurso à palavra “menos” (Figuras 56, 57 e 58).

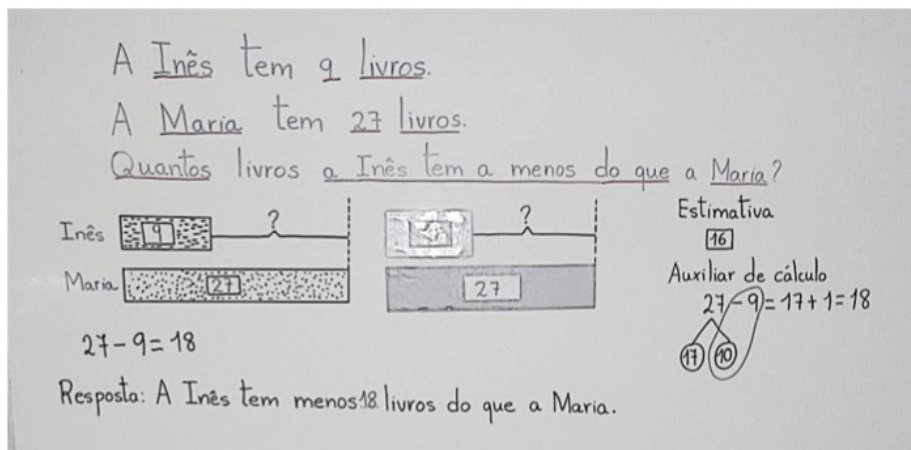


Figura 56: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA C2).

### Problemas de comparação

A Inês tem 9 livros.

A Maria tem 27 livros.

Quantos livros a Inês tem a menos do que a Maria?

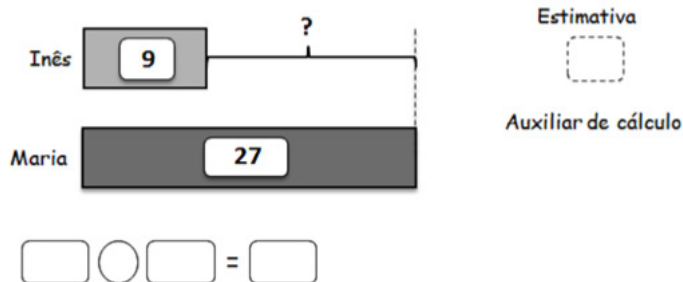
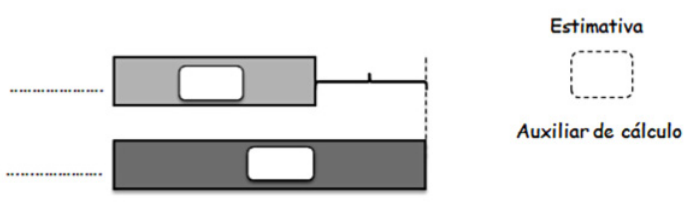


Figura 57: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA C2) – REGISTO PARA O CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

A Graziela tem 29 anos de idade e a sua irmã tem 42 anos. 2

Quantos anos a Graziela tem a menos do que a irmã ?



  
  
  
=
  

**Resposta:** A Graziela tem menos ..... anos do que a irmã.

Figura 58: PROBLEMA DE COMPARAÇÃO, ENVOLVENDO UMA SUBTRAÇÃO (TIPOLOGIA C2), COM ESQUEMA INCOMPLETO.

Espera-se que, no culminar desta caminhada, os alunos estejam aptos a resolver, autonomamente, problemas de comparação das diferentes tipologias, desenhando o esquema sem qualquer auxílio. Na turma da EBI da Praia da Vitória, para além do registo no caderno individual de resolução de problemas, também ficou popular entre os alunos o registo em quadros brancos com recurso a marcadores (Figura 59). Este registo era feito a pares.

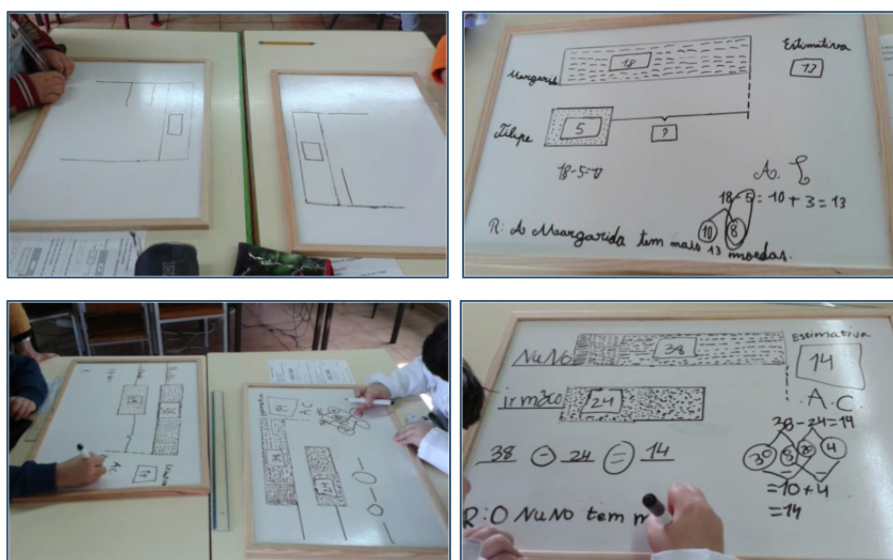


Figura 59: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM QUADROS BRANCOS.

## 8 Quinta etapa: problemas de multiplicação e divisão

O modelo de barras é particularmente eficaz na resolução de problemas de multiplicação no *sentido aditivo* e de problemas de divisão nos dois sentidos previstos pelo programa português: *divisão por partilha equitativa* e *divisão por agrupamento*. Já para a resolução de problemas de multiplicação no *sentido combinatório*, as estratégias mais eficazes passam por construir uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore, de modo a analisar todas as possíveis combinações.

Antes de se avançar para as primeiras explorações com o modelo de barras, é aconselhável um trabalho prévio em que se contam pequenas histórias e se resolvem informalmente problemas decorrentes dessas histórias. Para a adição e subtração, este tipo de exploração pode ter lugar no decorrer do 1.º ano de escolaridade, quando são introduzidas estas operações aritméticas. Já para a multiplicação e divisão, o programa português prevê a sua introdução no 2.º ano de escolaridade, pelo que se aconselha um trabalho prévio com a exploração de pequenas histórias no decorrer desse ano, que possa anteceder a resolução de problemas de multiplicação e divisão pelo modelo de barras.

Na turma da EBI da Praia da Vitória, começou-se por fazer uma abordagem sobre a forma de pequenas histórias relacionadas com situações do quotidiano, com recurso à manipulação de materiais e posterior representação pictórica. Para cada caso, foi sempre apresentada a respetiva expressão matemática. Iniciou-se esta caminhada com a exploração de histórias envolvendo a operação multiplicação no sentido aditivo e, posteriormente, a operação divisão nos sentidos de partilha equitativa e de agrupamento.

Na Figura 60, exemplifica-se uma atividade desenvolvida com o *Tabuleiro da multiplicação e divisão*, da autoria dos Prof DA da EBI dos Arrifes, João Duarte e Zélia Faria. A situação problemática envolve 3 grupos de 4 elementos e a descoberta do número total de elementos ( $3 \times 4 = 12$ ). O movimento faz-se das partes (iguais) para o todo. Como a multiplicação é uma adição sucessiva de parcelas iguais, é importante o aluno perceber desde as primeiras explorações que os grupos (parcelas) devem ter todos o mesmo número de elementos.

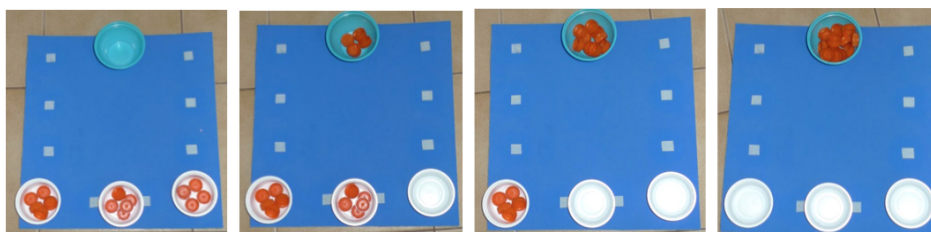


Figura 60: UTILIZAÇÃO DO TABULEIRO DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO PARA EXPLORAR UMA SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO UMA MULTIPLICAÇÃO.



Na sequência da exploração concreta, os alunos devem realizar um registo pictórico da situação problemática no seu caderno. Este registo deve incluir a escrita da respetiva expressão matemática (no exemplo,  $3 \times 4 = 12$ ).

Na Figura 61, apresentam-se alguns registos no caderno de situações problemáticas envolvendo a multiplicação, da autoria da Prof DA da EBS de São Roque do Pico, Marta Carvalho.

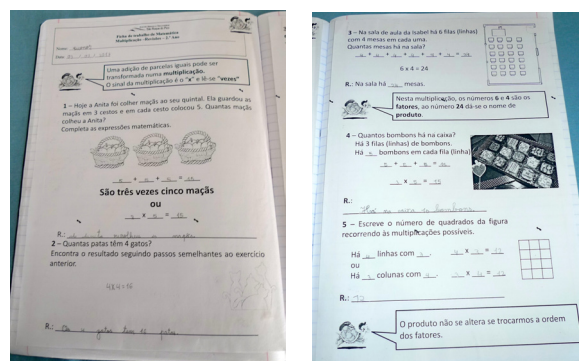


Figura 61: REGISTO NO CADERNO DE SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS ENVOLVENDO A MULTIPLICAÇÃO.

Seguiu-se igual exploração para os dois sentidos da divisão. No decorrer da abordagem de situações concretas envolvendo a multiplicação é muito importante que as crianças de apercebam que, na escrita da expressão matemática, o fator da esquerda indica o número de grupos (número de parcelas) e o fator da direita indica o número de elementos de cada grupo (o valor de cada parcela). Numa situação problemática envolvendo a multiplicação, estes dois valores são dados e é esperado que se descubra o número total de elementos (veja-se a Figura 60). Já nas situações problemáticas envolvendo a divisão, pode ser dado:

- o número total de elementos e o número de grupos, pretendendo-se descobrir o número de elementos de cada grupo (divisão por partilha equitativa); por exemplo, “Tenho 6 maçãs e quero distribuí-las igualmente por 3 amigos. Quantas maçãs calha a cada um?”; a expressão matemática que traduz esta situação é  $6 : 3 = 2$ , que está associada à correspondente expressão para a multiplicação, neste caso  $3 \times 2 = 2 + 2 + 2 = 6$ , porque temos 3 amigos/grupos com 2 maçãs cada;

ou

- o número total de elementos e o número de elementos de cada grupo, pretendendo-se descobrir o número de grupos (divisão por agrupamento); por exemplo, “Tenho 6 maçãs e quero colocá-las em cestas com 3 maçãs cada. De quantas cestas vou precisar? Quantas vezes cabe o 3 no 6?”; a expressão matemática que traduz esta situação é  $6 : 3 = 2$ , que está associada à correspondente expressão para a multiplicação; contudo, a expressão neste caso é dada por  $2 \times 3 = 3 + 3 = 6$ , porque temos 2 cestas/grupos com 3 maçãs cada.

Por este motivo, na exploração de situações concretas, a expressão para a divisão deve estar sempre associada à expressão correspondente para a multiplicação, sendo que estamos na presença de uma divisão por agrupamento quando desconhecemos o fator da esquerda (número de grupos) e de uma divisão por partilha equitativa quando desconhecemos o fator da direita (número de elementos de cada grupo). Em todos estes cenários, as partes devem ser sempre iguais, ou seja, os grupos devem ter todos o mesmo número de elementos.

Na Figura 62, apresenta-se um exemplo de exploração da divisão por partilha equitativa. Conhece-se o número total de elementos (20 barquinhos) e o número de grupos (4 grupos) e pretende-se descobrir o número de elementos de cada grupo. Na manipulação do tabuleiro da multiplicação e divisão, a criança deve distribuir, uma a uma, as 20 peças pelos 4 recipientes. Note-se que o movimento processa-se, agora, do todo para as partes. No final, o aluno constata que cada recipiente tem 5 peças. As expressões matemáticas envolvidas são  $20 : 4 = 5$  e  $4 \times 5 = 20$ . Há claras vantagens na exploração da expressão matemática para a multiplicação. De facto, se a criança se recordar das tabuadas do 4 ou do 5 poderá associar esse conhecimento prévio a esta situação problemática. Além disso, a situação concreta fica perfeitamente retratada pela expressão

$$4 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.$$

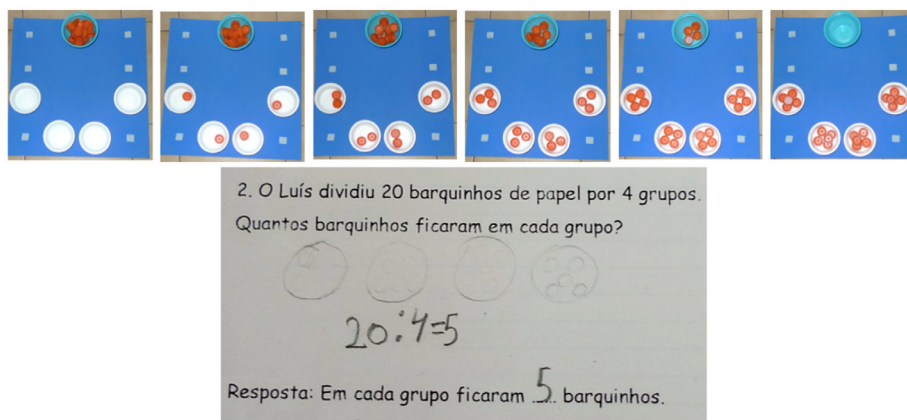


Figura 62: UTILIZAÇÃO DO TABULEIRO DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO PARA EXPLORAR UMA SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO UMA DIVISÃO POR PARTILHA EQUITATIVA, SEGUINDO-SE O REGISTO PICTÓRICO NO CADERNO.

Depois de várias explorações com o tabuleiro da multiplicação e divisão, pode-se abordar algumas situações problemáticas apenas com registo pictórico. No exemplo da Figura 63, as expressões envolvidas são  $14 : 2 = 7$  e  $2 \times 7 = 14$ , em que a criança pode explorar a relação entre o dobro e a metade.

Na Figura 64, apresenta-se um exemplo de exploração da divisão por agrupamento. Conhece-se o número total de elementos (16 miniaturas da Kinder) e o número de elementos de cada grupo (a Maria quer fazer grupos de 2) e pretende-se descobrir o número de grupos. Na manipulação do tabuleiro da

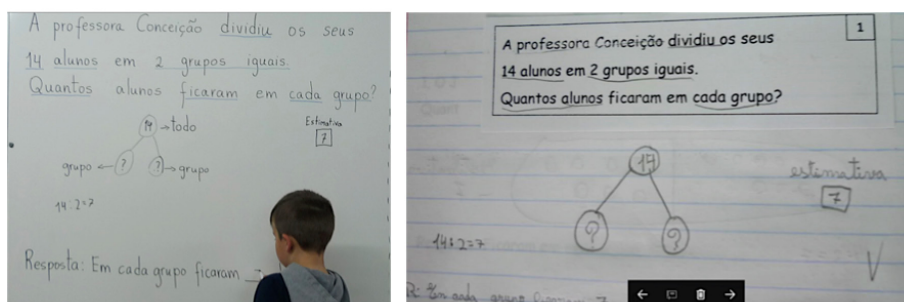


Figura 63: REGISTO PICTÓRICO DE UMA SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO UMA DIVISÃO POR PARTILHA EQUITATIVA.

multiplicação e divisão, os recipientes que representam os grupos devem estar empilhados ao lado do tabuleiro; a criança retira um recipiente e coloca duas tampinhas nesse recipiente; continua a retirar recipientes da pilha e a colocar duas tampinhas em cada um, até se esgotarem as tampinhas. Note-se que o movimento processa-se do todo para as partes. No final, o aluno constata que conseguiu colocar 2 tampinhas em 8 recipientes. As expressões matemáticas envolvidas são  $16 : 2 = 8$  e  $8 \times 2 = 16$ . Há vantagens na exploração da expressão matemática para a multiplicação. A situação concreta fica perfeitamente retratada pela expressão

$$8 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16.$$

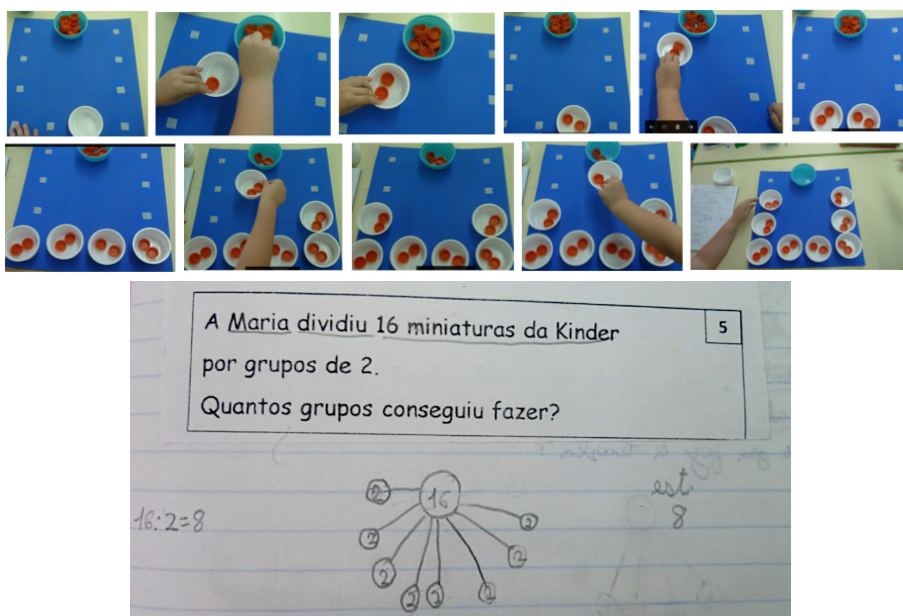


Figura 64: UTILIZAÇÃO DO TABULEIRO DA MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO PARA EXPLORAR UMA SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO UMA DIVISÃO POR AGRUPAMENTO, SEGUINDO-SE O REGISTO PICTÓRICO NO CADERNO.

Na Figura 65, podemos observar o registo pictórico num quadro branco de uma situação problemática envolvendo as expressões  $12 : 2 = 6$  e  $6 \times 2 = 12$ , em que se pretende saber quantos grupos de 2 se pode fazer com 12 crianças.

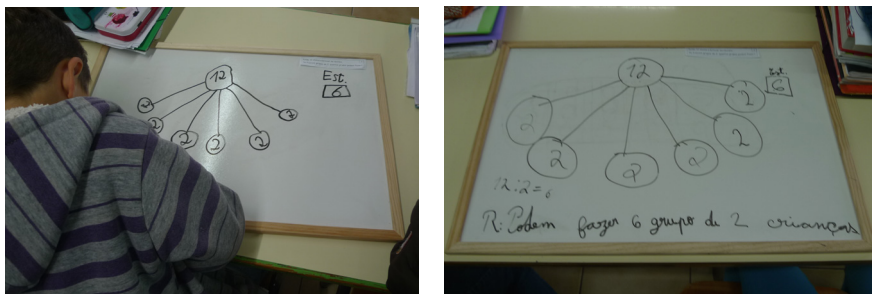


Figura 65: REGISTO PICTÓRICO NUM QUADRO BRANCO DE UMA SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO UMA DIVISÃO POR AGRUPAMENTO.

Na Figura 66, podemos observar o registo pictórico no quadro e no caderno de uma situação problemática envolvendo as expressões  $14 : 2 = 7$  e  $7 \times 2 = 14$ , em que se pretende saber quantos grupos de 2 se pode fazer com 14 alunos. Note-se no paralelismo com a situação explorada na Figura 63, no contexto da divisão por partilha equitativa, e na importante relação entre os significados das expressões  $7 \times 2 = 14$  e  $2 \times 7 = 14$  (7 grupos de 2 elementos ou 2 grupos de 7 elementos), que está na base da compreensão dos dois sentidos da divisão.

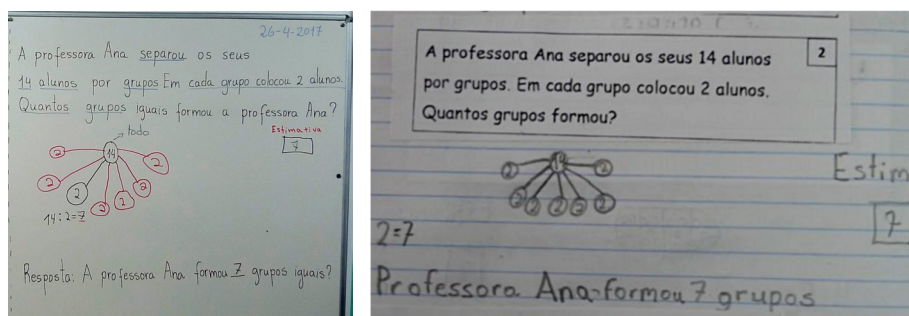


Figura 66: REGISTO PICTÓRICO NO QUADRO E NO CADERNO DE UMA SITUAÇÃO PROBLEMÁTICA ENVOLVENDO UMA DIVISÃO POR AGRUPAMENTO.

A certa altura é interessante misturar situações problemáticas, umas para a divisão por partilha equitativa e outras para a divisão por agrupamento. Na Figura 67, apresentam-se registos pictóricos de dois problemas, um para cada sentido da divisão.

Terminada a exploração de histórias envolvendo o sentido aditivo da multiplicação e os dois sentidos da divisão, é chegado o momento de introduzir o modelo de barras. Sendo a divisão a operação inversa da multiplicação, que por sua vez se traduz numa adição sucessiva de parcelas iguais, o modelo de barras para estas duas operações é simplesmente o modelo todo-partes utilizado para

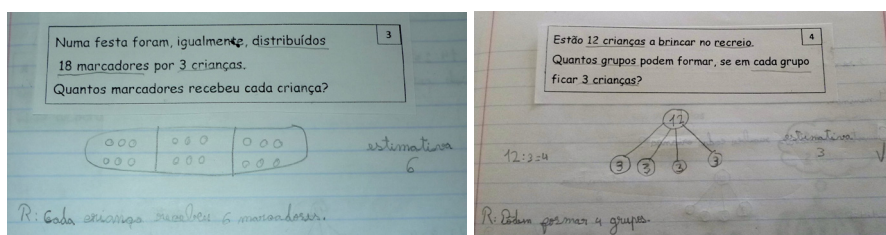


Figura 67: REGISTO PICTÓRICO NO CADERNO DE DUAS SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS ENVOLVENDO, DA ESQUERDA PARA A DIREITA, UMA DIVISÃO POR PARTILHA EQUITATIVA E UMA DIVISÃO POR AGRUPAMENTO.

a adição e subtração, com as devidas adaptações: as partes devem ser todas iguais, ou seja, devem ter todas o mesmo número de elementos. Além disso, como podem existir mais de duas partes é necessário fazer referência ao número total de partes, dividindo a barra que representa o todo nesse número de partes iguais ou indicando com uma chaveta quantas partes iguais se devem considerar. De resto, a resolução de problemas com o modelo de barras para a multiplicação e divisão segue passos análogos aos apresentados na Figura 13.

Começou-se por explorar o modelo de barras para problemas envolvendo o sentido aditivo da operação multiplicação (tipologia A). Vejam-se alguns exemplos nas Figuras 68 e 69.

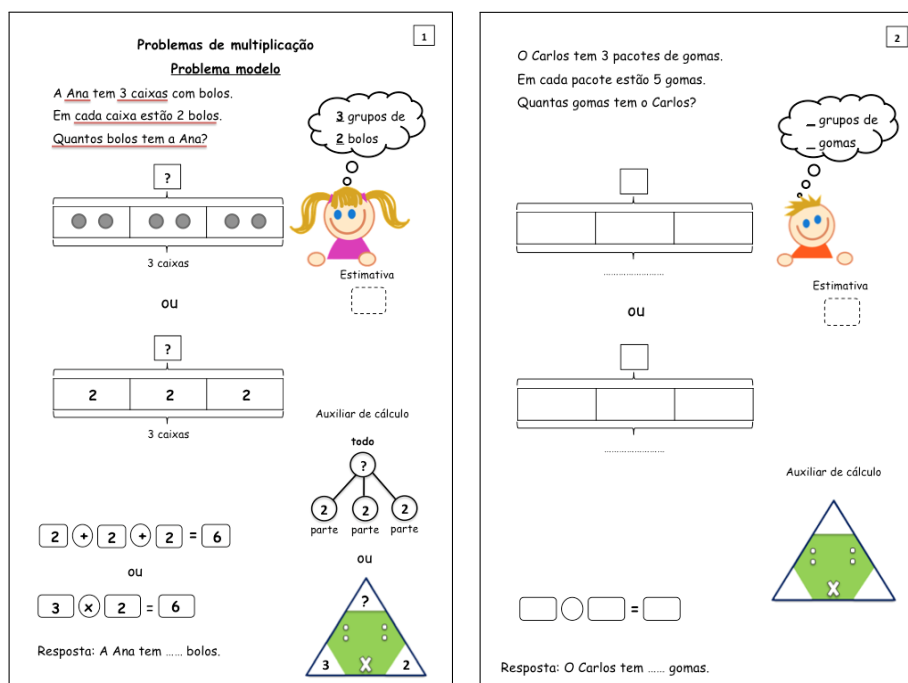


Figura 68: PROBLEMAS DE MULTIPLICAÇÃO NO SENTIDO ADITIVO (TIPOLOGIA A) – NUMA PRIMEIRA FASE, APOSTA-SE NUM REGISTO PICTÓRICO DE AUXÍLIO AO REGISTO SIMBÓLICO DO NÚMERO DE ELEMENTOS EM CADA GRUPO.



Os passos são análogos aos desenvolvidos para as outras operações: explora-se um problema modelo no quadro, projeta-se a resolução completa e compara-se com a resolução do quadro, cola-se a resolução completa no caderno individual de resolução de problemas de cada aluno e promove-se a resolução de mais problemas, numa fase inicial, com o esquema incompleto.

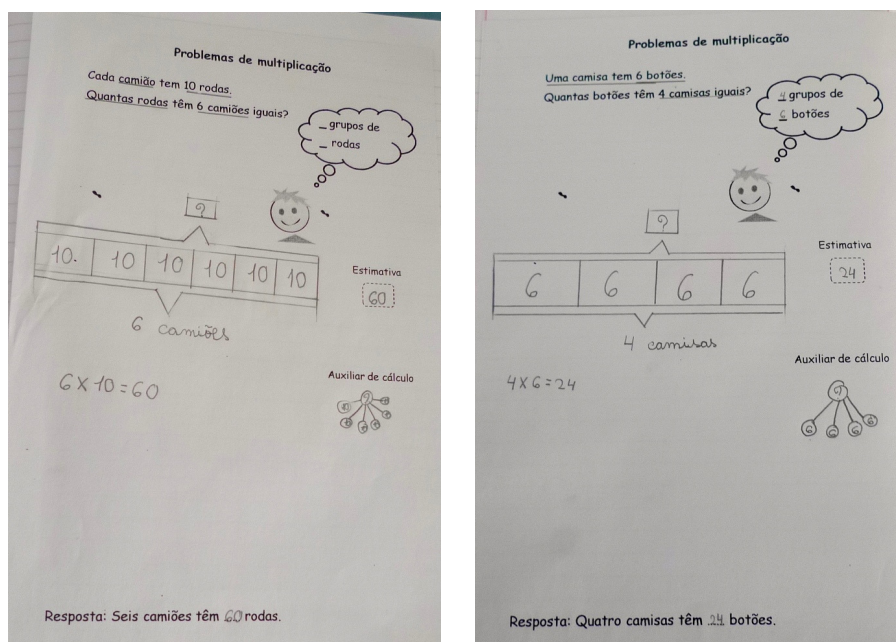


Figura 69: PROBLEMAS DE MULTIPLICAÇÃO NO SENTIDO ADITIVO (TIPOLOGIA A) – REGISTOS NO CADERNO SEM AUXILIARES PARA O DESENHO DO ESQUEMA.

Como se pode observar nos exemplos das Figuras 68 e 69, convencionou-se indicar o número de grupos abaixo da barra e o número total de elementos acima da barra. Deve-se utilizar chavetas em ambos os casos. Esta convenção facilita a leitura do esquema de barras. É importante que o aluno se aperceba que, nos problemas de multiplicação, conhece-se o número de grupos e o número de elementos de cada grupo e pretende-se saber o número total de elementos, pelo que o ponto de interrogação deve ser colocado sempre acima da barra.

Consolidado o modelo de barras para os problemas de multiplicação no sentido aditivo, deve-se explorar o modelo de barras para os problemas envolvendo os dois sentidos da divisão: divisão por partilha equitativa (tipologia B) e divisão por agrupamento (tipologia C). Vejam-se alguns exemplos nas Figuras 70 e 71. Num problema de divisão por partilha equitativa, conhece-se o número total de elementos e o número de grupos e pretende-se saber o número de elementos de cada grupo, pelo que o ponto de interrogação deve ser colocado sempre dentro das divisórias da barra. Já num problema de divisão por agrupamento, conhece-se o número total de elementos e o número de elementos de cada grupo e pretende-se saber o número de grupos, pelo que o ponto de interrogação deve ser colocado sempre abaixo da barra.

**Divisão por partilha equitativa**

**Problema modelo**

A Luísa distribuiu 6 lápis igualmente por 3 alunos.  
Quantos lápis a Luísa deu a cada aluno?

6 lápis

3 alunos

OU

6 lápis

3 alunos

Estimativa

Auxiliares de cálculo

OU

Auxiliar de cálculo

$6 : 3 = \square$

Resposta: A Luísa deu ..... lápis a cada aluno.

3 grupos de ..... lápis

3

Uma turma do 2.º ano tem 21 alunos.  
A professora separou a turma em 3 grupos com o mesmo número de alunos.  
Quantos alunos ficaram em cada grupo?

Estimativa

Auxiliar de cálculo

Resposta: Ficaram em cada grupo ..... alunos.

Figura 70: PROBLEMAS DE DIVISÃO POR PARTILHA EQUITATIVA (TIPOLOGIA B) – NUMA PRIMEIRA FASE, APOSTA-SE NUM REGISTO PICTÓRICO DE AUXÍLIO AO REGISTO SIMBÓLICO DO NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS.

**Divisão por agrupamento**

**Problema modelo**

A Sofia tem 8 contas coloridas.  
A Sofia enfiou 2 contas em cada pulseira.  
Quantas pulseiras ela usou para colocar todas as contas?

8 contas

? pulseiras

OU

8 contas

? pulseiras

Estimativa

Auxiliar de cálculo

Auxiliar de cálculo

$8 : 2 = \square$

Resposta: A Sofia usou ..... pulseiras.

..... grupos de 2 contas

3

A dona Susana usou 24 ovos para fazer alguns bolos.  
Em cada bolo ela colocou 4 ovos.  
Quantos bolos fez a dona Susana?

Estimativa

Auxiliar de cálculo

Resposta: A dona Susana fez ..... bolos.

---

4

Numa paragem estão 20 turistas à espera de táxi.  
Cada táxi transporta 4 turistas.  
Quantos táxis são necessários para transportar todos os turistas?

Estimativa

Auxiliar de cálculo

Resposta: Para transportar todos os turistas são necessários ..... táxis.

Figura 71: PROBLEMAS DE DIVISÃO POR AGRUPAMENTO (TIPOLOGIA C) – NUMA PRIMEIRA FASE, APOSTA-SE NUM REGISTO PICTÓRICO DE AUXÍLIO AO REGISTO SIMBÓLICO DO NÚMERO TOTAL DE ELEMENTOS.



Nas Figuras 68, 70 e 71, o auxiliar de cálculo é o que se designou por *triângulo da multiplicação e divisão*. Em termos didáticos, este triângulo apela à estreita relação entre expressões como, por exemplo,  $3 \times 2 = 6$ ,  $2 \times 3 = 6$ ,  $6 : 2 = 3$  e  $6 : 3 = 2$ .

## 9 Sexta etapa: problemas de dois passos

Depois de consolidadas todas as etapas anteriores, seguem-se as primeiras explorações de problemas de dois passos, que deverão ter a devida continuidade no 3.º ano de escolaridade. Vejam-se alguns exemplos na Figura 72.

**Exemplo 1:**

1. Na biblioteca da escola da Mariana há uma estante com 24 livros na prateleira de cima, 20 livros na prateleira do meio e 18 livros na prateleira de baixo. Quantos livros estão, ao todo, na biblioteca da escola da Mariana?

1.º passo:  $24 + 20 = 44$

2.º passo:  $44 + 18 = 62$

Resposta: Na biblioteca da escola da Mariana estão, ao todo, ..... livros na estante.

**Exemplo 2:**

2. O Adriano tinha 28 cromos. Ao fim da tarde, o pai deu-lhe 30 cromos. Em seguida, o Adriano deu 14 cromos ao primo. Quantos cromos tem agora o Adriano?

1.º passo:  $28 + 30 = 58$

2.º passo:  $58 - 14 = 44$

Resposta: O Adriano tem agora ..... cromos.

**Exemplo 3:**

3. O Miguel tinha 76 berlindes. Ele deu 24 berlindes ao Filipe e 14 berlindes ao Daniel. Quantos berlindes tem agora o Miguel?

1.º passo:  $76 - 24 = 52$

2.º passo:  $52 - 14 = 38$

Resposta: O Miguel tem agora ..... berlindes.

**Exemplo 4:**

4. A dona Rosa retirou 8 botões de uma caixa que tinha 52 botões ao todo. Alguns dias depois, a dona Rosa guardou 12 botões na mesma caixa. Quantos botões estão agora na caixa da dona Rosa?

1.º passo:  $52 - 8 = 44$

2.º passo:  $44 + 12 = 56$

Resposta: A dona Rosa tem agora ..... botões na caixa.

Figura 72: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE DOIS PASSOS.

Na Figura 73, apresenta-se mais um exemplo.

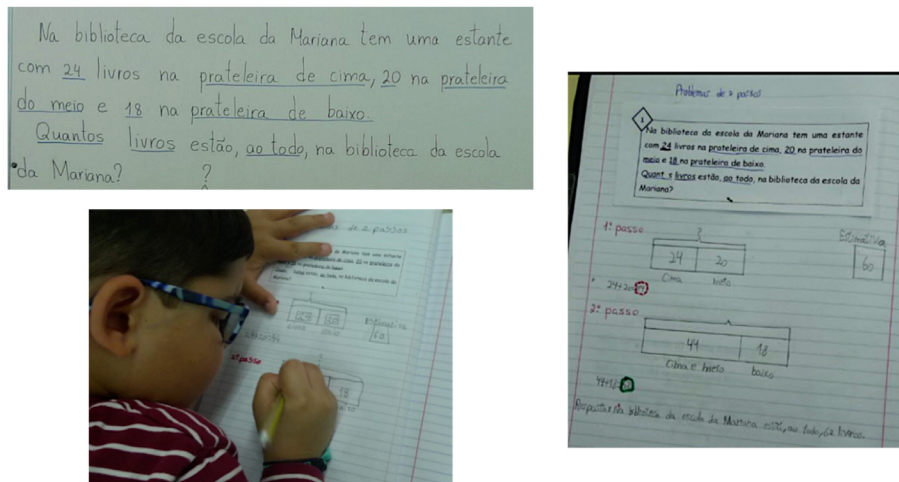


Figura 73: RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE DOIS PASSOS NO CADERNO INDIVIDUAL DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS.

Nos exemplos apresentados nas Figuras 72 e 73, utilizam-se as operações adição e/ou subtração, mas qualquer combinação de duas operações pode ser explorada (incluindo multiplicação e divisão). Nesta fase de aprendizagem, a resolução de um problema de dois passos deve envolver a construção de dois esquemas de barras, como se de dois problemas se tratasse. A utilização de um único esquema para resolver um problema de mais de um passo, por normalmente implicar a elaboração de um esquema mais complexo, não é indicada para o 2.º ano de escolaridade. A única exceção enquadra-se nos problemas de comparação. Apresenta-se, de seguida, um exemplo.

Na Figura 74, mostra-se o enunciado de um problema retirado da Prova de aferição de Matemática e Estudo do Meio – 2.º ano, relativa ao ano letivo de 2016/17 [7].

Na Figura 75, ilustra-se um esquema de barras que permite resolver este problema, que também é referido nos critérios de classificação da referida prova [8].

No contexto do 2.º ano de escolaridade, este é um problema de dois passos, sendo que o aluno deverá efetuar duas adições consecutivas:  $46 + 46 = 92$  e  $92 + 46 = 138$ . Isto porque  $3 \times 46 = 138$  implica o conhecimento do algoritmo da multiplicação, introduzido apenas a partir do 3.º ano de escolaridade.

Neste exemplo, temos, portanto, um problema de dois passos que se traduz num único esquema de barras (com duas barras). Isto acontece naturalmente quando queremos resolver um problema de comparação e pretendemos saber quantos objetos têm as duas personagens, no total.

Na Figura 76, apresentam-se mais alguns exemplos de problemas de comparação de dois passos.

12. A Joana tem 46 euros. O Dinis tem o dobro do dinheiro da Joana.

Quanto dinheiro têm a Joana e o Dinis, no total?

Explica como chegaste à tua resposta.

Resposta: No total, a Joana e o Dinis têm \_\_\_\_\_ euros.

Figura 74: ITEM 12 DA PROVA DE AFERIÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTUDO DO MEIO – 2.º ANO (ANO LETIVO DE 2016/17).

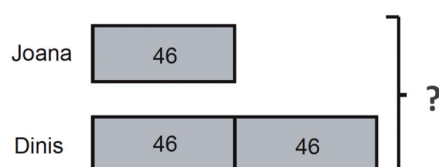




Figura 75: ESQUEMA DE BARRAS QUE PERMITE RESOLVER O ITEM 12.


 A Filipa tem 45 lápis. A Joana tem mais 20 lápis do que a Filipa.  
 Quantos lápis têm as duas amigas ao todo?


 O José tem 58 cromos. O Alexandre tem menos 23 cromos do que o José.  
 Quantos cromos têm os dois amigos ao todo?



 O Sr. Manuel vendeu 52 caixas de leite. Ele vendeu menos 18 caixas de leite do que o Sr. António.  
 Quantas caixas de leite o Sr. Manuel e o Sr. António venderam ao todo?

Figura 76: OUTROS EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE COMPARAÇÃO DE DOIS PASSOS.

No contexto das medidas exploradas no 2.º ano de escolaridade, uma sugestão a ter em conta passa pela resolução de problemas com o modelo de barras, de um ou dois passos e de qualquer uma das tipologias já exploradas neste artigo. Para além do dinheiro, há que explorar situações envolvendo o comprimento, a massa e a capacidade. Alguns exemplos são apresentados nas Figuras 77 e 78.

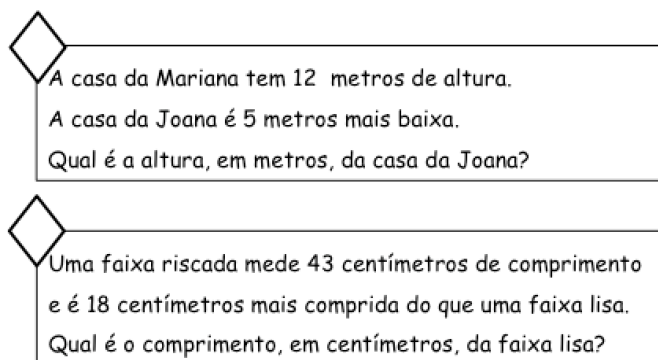


Figura 77: SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS ENVOLVENDO O COMPRIMENTO.

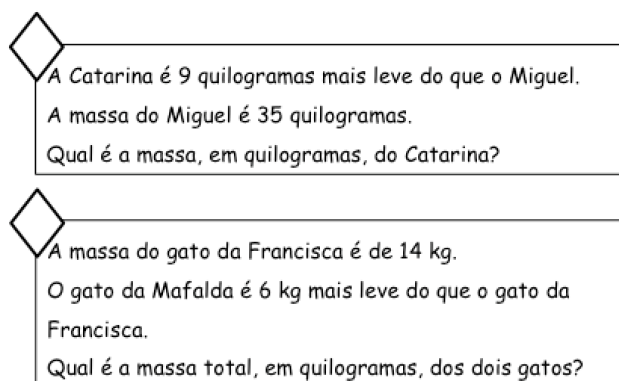


Figura 78: SITUAÇÕES PROBLEMÁTICAS ENVOLVENDO A MASSA.

## 10 Resumo das tipologias de problemas

Em jeito de conclusão, apresenta-se um breve resumo das diferentes tipologias de problemas. Não sendo uma classificação exaustiva, entende-se que este conjunto de tipologias é o adequado no contexto da resolução de problemas no 2.º ano de escolaridade.

Para os problemas de subtração e de comparação, achou-se pertinente esmiuçar um pouco mais a classificação desses problemas, para além dos sentidos das operações, aspeto que se revelou particularmente enriquecedor na prática.

### Problemas de adição

- *Tipologia A*: adição no sentido de acrescentar (há um conjunto que recebe mais elementos).
- *Tipologia B*: adição no sentido de juntar (há dois conjuntos cujos elementos têm uma natureza comum).

### Problemas de subtração

- *Tipologia A1*: subtração no sentido de retirar (conhece-se o todo e a parte que foi retirada; pretende-se descobrir a parte que ficou; o valor retirado é maior do que metade do todo).
- *Tipologia A2*: subtração no sentido de retirar (conhece-se o todo e a parte que foi retirada; pretende-se descobrir a parte que ficou; o valor retirado é menor do que metade do todo).
- *Tipologia B1*: subtração no sentido de retirar (conhece-se o todo e a parte que ficou; pretende-se descobrir a parte que foi retirada; o valor retirado é maior do que metade do todo).
- *Tipologia B2*: subtração no sentido de retirar (conhece-se o todo e a parte que ficou; pretende-se descobrir a parte que foi retirada; o valor retirado é menor do que metade do todo).
- *Tipologia C1*: subtração no sentido de completar (conhece-se o todo e a parte que se tem; pretende-se descobrir a parte que ainda está a faltar; a parte que está em falta é maior do que metade do todo).
- *Tipologia C2*: subtração no sentido de completar (conhece-se o todo e a parte que se tem; pretende-se descobrir a parte que ainda está a faltar; a parte que está em falta é menor do que metade do todo).
- *Tipologia D1*: subtração no sentido de completar (conhece-se o todo e a parte que ainda está a faltar; pretende-se descobrir a parte que se tem; a parte que está em falta é maior do que metade do todo).
- *Tipologia D2*: subtração no sentido de completar (conhece-se o todo e a parte que ainda está a faltar; pretende-se descobrir a parte que se tem; a parte que está em falta é menor do que metade do todo).
- *Tipologia E1*: subtração no sentido de separar (conhece-se o todo e uma parte; pretende-se descobrir a outra parte; existem dois tipos de elementos com uma natureza comum; não se utiliza a palavra “restantes”).
- *Tipologia E2*: subtração no sentido de separar (conhece-se o todo e uma parte; pretende-se descobrir a outra parte; existem dois tipos de elementos com uma natureza comum; um deles é introduzido com a palavra “restantes”).
- *Tipologia E3*: subtração no sentido de separar (conhece-se o todo e uma parte; pretende-se descobrir a outra parte; é identificado um tipo de elementos, subentendendo-se que existem outros tipos e uma natureza comum a todos; a questão é apresentada na negativa).

- *Tipologia E4*: subtração no sentido de separar (conhece-se o todo e uma parte; pretende-se descobrir a outra parte; é identificado um tipo de elementos, existindo duas personagens diferentes).

### Problemas de comparação

- *Tipologia A1*: conhecem-se os valores da barra menor e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra maior; é um problema que envolve a operação adição, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “mais”.
- *Tipologia A2*: conhecem-se os valores da barra menor e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra maior; é um problema que envolve a operação adição, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “menos”.
- *Tipologia B1*: conhecem-se os valores da barra maior e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra menor; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “mais”.
- *Tipologia B2*: conhecem-se os valores da barra maior e da diferença entre as duas barras e pretende-se saber o valor da barra menor; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a informação necessária para comparar as barras é apresentada no enunciado com recurso à palavra “menos”.
- *Tipologia C1*: conhecem-se os valores da barra maior e da barra menor e pretende-se saber o valor da diferença entre as duas barras; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a pergunta é apresentada no enunciado com recurso à palavra “mais”.
- *Tipologia C2*: conhecem-se os valores da barra maior e da barra menor e pretende-se saber o valor da diferença entre as duas barras; é um problema que envolve a operação subtração, sendo que a pergunta é apresentada no enunciado com recurso à palavra “menos”.

### Problemas de multiplicação e divisão

- *Tipologia A*: multiplicação no sentido aditivo (conhece-se o número de grupos e o número de elementos de cada grupo e pretende-se saber o número total de elementos).
- *Tipologia B*: divisão por partilha equitativa (conhece-se o número total de elementos e o número de grupos e pretende-se saber o número de elementos de cada grupo).
- *Tipologia C*: divisão por agrupamento (conhece-se o número total de elementos e o número de elementos de cada grupo e pretende-se saber o número de grupos).

## Referências

- [1] Aharoni, R. *Aritmética para pais: um livro para adultos sobre a matemática das crianças*, Gradiva, 2008.
- [2] Bruner, J. *The Process of Education*, Harvard University Press, 1960.
- [3] Bruner, J. *Toward a Theory of Instruction*, Harvard University Press, 1966.
- [4] Fanglan, L. *Process Skills in Problem Solving – Level 1*, FAN-Math Publications, 2011.
- [5] Fanglan, L. *Process Skills in Problem Solving – Level 2*, FAN-Math Publications, 2009.
- [6] Forsten, C. *Step-by-step Model Drawing – Solving Word Problems the Singapore Way*, Crystal Springs Books, 2010.
- [7] Instituto de Avaliação Educativa (IAVE). *Prova de aferição de Matemática e Estudo do Meio – 2.º ano*, Ministério da Educação, 2017. Obtido em 24 de junho de 2017, de <http://cdn.iave.pt/provas/2017/PA-Mat26-F1-2017.pdf>
- [8] Instituto de Avaliação Educativa (IAVE). *Critérios de classificação da prova de aferição de Matemática e Estudo do Meio – 2.º ano*, Ministério da Educação, 2017. Obtido em 24 de junho de 2017, de <http://cdn.iave.pt/provas/2017/PA-Mat26-F1-2017-CC.pdf>
- [9] International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). *TIMSS 2011*, 2011. Obtido em 7 de junho de 2017, de <https://timss.bc.edu/TIMSS2011/index.html>
- [10] International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). *TIMSS 2015*, 2015. Obtido em 7 de junho de 2017, de <http://timss2015.org>
- [11] Mei, L. Y. and Li, S. V. *Mathematical Problem Solving – The Bar Model Method*, Scholastic, 2014.
- [12] Ministério da Educação e Ciência. *Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*, MEC – Direção Geral da Educação, 2013.
- [13] Ministry of Education of Singapore (Ed.). *The Singapore Model Method for Learning Mathematics*, Curriculum Planning and Development Division, 2009.
- [14] Ministry of Education of Singapore. *Mathematics Syllabus – Primary One to Five*, Curriculum Planning and Development Division, 2012. Obtido em 7 de junho de 2017, de [https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/primary\\_mathematics\\_syllabus\\_pri1\\_to\\_pri5.pdf](https://www.moe.gov.sg/docs/default-source/document/education/syllabuses/sciences/files/primary_mathematics_syllabus_pri1_to_pri5.pdf)
- [15] Pólya, G. *How to solve it*, Princeton University Press, 1945.



- [16] Santos, C. P. e Teixeira, R. C. “Matemática na Educação Pré-Escolar: Esquemas todo-partes”, *Jornal das Primeiras Matemáticas* 4 (2015), 55-70. Obtido em 7 de junho de 2017, de <http://jpm.ludus-opuscula.org/Home/ArticleDetails/1132>
- [17] Yee, L. P. and Hoe, L. N. (Eds.). *Teaching Primary School Mathematics – A Resource Book*, 2nd Edition, McGraw-Hill, 2009.